Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques   Eté 2024

Enseignant: Ph. Müllhaupt

Nom, Prénom, SCIPER :   Signature:

total : **70 pts**

	1.	2.	3.	4.	Tot.

Section :

Problème 1 — (15 pts)

Soit le système donné à la figure 1.

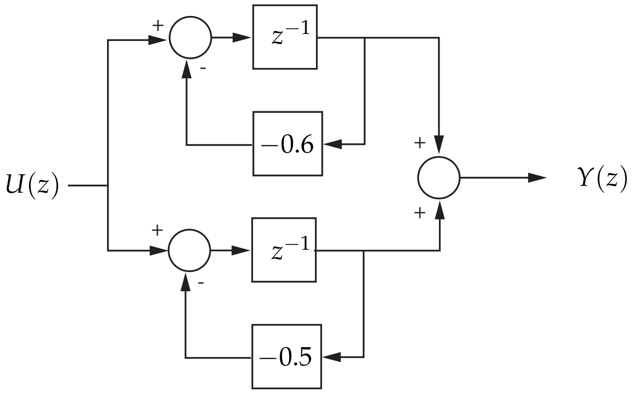

Figure 1: Schéma avec deux délais.

- Compléter le code suivant pour que le code calcule la sortie du diagramme.

```
#include <stdio.h>

int main(int argc, char* argv[])

{
  int i;
  float y, ym, ymm, u;
  float a, b;

  ym = 1500.0;
  ymm = -20.0;
  u = 0.0;

  a = // A COMPLETER
  b = // A COMPLETER

  for (i=1; i<3; i++) {
    y = a * ym +  b * ymm + u;
    ymm = ym;
```

```
    ym = y;
  }

  printf("la solution est %f \n",y);
}
```

- Déterminer les conditions initiales des deux retards qui apparaissent dans la figure 1 pour que la sortie $y(k)$ soit rigoureusement la même dans les deux cas, la sortie $y(k)$ de la figure 1 et la sortie calculée par le code.
- Quelle est la valeur affichée par l'ordinateur à la fin de l'exécution du code ?

Corrigé du problème 1

On constate deux fonctions de transfert du premier ordre branchées en parallèle. On peut donc calculer séparemment ces deux fonctions de transfert. La branche directe est z^{-1} et la boucle est $-0.6\,z^{-1}$ pour la première fonction de transfert (celle du haut comprenant les blocs i) addition-soustraction, ii) le bloc z^{-1}, et iii) le bloc gain -0.6. Ainsi pour cette première fonction de transfert, en appliquant la règle "branche directe divisée par un plus la boucle":

$$H_1(z) = \frac{z^{-1}}{1 + (-0.6\,z^{-1})} = \frac{1}{z - 0.6}$$

On arrive par un raisonnement analogue à la deuxième fonction de transfert

$$H_2(z) = \frac{1}{z - 0.5}$$

L'assemblage parallèle $Y(z) = (H_1(z) + H_2(z))U(z)$ donne

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left(\frac{1}{z-0.6} + \frac{1}{z-0.5}\right) U(z) \\ &= \frac{z - 0.5 + z - 0.6}{z^2 - 1.1\,z + 0.3}\,U(z) \\ &= \frac{2z - 1.1}{z^2 - 1.1\,z + 0.3}\,U(z) \end{aligned}$$

L'équation aux différences s'écrit à partir de l'expression en puissances négatives

$$Y(z) = \frac{2z^{-1} - 1.1z^{-2}}{1 - 1.1\,z^{-1} + 0.3\,z^{-2}}\,U(z)$$

ce qui conduit à

$$y(k) = 1.1\,y(k-1) - 0.3\,y(k-2) + 2\,u(k-1) - 1.1\,u(k-2) \tag{1}$$

En examinant le code proposé dans l'énoncé du problème, on constate que u du code correspond à la combinaison $2\,u(k-1) - 1.1\,u(k-2)$ de l'équation aux différences (1). La correspondance `u=0` avec $u(k)$ fonctionne dans le cas particulier $u(k) = 0$ quel que soit k. De plus, la fin du code

```
ymm = ym;
ym = y;
```

indique que `ymm` correspond à $y(k-2)$ et `ym` correspond à $y(k-1)$. Par identification des termes entre l'équation aux différences (1) et la ligne de code

```
  y = a * ym + b * ymm + u;
```

on identifie les coefficients et on complète les lignes de codes:

```
a = 1.1;
b = - 0.3;
```

Conditions initiales

En désignant par α la condition initiale du premier retard, c.-à-d. la sortie du retard z^-1 dans le diagramme, son entrée est $-0.6\,\alpha$ psuisque l'entrée $u(k) = 0$ quel que soit k. En désignant par β la condition initiale du second retard en dessous de la figure, on obtient le système d'équations suivant qui relie aux conditions initiales y_m et y_{mm} ddu code:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= y_k = y_{mm} = -20 \\ -0.6\,\alpha - 0.5\,\beta &= y_{k+1} = y_m = 1500 \end{aligned}$$

En mettant sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.6 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

et en inversant la matrice

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 10 \times \begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14900 \\ 14880 \end{pmatrix}}$$

Valeur affichée

En itérant on trouve

```
la solution est 1371.599976
```

Problème 2 — (20 pts)

