10 mars 2025

Expérience : 4. Transformée en z

Exercice en classe 4.6.33

1 Matériel

— 1 × générateur de fonction
— 1 × oscilloscope
— 1 × Arduino Uno/Genuino
— 1 × Olimexino 85
— 1 × ordinateur avec Processing
— 1 × câble USB qui fait office de ligne série de transmission
— 1 × résistance de 220[kΩ]
— 1 × condensateur $C = 6.8$ [nF].

2 Objectif

Il s'agit de calculer la réponse indicielle de

$$G(z) = \frac{0.393}{z - 0.607}$$

et d'illustrer celle-ci avec une expérience.

3 Partie théorique

Le saut indiciel $\{\mathbf{1}\} = \{1, 1, \ldots\}$ a pour transformée en z, la progression géométrique

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

Il est utile de se rappeler de la combine suivante (si on a pas les tables des transformées en z et si on a complètement oublié les transformées) :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{N} z^{-k}\right)(z-1) &= (1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-N+1} + z^{-N})(z-1) \\
&= +z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-N+1} + 0 \\
& -0 - 1 - z^{-1} - z^{-2} + \ldots - z^{-N+1} - z^{-N} \\
&= z - z^{-N}
\end{aligned}$$

et en divisant par $z - 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{N} z^{-k} = \frac{z - z^{N}}{z - 1}$$

en passant à la limite $\lim_{N\to\infty}$ et en imposant la région de convergence $|z| > 1$ on a donc $\lim_{N\to\infty} z^{-N} = 0$ et ainsi la transformée en z du saut indiciel est

$$\mathcal{Z}(\{\mathbf{1}\}) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

En procédant de manière similaire pour $\{e^{akh}\}$ on obtient la transformée

$$\frac{z}{z-e^{ah}}$$

pour autant que z ait un module suffisament grand, que z soit situé à l'extérieur d'un cercle de rayon $r > |e^{ah}|$ et dans le cas $a \in \mathbb{R}$ avec $r > e^{ah}$, autrement dit à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisament grand. La transformée en z de la réponse indicielle est, après décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned} Y(z) &= U(z)G(z) \\ &= \frac{z}{z-1}\frac{0.393}{z-0.607} = \alpha\frac{z}{z-1} + \beta\frac{z}{z-0.607} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \frac{0.393}{1-0.607} = 1 \\ \beta &= \lim_{z\to 0.607} \frac{z-0.607}{z} Y(z) = \frac{0.393}{0.607-1} = -1 \end{aligned}$$

on a

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.607} \tag{1}$$

En effectuant la transformée en z inverse de (1) on obtient

$$y(k) = 1 - 0.607^k$$

dont les 5 premières valeurs sont

k	$y(k)$
0	0
1	0.393
2	0.631551
3	0.776351457
4	0.8642453399

Le graphique de cette réponse indicielle est donnée en figure 1.

3.1 Equation aux différences et implémentation

Pour implémenter la fonction de transfert $G(z)$, on commence par établir la relation entre les transformées en z de l'entrée $U(z)$ et de la sortie $Y(z)$ en relation avec $G(z)$. On a

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z)U(z) \\ Y(z) &= \frac{0.393}{z-0.607} U(z) \end{aligned}$$

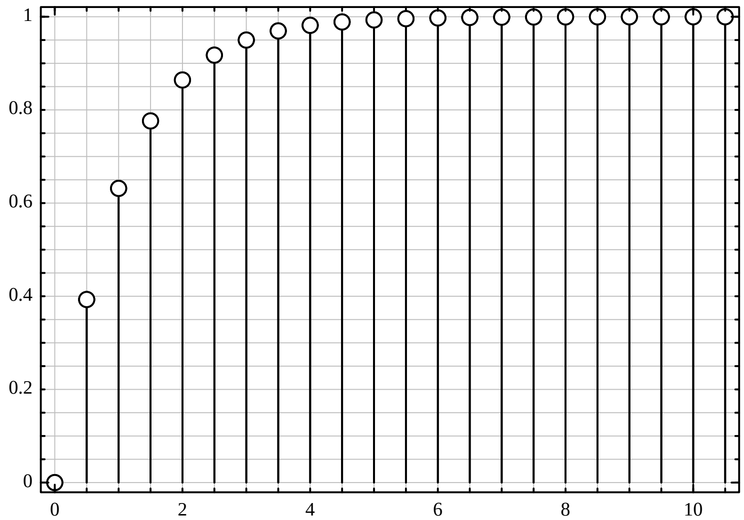

FIGURE 1 – Réponse indicielle de la fonction de transfert $\frac{0.393}{z-0.607}$

