Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques   Eté 2023

Enseignant: Ph. Müllhaupt

Nom, Prénom, SCIPER :   **Corrigé**

total : **70 pts**

	1.	2.	3.	4.	Tot.

Problème 1 — (15 pts)

Déterminer les transformées en Z des signaux suivants:

1. $$\{e^{-3k}\cos(6k-3)\}$$

2. $$\{k(-0.9e^{-2k})-e^{-2k}\}$$

Corrigé 1.1 : En appliquant la formule de trigonométrie

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \tag{1}$$

Si on ne se souvient pas de ces formules, on utilise le produit de deux matrices de rotations:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \cos(b) & \sin(b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

et on a $\cos(a+b)$ donné par le produit de la première ligne de la matrice de gauche par la première colonne de la matrice suivante, ce qui donne le résultat (1).

Ainsi

$$\begin{aligned}
e^{-3k}\cos(6k-3) &= e^{-3k}\cos(6k)\cos(-3)-e^{-3k}\sin(6k)\sin(-3) \\
&\leftrightarrow \cos(-3)\frac{z(z-e^{-3}\cos(6))}{z^2-2e^{-3}\cos(6)z+e^{-6}}-\sin(-3)\frac{e^{-3}\sin(6)z}{z^2-2e^{-3}\cos(6)z+e^{-6}} \\
&= \frac{z^2\cos(-3)-e^{-3}(\sin(-3)\sin(6)+\cos(-3)\cos(6))z}{z^2-2e^{-3}\cos(6)z+e^{-6}} \\
&= \boxed{\frac{-0.989992497\,z^2+0.04562505\,z}{z^2-0.095608127\,z+0.002478752\,z}}
\end{aligned}$$

Corrigé 1.2 : En utilisant les tables:

$$e^{-2k}\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{-2}}$$

$$k\,e^{-2k}\leftrightarrow\frac{e^{-2}z}{(z-e^{-2})^2}$$

$$
\begin{aligned}
k(-0.9\,e^{-2k}) - e^{-2k} \quad &\leftrightarrow \quad \frac{-0.9\,e^{-2}\,z}{(z-e^{-2})^2} - \frac{z(z-e^{-2})}{(z-e^{-2})^2} \\
&= \quad \frac{-z^2 + 0.1\,e^{-2}\,z}{z^2 - 2e^{-2}\,z + e^{-4}} \\
&= \quad \boxed{\frac{-z^2 + 0.0135333528\,z}{z^2 - 0.270670566\,z + 0.018315639}}
\end{aligned}
$$

Problème 2 — (15 pts)

Déterminer la transformée en Z inverse (réponse impulsionnelle):

1.
$$\frac{z^2 - 4z}{z^2 + 0.2\,z + 0.0075}$$

2.
$$\frac{z^2 - 0.2\,z}{z^2 - 1.13137\,z + 0.64}$$

Corrigé 2.1 : Le polynôme du dénominateur à deux pôles réels: -0.15 et -0.05

$$(z + 0.05)(z + 0.15) = z^2 + 0.2z + 0.0075$$

Ainsi la transformée en Z initiale est combinaison des deux éléments simples:

$$\frac{z^2 - 4z}{z^2 + 0.2z + 0.0075} = \alpha \frac{z}{z + 0.15} + \beta \frac{z}{z + 0.05}$$

En réduisant sous un dénominateur commun le membre de droite et en identifiant les numérateurs, on obtient

$$\alpha(z(z + 0.05)) + \beta(z(z + 0.15)) = z^2 - 4z$$

ce qui conduit au système

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 1 \\
\alpha \times 0.05 + \beta \times 0.15 &= -4
\end{aligned}
$$

La première équation donne $\beta = 1 - \alpha$ et introduit dans la seconde équation

$$
\begin{aligned}
\alpha(0.05 - 0.15) &= 4 - 0.15 \\
\alpha &= \frac{-4 - 0.15}{0.05 - 0.15} = \frac{-4.15}{-0.1} = 41.5
\end{aligned}
$$

Et $\beta = 1 - \alpha$ donne alors

$$\beta = 1 - \alpha = -40.5$$

Cela permet d'écrire la solution du problème sous la forme

$$\boxed{41.5\,(-0.15)^k - 40.5\,(-0.05)^k}$$

Corrigé 2.2 : Les racines du dénominateurs sont complexes conjuguées. Il s'agit donc de sinus et cosinus amorti.