Déterminer la transformée en Z inverse (signaux) avec $h = 0.1$ [s]

1. $$\frac{7\,z^3 - 6.05361\,z^2 + 0.767462\,z}{z^3 - 2.755164\,z^2 + 2.755164\,z - 1}$$

2. $$\frac{7\,z^2 - 4.185916\,z}{z^2 - 1.272679\,z + 0.332856919}$$

Corrigé du problème 2

2.1

On constate en examinant les entiers positifs successifs que $z = 1$ annule le dénominateur. On peut donc factoriser par division polynomiale avec le diviseur $z - 1$. Le dénominateur s'écrit alors

$$z^3 - 2.755164\,z^2 + 2.755164\,z - 1 = (z-1)\,(z^2 - 1.755164\,z + 1)$$

En effet, en posant

$$(z-1)(z^2 + az + b) = z^3 - z^2 + az^2 - az + bz - b$$

On identifie

$$\begin{aligned} a &= -1.755164 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Avec 6 chiffres significatifs on a la factorisation avec deux racinces complexes conjuguées sur le cercle unité

$$z^2 - 1.755164\,z + 1 \approx (z - 0.877582 + 0.479427\,j)(z - 0.877582 - 0.479427\,j)$$

En effet

$$\begin{array}{rcl} 2 \times (-0.875582) & = & -1.755164 \\ (0.877582)^2 + (0.479427) & = & 1.000000415 \approx 1 \end{array}$$

REMARQUE: L'apparition des racines légèrement hors du cercle unité est un artefact lié à la factorisation numérique du polynôme $z^2 - 1.775164z + 1$. Les racines sont parfaitement sur le cercle unité et il n'y a pas de risque d'instabilité. En effet les racines sont

$$z_{1,2} = \cos(\omega h) \pm \sqrt{1 - \cos^2(\omega h)}\, j$$

qui ont toujours un module exactement égal à l'unité. Dans notre cas, on a

$$\cos(\omega h) = \frac{1.755164}{2} = 0.877582$$

qui ne dépend pas de la factorisation. Le choix des éléments simples suggère

$$\alpha \frac{z}{z-1} + \frac{g(z)}{z^2 - 2\cos(\omega\, h)z + 1}$$

avec $g(z)$ un polynôme qui reste à déterminer. Pour trouver ω on examine le dénominateur et on trouve

$$2\cos(\omega\, h) = 1.755164$$

ce qu donne

$$\omega = \arccos\left(\frac{1.755164}{2}\right) \times 10 \approx 5 \qquad [\mathrm{rad/s}]$$

Mettons sinus et cosinus comme éléments simples à cette pulsation. On a alors trois coefficients α, β et γ au lieu de α et $g(z)$

$$\alpha \frac{z}{z-1} + \beta \frac{\sin(\omega h) z}{z^2 - 2\cos(\omega h)z + 1} + \gamma \frac{z(z - \cos(\omega h))}{z^2 - 2\cos(\omega h)\, z + 1}$$

On identifie alors le numérateur

$$\begin{array}{rcl} 7z^3 - 6.05361\, z^2 + 0.767462\, z & = & \alpha\, z\,(z^2 - 2\cos(\omega h)z + 1) + \beta\, \sin(\omega h) z(z-1) + \gamma(z-1)z(z - \cos(\omega h)) \\ & = & \alpha z^3 - 2\alpha\, \cos(\omega h) z^2 + \alpha z \\ & & +\beta\, \sin(\omega h) z^2 - \beta \sin(\omega h) z \\ & & +\gamma z^3 - \gamma(\cos(\omega h) + 1) z^2 + \gamma \cos(\omega h) z \\ & = & (\alpha + \gamma) z^3 + (-2\alpha \cos(\omega h) + \beta \sin(\omega h) - \gamma(\cos \omega h + 1))\, z^2 \\ & & + (\alpha - \beta \sin(\omega h) + \gamma \cos(\omega h)) \end{array}$$

ce qui donne le système d'équations

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2\cos(\omega h) & \sin(\omega h) & -\cos(\omega h) - 1 \\ 1 & -\sin(\omega h) & \cos(\omega h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6.05361 \\ 0.767462 \end{pmatrix}$$

dont la solution est

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & 7 \\ \beta & = & 13 \\ \gamma & = & 0 \end{array}$$

obtenu en utilisant

$$\cos(\omega h) = \cos(0.5) = 0.877582$$
$$\sin(\omega h) = \sin(0.5) = 0.479426$$

La transformée inverse est ensuite obtenue en utilisant les tables

$$\boxed{y(k) = 7 + 13\sin(0.5k)}$$

2.2

On procède à la factorisation du dénominateur. On commence par remarquer que les racines sont réelles parce que le discriminant $b^2 - 4ac$ est positif

$$(-1.272679)^2 - 4 \times 0.332856919 > (-1.27)^2 - 4 \times 0.34 > 1.61 - 1.36 > 0$$

On peut donc poser deux nombres réels α et β à déterminer de telle sorte que

$$z^2 - 1.272679z + 0.332856919 = (z - \alpha)(z - \beta)$$

ce qui conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1.272679 \\ \alpha \times \beta &= 0.332856919 \end{aligned}$$

qui se résoud facilement par substitution pour donner

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.367879 \\ \beta &= 0.9048 \end{aligned}$$