autrement dit

$$\begin{aligned} Y(z)(z-0.607) &= 0.393U(z) \\ Y(z)(1-0.607z^{-1}) &= 0.393z^{-1}U(z) \end{aligned}$$

et en appliquant le théorème du retard, on a l'équation aux différences

$$y(k) - 0.607y(k-1) = 0.393u(k-1) \tag{2}$$

3.2 Conditions initiales

On constate que (2) nécessite à l'instant k la connaissance de deux quantités du passé, $y(k-1)$ et $u(k-1)$. Il faut ainsi deux conditions initiales au temps $k=0$, à savoir $y(-1)$ et $u(-1)$ bien qu'à proprement parlé ce sont des échantillons du passé. C'est différent des conditions initiales des équations différentielles ordinaires qui correspondent bien à des phénomènes ayant lieu précisément à l'instant $t=0$.
Il est donc important, au moment de la phase d'initialisation de la boucle d'induction (cette dernière étant décrite par l'équation aux différences (2)), de spécifier les quantités, dites initiales, $u(-1)$ et $y(-1)$.

3.3 Phase d'induction

La phase d'induction est représentée par l'équation aux différences (2) écrite sous la forme

$$y(k) = 0.607y(k-1) + 0.393u(k-1) \tag{3}$$

Cette équations sera codée dans le micro-contrôleur.

4 Expérience associée

On reprend le setup de l'expérience 3, avec $C = 6.8$[nF] et $R = 220$[kΩ].
Le code de l'Olimexino 85 est

```
int yk; // echantillon k de y}
int yk1; //echantillon k-1 de y
int uk; //echantillon k de u
int uk1; //echantillon k-1 de u
// Mise en place
void setup() {

// mise a zero des conditions initiales:
  yk1 = 0;
  uk1 = 0;

  pinMode(1, OUTPUT);    // broche 1 comme sortie

// configuration de la modulation MLI haute frequence
    TCCR0A = 2<<COM0A0 | 2<<COM0B0 | 3<<WGM00;
    TCCR0B = 0<<WGM02 | 1<<CS00;
    TCCR1 = 0<<PWM1A | 0<<COM1A0 | 1<<CS10;
    GTCCR = 1<<PWM1B | 2<<COM1B0;

  analogWrite(1, LOW);
}

void loop() {
  uk = analogRead(1);    // lecture de la broche 2. La valeur est comprise entre 0..1023
  yk = 0.393*uk1 + 0.607*yk1;

  analogWrite(1, yk/3.23);     // MLI (PWM) de la valeur de 0 to 255

  delay(20000); // delai  pour implémenter la période d'échantillonnage

  // le temps c'est decale
  yk1 = yk;
  uk1 = uk;
}
```

On désigne par

```
uk1
yk1
```

respectivement $u(k-1)$ et $y(k-1)$.

4.1 Utilisation du théorème de la valeur finale

L'exercice se prête particulièrement bien pour illustrer le théorème de la valeur finale.
On aimerait la valeur finale de la sortie $y(k)$ lorsque l'entrée est un saut indiciel. Autrement dit on cherche la valeur finale de la sortie $y(k)$ lorsque l'entrée $u(k) = 1$, pour tout $k \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} y(kh) &= \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) \\
&= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{0.393}{z-0.607}\frac{z}{z-1} \\
&= \lim_{z\to 1} z\frac{0.393}{z-0.607} \\
&= \frac{1\cdot 0.393}{1-0.607} = \frac{0.393}{0.393} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Une autre façon de comprendre ce théorème est de constater que lorsque toutes les quantités ont convergé, les valeurs dans l'équation aux différences ne dépendent plus de k et on peut ainsi les substituer par la valeur asymptotique disons $\bar{u}$ et $\bar{y}$. En d'autres mots, l'équation (1) devient

$$\bar{y} = 0.607\bar{y} + 0.363\bar{u}$$

et lorsque $\bar{u} = 1$, on a bien $\bar{y} = 1$.