On a

$$z^2 - 1.13137z + 0.64 = z^2 - 2e^{-ah}\cos(\omega h)z + e^{-2ah}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 0.64 &= e^{-2ah} \\ -1.13137 &= -2e^{ah}\cos(\omega h) \end{aligned} \tag{2}$$

ce qui donne

$$ah = -\frac{1}{2}\ln(0.64) = 0.223$$

et $e^{-ah} = e^{-0.223} \approx 0.8$

$$\cos(\omega h) = \frac{1.13137}{2}e^{0.223} = 0.707004 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ce qui donnne

$$\omega h = \cos^{-1}(0.707) \approx 0.7855$$

Ainsi on aura deux contributions, une en $0.8^k \sin(0.7855\,k)$ et une autre en $0.8^k \cos(0.7855\,k)$.

Pour trouver les poids respectif il faut identifier les numérateurs

$$\alpha z(z - e^{-ah}\cos(\omega h)) + \beta e^{-ah}\sin(\omega h)\,z = z^2 - 0.2z$$

On trouve

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= \frac{-0.2 - e^{-ah}\cos(\omega h)}{e^{-ah}\sin(\omega h)} \\ &= \frac{-0.2 - 0.8 \times 0.707}{0.8 \times 0.707} = -1.3536 \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\boxed{0.8^k \cos(0.785\,k) - 1.3536(0.8)^k \sin(0.785\,k)}$$

Problème 3 — (20 pts)

On aimerait un filtre digital de Butterworth du 2ème ordre avec une fréquence de coupure de 20 [Hz].

1. Donner la fonction de transfert analogique du filtre.
2. Parmis les trois périodes d'échantillonnage suivantes, 50 [ms], 5 [ms], 1 [ms], lesquelles ou laquelle est convenable ? Justifier.
3. Choisir une période d'échantillonnage convenable obtenue au point 2. et discrétiser le filtre à l'aide de la méthode de Tustin (méthode bilinéaire).
4. Quelle est la plage de fréquence qui donne une distortion entre ω et ν d'au maximum 5 % ?
5. Implémenter le filtre en pseudo-code en prenant soin d'indiquer les conditions initiales et la boucle principale. Une syntaxe Matlab est la bienvenue mais pas nécessaire pour autant que le pseudo code soit compréhensible.

Corrigé du problème 3:

3.1: La fonction de transfert analogique du filtre de Butterworth d'ordre 2 à fréquence de coupure unité normalisée est la factorisation de

$$\frac{1}{(s+1)^4}$$

ce qui conduit à 4 pôles dont on ne retient que ceux qui on une partie réelle négative (filtre stable). On a ainsi

$$\frac{1}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

En mettant en échelle la fréquence pour avoir la fréquence de coupure à 20 [Hz], ce qui donne $\omega_c = 2\pi \times 20 = 125.66$ [rad/s].

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+\sqrt{2}\frac{s}{\omega_c}+1} = \frac{1}{\left(\frac{s}{125.66}\right)^2+\sqrt{2}\frac{s}{125.66}+1} \qquad \textbf{4 pts}$$

3.2 La fréqunce de repli est la fréqunce de Nyquist qui est la fréquence d'échantillonnage divisée par 2.

$f_N = 500$ [Hz] pour $h = 1$ [ms]

$f_N = 200$ [Hz] pour $h = 5$ [ms]

$f_N = 10$ [Hz] pour $h = 50$ [ms]

En appliquant le critère de Shannon-Nyquist, seules les deux premières périodes d'échantillonnage sont convenables, car la fréquence de coupure est inférieure à la fréquence de Nyquist. **2 pts**

3.3 La méthode bilinéaire consiste à remplacer l'opération de dérivation s par son approximation

$$s \approx \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = \frac{1}{\left(\frac{2}{125.66\,h}\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\sqrt{2}\left(\frac{2}{125.66h}\right)\frac{z-1}{z+1}+1} \qquad \textbf{2 pts}$$