On a donc deux éléments simple du premier ordre.

$$\gamma \frac{z}{z - e^{ah}} + \delta \frac{z}{z - e^{bh}}$$

avec

$$\begin{aligned} e^{a \times 0.1} &= 0.367879 \\ e^{b \times 0.1} &= 0.9048 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 10 \times \ln(0.367879) \approx -10 \\ b &= 10 \times \ln(0.9048) \approx -1 \end{aligned}$$

En ce qui concerne γ et δ, on identifie le numérateur

$$\begin{aligned} 7z^2 - 4.185915z &= \gamma(z - e^{bh})z + \delta(z - e^{ah})z \\ &= (\gamma + \delta)z^2 + (-\gamma e^{bh} - \delta e^{ah})z \end{aligned}$$

ce qui donne le système d'équations sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.9048 & -0.367879 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4.185916 \end{pmatrix} \tag{2}$$

qui se résoud facilement

$$\begin{aligned} \gamma &= 3 \\ \delta &= 4 \end{aligned}$$

conduisant ainsi à la transformée inverse

$$\boxed{y(k) = 3e^{-10 \times 0.1 \times k} + 4e^{-1 \times 0.1 \times k} = 3e^{-k} + 4e^{-0.1 \times k}}$$

$$\boxed{y(k) = 3\,(0.357879441)^k + 4\,(0.904837418)^k}$$

Problème 3 — (20 pts)

Soit un entrainement en position donné par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{40}{s(s+9)}$$

On choisit un gain de $k = 2.25$ pour satisfaire la spécification de traînée.

1. Discrétiser la fonction de transfert analogique $G(s)$ à l'aide d'un maintient d'ordre zéro (ZOH) et donner la transformée en Z résultante. La période d'échantillonnage est $h = 0.01$ [s].

2. Déterminer la valeur des paramètres a et b d'un retard de phase donné sous la forme w

$$K_r(w) = \left(\frac{w+a}{w+b}\right)\frac{b}{a}$$

   pour faire perdre 20 [dB] avant d'atteindre la pulsation de croisement de $\nu_x \approx \omega_x = 1$ [rad/s]. Tenir compte de 11 degrés de phase perdu par le retard de phase par rapport à la boucle ouverte à la fréquence de croisement $\nu_x \approx \omega_x = 1$ [rad/s]. Le régulateur final aura la forme

$$K(w) = k\,K_r(w)$$

   avec les bonnes valeurs de a et b.

3. Quelle est la marge de phase obtenue après compensation ?

4. Déterminer la transformée en z du régulateur en utilisant la transformée de Tustin (transformée bilinéaire) et coder l'algorithme de commande dans un pseudo-code.

   On donne les diagrammes de Bode en module à la figure 2 et en phase à la figure 3 de $kG(j\omega)$ et $kH^{'}(j\nu)$.

   Le retard de phase normalisé est donné à la figure 4 (module) et à la figure 5 (phase).

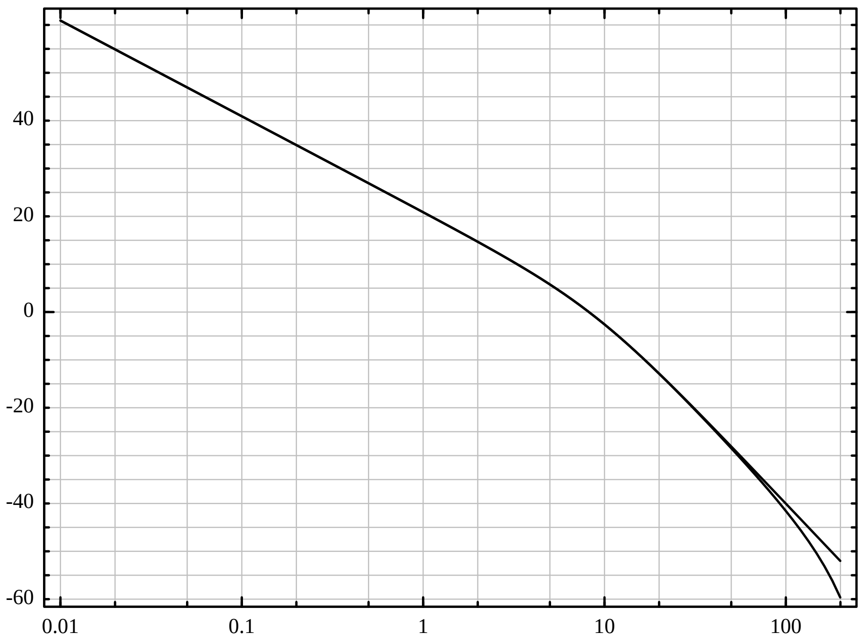

Figure 2: Diagramme de Bode en module de la fonction de transfert harmonique $kG(j\omega)$ et $kH^{'}(j\nu)$ du système à régler avec gain constant de $k = 2.25$ pour satisfaire la spécification de la traînée. On a également représenté le module de la réponse harmonique $kH^{'}(j\nu)$. Il y a très peu de distortion dans la plage de fréquence car $h = 0.01$ est suffisament petit par rapport à la bande passante. L'axe horizontal (abscisse) donne la pulsation en [rad/s] et l'axe vertical (ordonnée) donne les [dB].