5 Résultats de l'expérience

Le générateur de fonctions est placé dans le mode onde carrée. On peut ainsi ajuster l'offset, l'amplitude et la fréquence, ceci afin de générer une onde qui soit comprise entre 0 et 5 [V] à l'entrée analogique. Ce signal est échantillonné avec une période d'échantillonnage d'environ 0.2 [s]. Il donne ainsi naissance aux échantillons $u(k)$. L'équation aux différences construit alors la succession des échantillons de la sortie $y(k)$ qui sont utilisés pour la modulation de largeur d'impulsion MLI qui, couplé avec le maintien d'ordre zéro et le filtre RC en sortie, donne naissance à la succession de "marche d'escalier" caractéristique. Le résultat est représenté à la figure 2.

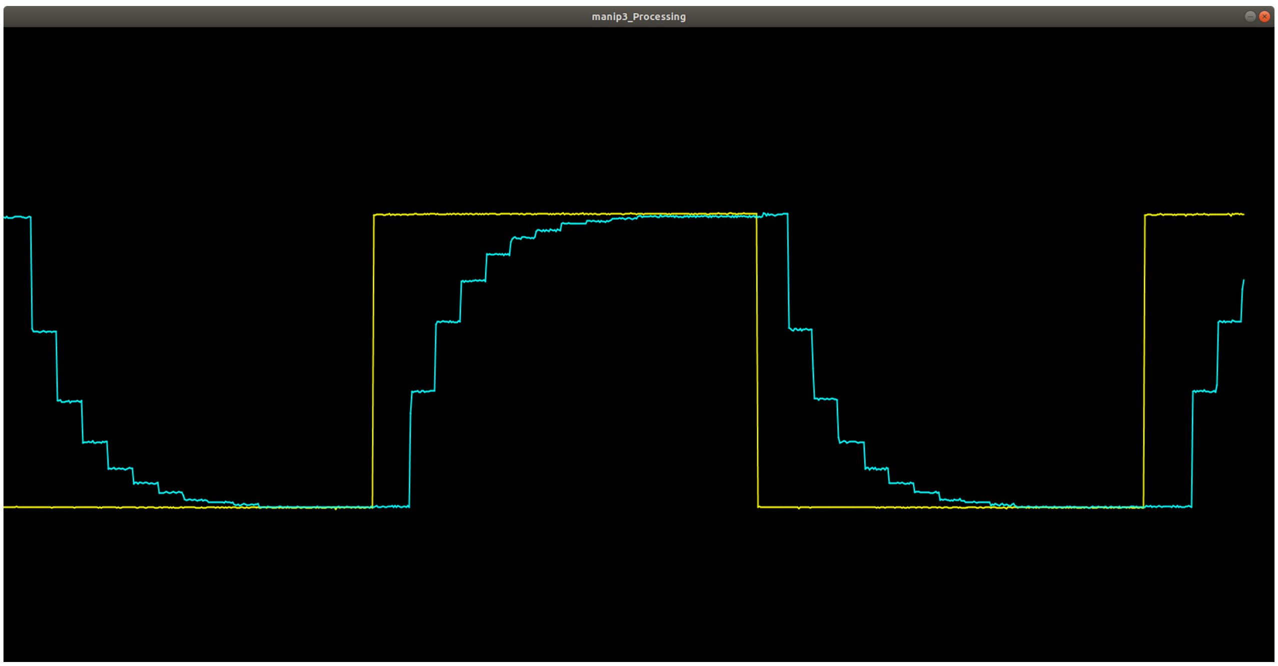

FIGURE 2 – Succession de réponses indicielles obtenues en stimulant l'entrée par un signal carré. On constate le gain unité prévu par le théorème de la valeur finale, ainsi que le retard causé par l'absence de z au numérateur qui se traduit également par la présence d'une condition initiale supplémentaire $u(-1)$. La même interface avec Processing est utilisée que pour la manip 3, tout comme le même code Arduino. Seul l'Olimexino change de code pour réaliser l'équation aux différences (3). On constate l'effet de l'élément de maintien d'ordre zéro au niveau de la sortie qui interpole les échantillons successifs de la sortie.