En désignant le facteur

$$\alpha = \frac{2}{h\,\omega_c}$$

on a, pour le cas $h = 1$ [ms]

$$\alpha = \frac{2}{2\pi \times 20 \times 0.001} = 15.915494309$$

et pour le cas $h = 5$ [ms]

$$\alpha = \frac{2}{2\pi \times 20 \times 0.005} = 3.183098862$$

La fonction de transfert du filtre digital se met (en utilisant α) sous la forme

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z^2+2z+1}{\alpha^2(z^2-2z+1)+\sqrt{2}\alpha(z^2-1)+z^2+2z+1} \\ &= \frac{z^2+2z+1}{(\alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1)z^2+(2-2\alpha^2)z+\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1} \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1}(z^2+2z+1)}{z^2+\frac{2-2\alpha^2}{\alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1}z+\frac{\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1}{\alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 15.915494309$ (i.e. $h = 1$ [ms]), cela donne

$$H(z) = \frac{0.003612575\,(z^2+2z+1)}{z^2 - 1.822926692\,z + 0.837376992} \qquad \textbf{4 pts} \tag{3}$$

et pour $\alpha = 3.183098862$ (i.e. $h = 5$ [ms]), cela donne

$$H(z) = \frac{0.06395385\,(z^2+2z+1)}{z^2 - 1.168260667\,z + 0.424118207}$$

Une discussion à ce stade est importante. Cependant plus h est petit et plus la précision numérique sur les coefficients sera importante. Dans cet ordre d'idée, si on effectue une troncature dans le calcul de $\alpha = 15.92$ par exemple, puis 'autres troncatures sur les coefficients du polynôme du dénominateur de la transformée en z pour aboutir à

$$z^2 - 1.822976\,z + 0.837342$$

on ne se trompera pas trop dans la position des pôles. En effet, (3) donne

$$0.911463346000000 \pm 0.081311505326643\,j$$

et dans le cas des troncatures (**bonus +2 pts**)

$$0.911488000000000 \pm 0.080818474719584\,j$$

ce qui est très similaire et ne se remarquera pratiquement pas. Par contre, il ne faut absolument pas faire la même chose avec le numérateur. Pour trouver le numérateur convenable pour la fonction de transfert tronquée on remarquera que le polynôme du numérateur est toujours $\gamma(z^2+2z+1)$ avec γ une valeur numérique. On calculerat ainsi γ pour que le gain en régime permanent soit l'unité autrement dit que $H(1) = 1$. Ainsi

$$4\gamma = 1 - 1.822976 + 0.838342$$

donnera

$$\gamma = \frac{1 - 1.822976 + 0.838342}{4} = 0.0035915$$

On a représenté les diagrammes de Bode discrets résultants à la figure 1

Comparons avec les résultats de Matlab/Sysquake

Pour $h = 0.001$ [ms], un rapide calcul donne $f_e = 1000$ [Hz] ce qui donne pour la fréquence de Nyquist $f_N = 500$ [Hz] et donc le coefficient $f_c/f_N = 0.04$. Ainsi en tapant

```
[num,den] = butter(2, 0.04)
```

cela affichera

```
num =
    0.003621681514929    0.007243363029857    0.003621681514929
den =
    1.000000000000000   -1.822694925196308    0.837181651256022
```

ce qui est très similaire (mais pas exctement) ce que l'on a calculé plus haut (cf. (3)).

Pour la deuxième période d'échantillonnage $h = 5$ [ms] on aura $f_e = 200$ [Hz] et donc $f_N = 100$ [Hz] et $\frac{f_c}{f_N} = \frac{20}{100} = 0.2$.

En tappant dans SysQuake/ Matlab

```
[num,den] = butter(2, 0.2)
```

on obtiendra

```
    0.067455273889072    0.134910547778144    0.067455273889072
den =
    1.000000000000000   -1.142980502539901    0.412801598096189
```

ce qui est sensiblement différent de ce que l'on a calculé.

La différence et la correction (bien entendue facultative pour l'examen) sera donnée au point suivant.