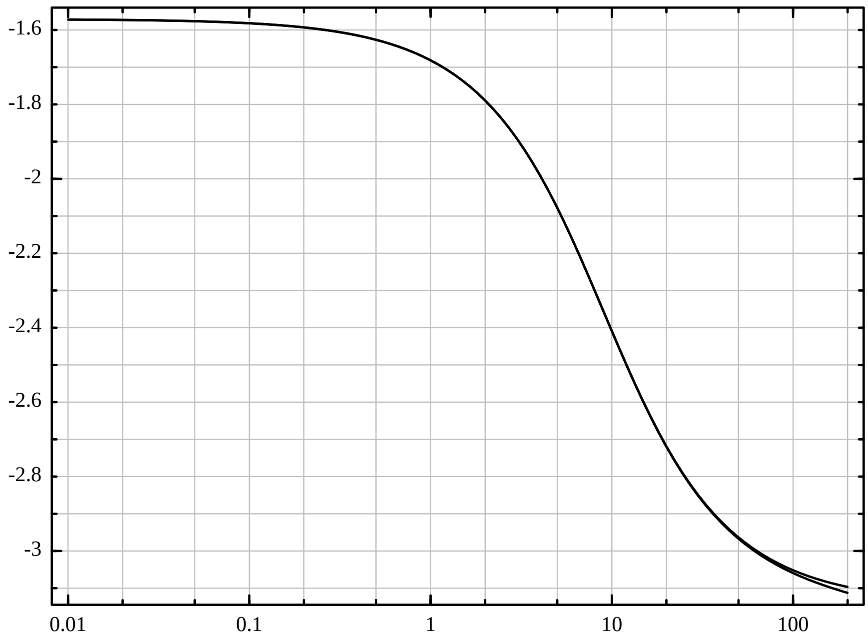

Figure 3: Diagramme de Bode de la phase de la fonction de transfert harmonique $kG(j\omega)$ et $kH^{'}(j\nu)$ avec gain constant $k = 2.25$. L'axe des abscisses donne la pulsation en [rad/s] et l'axe des ordonnés donne l'angle en [rad].

Corretion du problème 3

3.1 Discrétisation par ZOH

On applique la formule

$$H(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right]$$

On décompose ainsi en éléments simples

$$\frac{40}{s^2(s+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+9}$$

ce qui donne en identifiant les numérateurs

$$\begin{aligned} 40 &= As(s+9) + B(s+9) + Cs^2 \\ &= (A+C)s^2 + (9A+B)s + 9B \end{aligned}$$

conduisant au système d'équation

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 9A + B &= 0 \\ 9B &= 40 \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} A &= -\frac{40}{81} \\ B &= \frac{40}{9} \\ C &= \frac{40}{81} \end{aligned}$$

Et la transformée de Laplace inverse de ces éléments simples s'exprime

$$-\frac{40}{81}\epsilon(t) + \frac{40}{9}\,t + \frac{40}{81}\,e^{-9t}$$

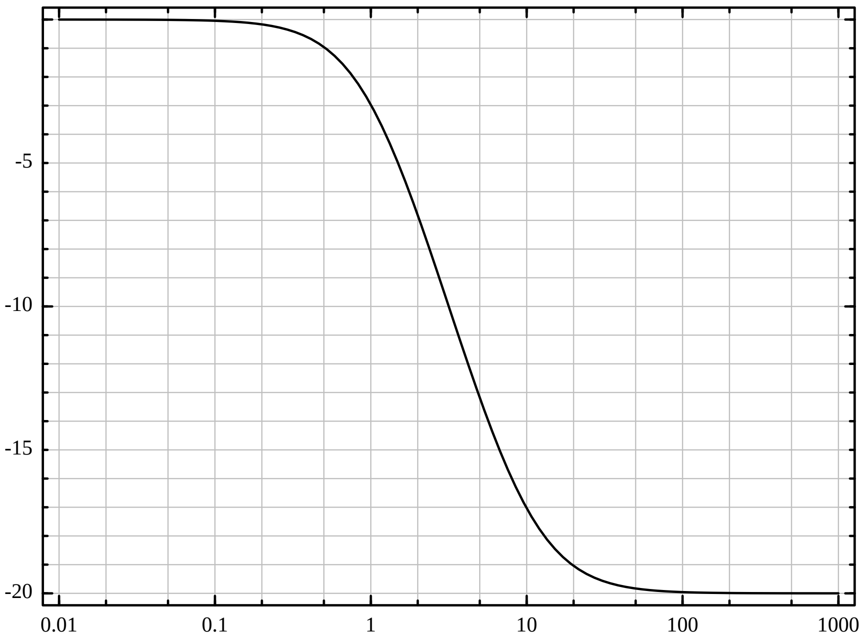

Figure 4: Module de la fonction de transfert harmonique du retard de phase normalisé $\frac{s+10}{10(s+1)}$. Abscisse [rad/s]. Ordonnée [dB].

à partir de laquelle en prenant la transformée en Z multipliée par $\frac{z-1}{z}$

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z-1}{z}\left(-\frac{40}{81}\frac{z}{z-1}+\frac{40}{9}\frac{hz}{(z-1)^2}+\frac{40}{81}\frac{z}{z-e^{-9h}}\right)\\
&= -\frac{40}{81}+\frac{40}{9}\frac{h}{z-1}+\frac{40}{81}\frac{z-1}{z-e^{-9h}}\\
&= \frac{-\frac{40}{81}(z-1)(z-e^{-9h})+\frac{40}{9}h(z-e^{-9h})+\frac{40}{81}(z-1)^2}{(z-1)(z-e^{-9h})}\\
&= \frac{\left(\frac{40}{81}e^{-9h}+\frac{40}{81}(-1+9h)\right)z+\frac{40}{81}-\frac{40}{81}e^{-9h}-\frac{40}{9}e^{-9h}h}{z^2-(1+e^{-9h})+e^{-9h}}
\end{aligned}$$

En appliquant les valeurs numériques avec 6 chiffres significatifs

$$\begin{aligned}
e^{-9h}=e^{-0.09} &\approx_6 0.913931\\
\frac{40}{81}e^{-9h}+\frac{40}{81}(-1+9\,h) &\approx_6 0.00194133\\
\frac{40}{81}-\frac{40}{81}e^{-9h}-\frac{40}{9}e^{-9h}\,h &\approx_6 0.00188395
\end{aligned}$$

conduit à la solution du problème

$$\boxed{H(z)=\frac{0.00194133\,z+0.00188395}{z^2-1.913931z+0.913931}}$$

3.2 Dimensionnement du retard de phase

En examinant la figure 4, la fonction de transfert normalisée $\frac{s+10}{10(s+1)}$ proposée fait bien tomber de 20 [dB] le module. Il s'agit donc de placer la fin de ce diagramme en pulsation normalisée Ω_x entre 12 et 100 [rad/s]. Rappel en pulsation normalisée la fonction de transfert proposée s'exprime

$$\frac{j\Omega+10}{10(j\omega+1)}$$

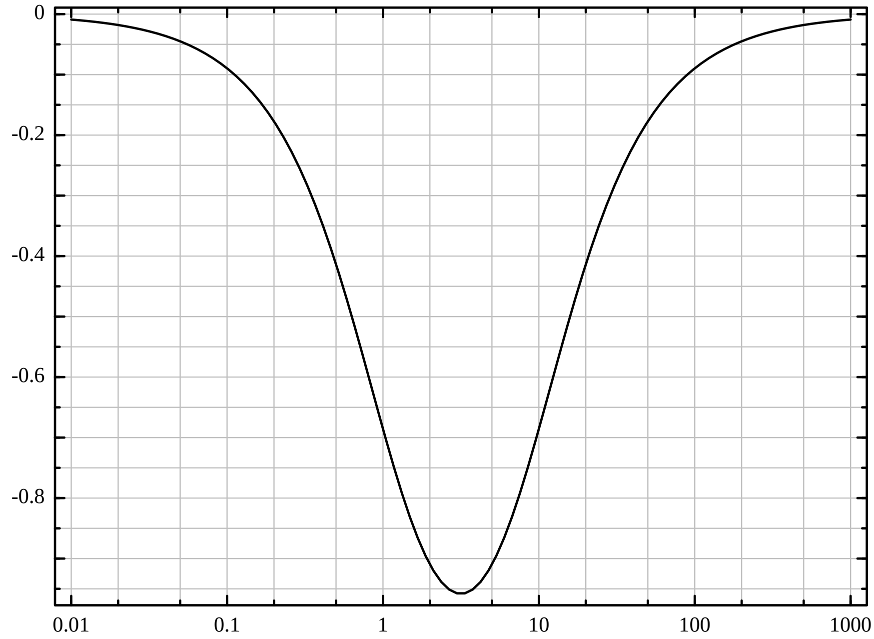

Figure 5: Phase de la fonction de transfert harmonique du retard de phase normalisé $\frac{s+10}{10(s+1)}$. Abscisse [rad/s]. Ordonnée [rad].

Ensuite, il faut mettre à l'échelle en posant

$$\gamma\,\Omega_x = \omega_x$$

avec γ un facteur à déterminer et $\omega_x = 1$ [rad/s] proposé dans l'énoncé.

Pour déterminer précisément Ω_x, et donc γ, on utilise le diagramme de phase de la figure 5 en p. 12, et on cherche Ω_x graphiquement de telle sorte que la fin du diagramme entraîne un déphasage de -11 [deg.]

En utilisant la rèfle millimétrique, on mesure l'intersection 1 décade pour approximativement 2.1 [cm] sur le graphique. Ensuite, on mesure 3.4 [cm] à partir de 1 [rad/s] afin que la vertical coupe l'horizontale à approximativement -11 [deg] $= -0.191986 \approx -0.2$ [rad].

$$\Omega_x \quad = \quad 10^{\frac{3.4}{2.1}} \approx 41.6 \qquad \text{[rad/s]}$$

Vérification analytique pour avoir approximativement 11 [deg].

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{j\,\Omega_x + 10}{10(j\,\Omega_x + 1)}\right) &= \arg(j\,\Omega_x + 10) - \arg(j\,\Omega_x + 0.1) \\ &= -0.211875 = -12.14 \qquad \text{[deg]} \end{aligned}$$

ce qui est raisonnable.