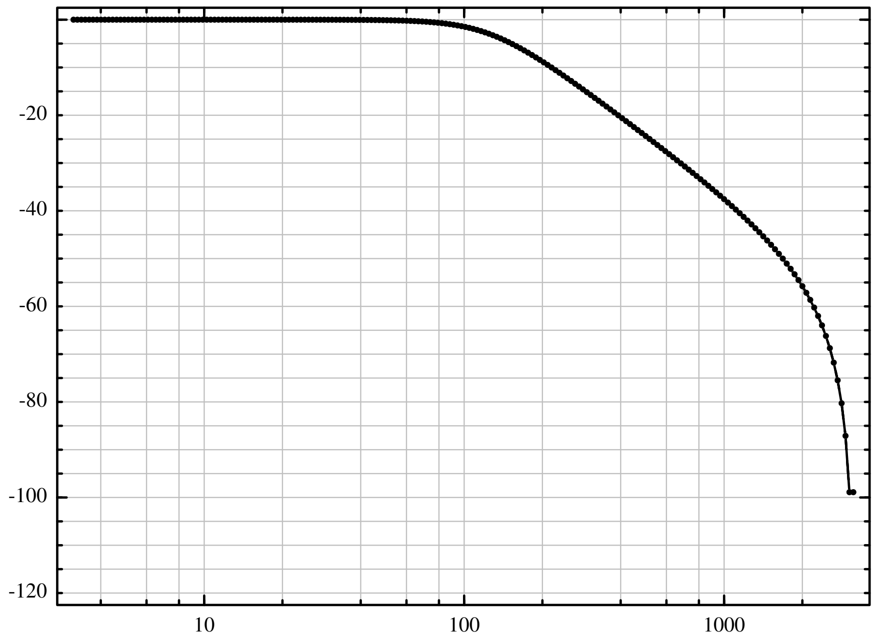

Figure 1: Diagramme de Bode en amplitude pour la réponse harmonique de la fonction de transfert digitale H(z) pour la fonction de transfert calculée sans troncature et celle avec troncature. Il y a peu de différence pour autant que le numérateur soit calculé à partir des coefficients tronqués pour garantir un gain équivalent unitaire en basse fréquence (i.e. $H(1) = 1$).

3.4 Lorsque la période d'échantillonnage est petite $h = 1$ [ms], il y aura peu de distortion entre l'échelle des ν (pulsation analogique qui tient compte de la distortion provoquée par la transformation bilinéaire) et la pulsation analogique réelle ω.

Rappelons que la réponse harmonique du filtre digital est donné par

$$H(e^{j\omega h})$$

En utilisant la transformée bilinéaire, la pulsation est ν. La plage de fréquence donnant peu de distortion est celle pour laquelle il y a peu de différence entre ν (la pulsation suite à la transformation bilinéaire) et la vraie pulsation ω. Les deux sont connectées par la formule vue au cours

$$\omega = \frac{2}{h} \tan\left(\frac{\nu h}{2}\right) \qquad \textbf{2 pts} \tag{4}$$

ou si l'on prend la réciproque

$$\nu = \frac{2}{h} \tan^{-1}\left(\frac{\omega h}{2}\right)$$

Lorsque h est petit on a approximativement $\nu = \omega$. Lorsque h devient plus importante il y aura une différence.

Regardons la distortion à la fréquence de coupure de 20 [Hz]. Le vrai ω devrait être $\omega = 20 \times 2 \times \pi = 125.66$

Pour $h = 1$ [ms]

$$\nu = \frac{2}{h} \tan^{-1}\left(\frac{\omega h}{2}\right) = 125.498$$

La différence est 0.16498 ce qui représente 0.13 %, qui est négligeable.

Pour $h = 5$ [ms]

$$\nu = \frac{2}{0.005} \tan^{-1}\left(\frac{125.6637062 \times 0.005}{2}\right) = 121.7588 \qquad \textbf{2 pts}$$

La différence est de 3.9 qui est commence à être non négligeable car c'est égal à environ 3.1 % (la distortion des 5 % demandée dans l'énoncer est donc juste après la fréquence de coupure des 20 [Hz]. Ainsi la première période d'échantillonnage est plus convaincante.)

Ainsi on impose avec la transformation bilinéaire la pulsation de coupure ν_c et non la vraie pulsation ω_c. Ainsi pour obtenir la réponse harmonique $H(e^{j\omega h})$ à la pulsation de coupure ω_c, il est judicieux d'ajuster ν_c pour avoir le bon ω_c et calculer la transformation bilinéaire avec le ν_c ajuster (et pas comme on a fait au point préédent avec $\nu_c = \omega_c$).

Ainsi pour avoir $\omega_c = 2\pi \times 20 = 125.6637062$ il faut fixer

$$\nu_c = \frac{2}{0.005} \tan\left(\frac{125.6637062 \times 0.005}{2}\right) = 129.967878494$$

ce qui donne

$$\alpha = \frac{2}{\nu_c h} = \frac{2}{0.005 \times 129.967878494} = 3.077683537$$

et en refaisant les calculs avec cette nouvelle valeur de α on trouve ce que Matlab/SysQuake donne comme valeur numérique du filtre:

$$H(z) = \frac{0.067455274(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.142980503\, z + 0.412801598} \qquad \textbf{Bonus } + \textbf{2 pts}$$

Bien entendu, ce dernier calcul et la comparaison avec Matlab ne sont pas demandés à l'examen.