Pour calculer précisément la valeur de manière analytique, il faut une calculette avec résolution de fonction. En résolvant

$$\arctan\left(\frac{\Omega_x}{10}\right) - \arctan\left(\Omega_x\right) = -0.191986$$

donne le résultat

$$\Omega_x = 46.08 \qquad \text{[rad/s]}$$

On peut alors calculer le facteur γ pour translater Ω_x verse $\omega_x = 1$ [rad/s]

$$\gamma = \frac{\Omega_x}{\omega_x} = 46.08$$

ce qui conduit au régulateur lorsqu'on remplace ω_x par

$$\frac{j\gamma\omega+10}{10(j\gamma\omega+1)} = \frac{j\omega+\frac{10}{\gamma}}{10\left(j\omega+\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{\frac{1}{10}j\omega+\frac{1}{\gamma}}{j\omega+\frac{1}{\gamma}} = \frac{0.1\,j\omega+0.217}{j\omega+0.0217}$$

et donc

$$K_r(w) = \frac{0.1\,w+0.0217}{w+0.0217} = \left(\frac{w+0.217}{w+0.0217}\right)0.1$$

$$a = 0.217$$
$$b = 0.0217$$

3.3 Marge de phase

Pour obtenir une estimation de la marge de phase, on peut utiliser le graphique de la Figure 3 et se placer en 1 [rad/s] et de tenir compte de 0.2 [rad] pour le régulateur. On obtient ainsi

$$\boxed{\varphi = \pi - 1.7 - 0.2 = \pi - 1.9 \approx 1.24\ [\text{rad}] = 71.04\ [\text{deg}]}$$

3.4 Régulateur discret par équivalent bilinéaire (Tustin)

On utilise la correspondance

$$w = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$$

$$\begin{aligned}
K_r(z) &= 0.1\,\frac{\frac{2}{0.01}\frac{z-1}{z+1}+0.217}{\frac{2}{0.01}\frac{z-1}{z+1}+0.0217} \\
&= 0.1\frac{2z-2+0.00217(z+1)}{2z-2+0.000217(z+1)} \\
&= 0.1\frac{2.00217z-1.99783}{2.000217z-1.999783} \\
&= 0.1\frac{1.000976394z+0.9988066295}{z-0.9997815237}
\end{aligned}$$

$$\boxed{K(z) = 2.25\,K_r(z) = 0.225\frac{1.000976394z+0.9988066295}{z-0.9997815237}}$$

Codage du régulateur:

$$K(z) = kK_r(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{U(z)}{Y_c(z)-Y(z)} = 0.225\frac{1.000976394z+0.9988066295}{z-0.9997815237} = \alpha\frac{az+b}{z+c}$$

```
al = 0.225;
a = 1.000976394;
b =  0.9988066295;
c = - 0.9997815237;

uk_1 = 0; N = 1000;

% boucle sur k:
k = 0;
repeat
  ek = yck - yk;
  uk = - c*uk_1 + alp*(a*ek + b*ek_1)
% envoi de uk
```

```
% fin de l'iteration
  uk_1 = uk;
  ek_1 = ek;
  k = k+1;
until k == N;
```

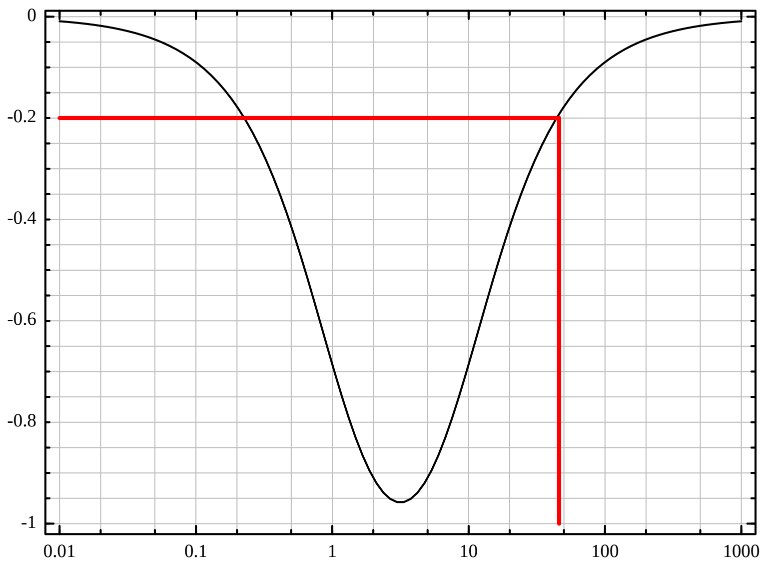

Figure 6: Indication des 11 [deg], approximativement -0.2 [rad] ce qui donne correspond à $\Omega_x = 46.08$ [rad/s].