REMARQUE: Le calcul des 5 % de distortion nécessite de calculer la solution numérique à une équation non-linéaire ce qui n'est pas réaliste avec le temps de l'examen. Par contre, une discussion et un ordre de grandeur de la distortion maximale (par exemple le calcul des 3 % ci-dessus à la fréquence de coupure) répond parfaitement à l'examen. Ce qui est important est de donner la formule (4) avec la tangente et de discuter du phénomène.

3.5 : Une implémentation possible est la suivante (**4 pts**)

```
N = 512;

b = 0.067455274;
a1 = - 1.14980503;
a2 = 0.412801598;

uin = randn(1,N);
yout = zeros(1,N);

% memoire sur les entrees
u1 = 0; % u(k-1)
u2 = 0; % u(k-2)

% conditions initiales
y1 = 0; % y(k-1)
y2 = 0; % y(k-2)

% boucle principale
for i=1:N
  yout(i) = - a1*y1 - a2*y2 + b*(uin(i) + 2*u1 + u2);
  y2 = y1; % decalage !
  y1 = yout(i);
  u2 = u1;
  u1 = uin(i);
end;

scale logdb;
plot(abs(fft(yout)));
```

Problème 4 — (20 pts)

Un système est donné par la fonction de transfert suivante:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z-0.9}{z+1.1}$$

Un régulateur RST a été calculé avec les polynômes suivants:

$$\begin{aligned} R(z) &= z^2 + 1.1z - 1.7 \\ S(z) &= -z^2 - 1.1z - 1.6 \\ T(z) &= z + 0.9 \end{aligned}$$

1. Est-ce que système initial est BIBO stable ? Justifier.
2. Est-ce que le système en boucle fermée est stable ? Justifier.
3. Quel est le modèle à poursuivre sachant que le polynôme observateur est constant et égal à

$$A_0(z) = \frac{1}{2}$$

4. Proposer un régulateur d'ordre plus réduit conduisant au même modèle à poursuivre.
5. Quelle est la matrice de Sylvester pour le régulateur réduit ?
6. Quel est le polynôme Q qui relie le régulateur initial avec le régulateur réduit ?

Corrigé du problème 4:

4.1: Le système en boucle ouverte n'est pas BIBO stable car le dénominateur de H(z) est égal à $z+1.1$ et s'annule pour une valeur qui est à l'extérieur du cercle unité. **2 pts**

4.2: Le système est stable si tous les zéros du polynôme $AR+BS$ sont à l'intérieur du cercle unité.

$$\begin{aligned} AR+BS &= (z+1.1)(z^2+1.1z-1.7)+(z-0.9)(-z^2-1.1z-1.6) \\ &= (1-1)z^3+(1.1+1.1+0.9-1.1)z^2 \\ &\quad +[-1.7+(1.1)^2+(-0.9)(-1.1)-1.6]\,z \\ &\quad +(1.1)(-1.7)+(-0.9)(-1.6) \\ &= 2z^2-1.1z-0.43 \qquad \textbf{4 pts} \\ &= 2(z-z_1)(z-z_2) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1.1 \pm \sqrt{1.1^2+4\times 2\times 0.43}}{4} \\ &= \frac{1.1 \pm 2.156385865}{4} \\ &= \begin{cases} -0.264096466 \\ 0.814096466 \end{cases} \qquad \textbf{4 pts} \end{aligned}$$

Les deux zéros de $AR+BS$ sont bien à l'intérieur du cercle unité. Le système est stable en boucle fermée.

4.3: Le modèle à poursuivre est défini par

$$\frac{BT}{AR+BS} = H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

En général on pose

$$\begin{aligned} A_m &= A_0(AR+BS) = \frac{1}{2}(2z^2 - 1.1z - 0.43) = z^2 - 0.55z - 0.215 \\ B_m &= A_0BT = \frac{1}{2}(z-0.9)(z+0.9) = 0.5z^2 - 0.405 \end{aligned}$$

ce qui donne le modèle à poursuivre

$$H_m(z) = \frac{0.5\,z^2 - 0.405}{z^2 - 0.55\,z - 0.215}$$

4.4: Pour obtenir un régulateur d'ordre plus réduit, on peut partir de la paramétrisation de tous les régulateurs conduisant au même modèle à poursuivre. Cette paramétrisation est donnée sous la forme d'un polynôme Q:

$$\begin{aligned} R &= R' - QB && (5) \\ S &= S' + QA && (6) \end{aligned}$$

avec R' et S' une solution de degré inférieur à la solution proposée R et S. (Remarque: les signes devant Q peuvent être changée dans chacune des équations à condition d'avoir toujours des signes alternés dans les deux équations.)