Problème 4 — (15 pts)

Soit le système à régler

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

avec $A(z) = z - 0.8$ et $B(z) = z - 0.5$. Un régulateur RST à été synthétisé ce qui a conduit à

$$\begin{aligned} R(z) &= z - 0.6 \\ S(z) &= z + 1.1 \\ T(z) &= z - \frac{0.4 + \sqrt{0.3}}{2} \end{aligned}$$

1. Est-ce que le système en boucle fermée est stable ?
2. Déterminer le modèle à poursuivre ainsi que le polynôme observateur.
3. Déterminer les paramètres a et b du modèle d'état du système à régler suivant, afin qu'il ait la fonction de transfert $H(z)$ donnée plus haut :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a\,x_k + b\,u_k \\ y_k &= x_k + u_k \end{aligned} \tag{3}$$

4. Compléter l'observateur (remplacer les $\cdots$ par une expression convenable)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= a\,\hat{x}_k + b\,u_k + l\,(\cdots) \\ \hat{y}_k &= \hat{x}_k + u_k \end{aligned}$$

5. Déterminer la valeur du gain l pour que cette valeur soit compatible avec le polynôme observateur calculé précédemment.

6. Déterminer la valeur du gain k de commande d'un régulateur observateur et donner l'expression afin que le système en boucle fermée se comporte comme le régulateur RST.

Corrigé du problème 4

4.1 stabilité en boucle fermée

La stabilité en boucle fermée est garantie si le zéro du polynôme $AR + BS$ sont tous à l'intérieur du cercle unité. Avec

$$\begin{aligned} A &= z - 0.8 \\ B &= z - 0.5 \\ R &= z - 0.6 \\ S &= z + 1.1 \end{aligned}$$

on vérifie

$$\begin{aligned} AR + BS &= (z - 0.8)(z - 0.6) + (z - 0.5)(z + 1.1) \\ &= z^2 - 1.4\,z + 0.48 + z^2 + 0.6\,z - 0.55 \\ &= 2z^2 - 0.8\,z - 0.07 \\ &= 2(z^2 - 0.4\,z - 0.035) \end{aligned}$$

Les racines

$$\boxed{z_{1,2} = 0.2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{0.4^2 + 4 \times 0.035} = 0.2 \pm \sqrt{0.2^2 + 0.035} = \begin{cases} 0.473861278 \\ -0.073861278 \end{cases}}$$

Comme ces deux racines ont un module plus petit que 1, le système est stable en boucle fermée.

4.2 modèle à poursuivre et polynôme observateur

Le modèle à poursuivre et le polynôme observateur doivent satisfaire

$$\frac{A_o\,B_m}{A_o\,A_m} = \frac{B\,T}{AR + BS}$$

De plus le polynôme observateur et le numérateur du modèle à poursuivre doivent respecter

$$BT = A_o B_m$$

On vérifie que

$$BT = (z - 0.5)\left(z - \frac{0.4 - \sqrt{0.3}}{2}\right)$$

En examinant de plus près on constate les relations suivantes:

$$0.2 - \frac{1}{2}\sqrt{0.3} = 0.2 - \sqrt{\frac{1}{4} \times 0.3} = 0.2 - \sqrt{0.075} = 0.2 - \sqrt{0.04 + 0.035} = 0.2 - \sqrt{0.2^2 + 0.035}$$

autrement dit, BT a une racine en commun avec $AR + BS$. Ceci suggère de factoriser $AR + BS$ de la manière suivante

$$AR + BS \;=\; 2(z - 0.2 - \sqrt{0.2^2 + 0.035})\,T$$

et on peut donc identifier le modèle à poursuivre et le polynôme observateur

$$\boxed{A_m = (z - 0.2 - \sqrt{0.2^2 + 0.035}) = z - 0.473861279}$$

$$\boxed{B_m = \frac{1}{2}(z - 0.5)}$$

$$\boxed{A_o = 2T = 2z - 0.4 + \sqrt{0.3} = 2z + 0.147722558}$$

4.3 paramètres a et b

Première méthode: équation aux différences

En éliminant x_k de l'équation aux différences

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & ax_k + bu_k \\ y_k & = & x_k + u_k \end{array}$$

en posant $x_k = y_k + u_k$, on arrive à

$$y_{k+1} - u_{k+1} = ay_k - au_k + bu_k$$

qui se met sous la forme

$$u_{k_1} + (b - a)u_k = y_{k+1} - ay_k \tag{4}$$

D'un autre côté, si on part de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 0.5}{z - 0.8}$$

et en effectuant la transformée en Z inverse on obtient à partir de la relation

$$U(z)(z - 0.5) = Y(z)(z - 0.8)$$

l'équation aux différence

$$u_{k+1} - 0.5u_k = y_{k+1} - 0.8y_k \tag{5}$$

En comparant (4) et (5) on identifie

$$\boxed{a = 0.8}$$

$$\boxed{b = -0.5 + a = 0.3}$$

Deuxième méthode: fonction de transfert

En exprimant la fonction de transfert à partir de la représentation d'état

$$H(z) = c(z - a)^{-1}b + d$$

avec $d = 1$ et $c = 1$ on a

$$H(z) = (z - a)^{-1} + 1 = \frac{b}{z - a} + 1 = \frac{b + z - a}{z - a} = \frac{z - a + b}{z - a} = \frac{z - 0.5}{z - 0.8}$$

et on trouve

$$\boxed{a = 0.8}$$

et

$$\boxed{b = a - 0.5 = 0.3}$$

4.4 observateur

L'équation aux différences de l'observateur est

$$\hat{x}_{k+1} = 0.8\,\hat{x}_k + 0.3\,u_k + l\,(y_k - \hat{x}_k - u_k) \tag{6}$$

avec l'équation de la sortie qui celle de l'énoncé

$$\hat{y}_k = \hat{x}_k + u_k$$

4.5 gain l de l'observateur

En regroupant le facteur devant $\hat{x}_k$ de l'observateur (6),

$$\hat{x}_{k+1} = (0.8 - l)\,\hat{x}_k + \cdots$$

la raison géométrique doit correspondre au zéro de $A_o(z)$. Ainsi,

$$0.8 - l = \frac{0.4 + \sqrt{0.3}}{2}$$

ce qui donne

$$\boxed{l = 0.6 - \frac{\sqrt{0.3}}{2} = 0.326128721}$$

4.6 gain de commande k et observateur contrôleur

L'observateur contrôleur a la structure suivante

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 0.8x_k - 0.3k\hat{x}_k \\
y_k &= x_k + u_k \\
&= x_k - k(x_k - \hat{x}_k) \\
\hat{x}_{k+1} &= 0.8\,\hat{x}_k - 0.3k\hat{x}_k + l\,(y_k - \hat{x}_k - u_k) \\
&= 0.8\,\hat{x}_k - 0.3k\hat{x}_k + l\,(x_k - \hat{x}_k)
\end{aligned}$$

Et il faut identifier le gain k en associant avec l'autre racine $0.2 - \sqrt{0.2^2 + 0.035}$. en partant de l'équation comme si l'état x_k était directement mesuré

$$x_{k_1} = 0.8\,x_k - 0.3\,kx_k$$

Ainsi

$$0.8 - k\,0.3 = 0.2 - \sqrt{0.2^2 + 0.035}$$

ce qui donne

$$\boxed{k = 2 + \frac{1}{0.3}\sqrt{0.2^2 + 0.035} = 2.912870929}$$

Finalement on vérifie bien que les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b\,k \\ l & a - b\,k - l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 \times k \\ l & 0.8 - 0.3 \times k - l \end{pmatrix}$$

correspondent bien aux zéros de $AR + BS$.

Linéarité

$\mathcal{Z}(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}) = \mathcal{Z}(\{w_1(kh)\}) + \mathcal{Z}(\{w_2(kh)\})$
$\mathcal{Z}(a\{w(kh)\}) = a\mathcal{Z}(w(kh)) \qquad a \in \mathbb{C}$

Décalages temporels

$\mathcal{Z}(w(kh - dh)) = z^{-d}W(z) \qquad d \in \mathbb{N}$
$\mathcal{Z}(w(kh + dh)) = z^{d}W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} z^{d-i} \qquad d \in \mathbb{N}$

Dérivation complexe

$\mathcal{Z}(kh\, w(kh)) = -hz \frac{dW}{dz}(z)$

Changement d'échelle complexe

$\mathcal{Z}(a^{kh}w(kh)) = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \qquad a \in \mathbb{C}\ a \neq 0$

Valeurs initiale et finale

$w(0) = \lim_{z\to\infty} W(z)$
$\lim_{k\to\infty} w(kh) = \lim_{z\to 1}(z-1)W(z) \qquad |z_i| < 1$

Produit de convolution

$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} u(lh)g(kh - lh)\right) = G(z)U(z)$

Accumulation

$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} w(lh)\right) = \frac{z}{z-1}W(z)$

Différence

$\mathcal{Z}(w(kh) - w(kh - h)) = \frac{z-1}{z}W(z)$

Table 1: Tableau de la grammaire de la transformée en $\mathcal{Z}$

N^o	$w(t)$	$\mathcal{L}(w(t))$	$w(kh)$	$\mathcal{Z}(w(kh))$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta(kh)$	1
3	1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{h^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}$	$\frac{1}{s^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akh}	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$
8	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kh\,e^{-akh}$	$\frac{he^{-ah}z}{(z-e^{-ah})^2}$
9	$\frac{1}{2}t^2\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2e^{-akh}$	$\frac{h^2e^{-ah}z(z-e^{-ah}+2e^{-ah})}{2(z-e^{-ah})^3}$
10	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}e^{-akh}$	$\frac{(-1)^{(l-1)!}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
11	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kh)$	$\frac{\sin(\omega h)z}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
12	$\cos(\omega h)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
13	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\sin(\omega kh)$	$\frac{e^{-ah}\sin(\omega h)z}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$

Table 2: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

14	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-e^{-ah}\cos(\omega h))}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$
15			a^k	$\frac{z}{z-a}$
16			$k\,a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
17			$\frac{1}{2}k\,(k-1)\,a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
18			$\frac{1}{(l-1)!}\left(\prod_{i=0}^{l-2}(k-i)\right)(a^{k-l+1})$	$\frac{z}{(z-a)^l}$

Table 3: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-a-b^2+bc}\begin{pmatrix} -1 & b & -b^2 \\ 1 & -b & bc-a \\ c-b & -a & ab \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} b-a & -ab & a^2 \\ 0 & b & -a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \\ c & d & e \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{be-ae+c-d}\begin{pmatrix} be-d & -e & 1 \\ c-ae & e & -1 \\ ad-bc & c-d & b-a \end{pmatrix}$$

Table 4: Inverses de matrices particulières