Pour obtenir Q, on procède par division euclidienne, en divisant R par B. Le quotient sera ainsi Q et le reste R' selon (5).

Par division polynomiale on vérifie

$$z^2 + 1.1z - 1.7 = (z+2)(z-0.9) + 0.1$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} Q &= z+2 \\ R' &= \boxed{0.1 = R'} \qquad \textbf{4 pts} \end{aligned}$$

Pour obtenir S', on utilise (6)

$$\begin{aligned} S' = S - QA &= -z^2 - 1.1z - 1.6 - (z+2)(z+1.1) = -z^2 - 1.1z - 1.6 + z^2 + 3.1z + 2.2 \\ &= \boxed{2z + 0.6 = S'} \end{aligned}$$

On constate que ce régulateur est non causal car le degré de S est supérieur au degré de R.

Pour fabriquer un régulateur causal mais d'ordre réduit, on peut utiliser à nouveau la paramétrisation avec un autre polynôme Q. En prenant par exemple $Q = 1$, cela permettra d'élever le degré de R' sans affecter le degré de S''

$$\begin{aligned} R'' &= R' - QB = R' - B = 0.1 - (z-0.9) = \boxed{-z + 1 = R''} \\ S'' &= S' + QA = S' + A = 2z + 0.6 + z + 1.1 = \boxed{3z + 1.7 = S''} \end{aligned}$$

On obtient de la sorte un régulateur causal et de degré réduit par rapport à celui de départ.

4.5: On va déterminer les matrices de Sylvester dans les deux cas, le régulateur réduit non causal et le régulateur réduit causal.

Pour $R^{'} = 0.1$ et $S^{'} = 2z + 0.6$, on peut arranger en puissance sucessives de z selon la ligne. Les coefficients du dénominateur du modèle à poursuivre, $2z^2 - 1.1z - 0.43$ sont alors

$$\begin{pmatrix} 2 & -1.1 & -0.43 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à la matrice de Sylvester

$$\boxed{S_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.1 \\ 1 & -0.9 & 0 \\ 0 & 1 & -0.9 \end{pmatrix}} \qquad \textbf{6 pts}$$

et on vérifie sans peine que

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 2 & 0.6 \end{pmatrix} S_m = \begin{pmatrix} 2 & -1.1 & -0.43 \end{pmatrix}$$

On peut également transposer la matrice de Sylvester si on aligne les coefficients des puissances de z en colonne. Les deux sont comptés comme justes pour le corrigé.

Pour la solution $R^{''} = -z + 1$ et $S^{''} = 3z + 1.7$ on a la matrice de Sylvester suivante

$$\boxed{S_{m,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.1 \\ 1 & -0.9 & 0 \\ 0 & 1 & -0.9 \end{pmatrix}}$$

et on vérifie sans peine

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1.7 \end{pmatrix} S_{m,2} = \begin{pmatrix} 2 & -1.1 & -0.43 \end{pmatrix}$$

4.6: Pour obtenir le polynôme Q qui met en correspondance directe la solution causale avec le problème initial, il faut simplement garder trace des deux transformations effectuées. Posons $Q = z + 2$ (le quotient de la division conduisant à la solution non causale) et

$$Q^{'} = 1$$

la correction pour obtenir la solution causale. On calcule

$$R^{''} = R^{'} - Q^{'}B = R - QB - Q^{'}B = R - (Q + Q^{'})B$$

le polynôme

$$\boxed{Q^{''} = Q + Q^{'} = z + 2 + 1 = z + 3} \qquad \textbf{bonus } + \textbf{4 pts}$$

est le polynôme Q cherché. En effet

$$\begin{aligned} R^{''} = R - Q^{''}B &= z^2 + 1.1\,z - 1.7 - (z+3)(z-0.9) \\ &= z^2 + 1.1\,z - 1.7 - (z^2 + 2.1\,z - 2.7) \\ &= -z + 1 \\ S^{''} = S + Q^{''}A &= -z^2 - 1.1\,z - 1.6 + (z+3)(z+1.1) \\ &= -z^2 - 1.1\,z - 1.6 + z^2 + 4.1\,z + 3.3 \\ &= 3z + 1.7 \end{aligned}$$

Remarque:

Une autre façon de procéder est d'essayer de résoudre directement l'équation de Bézout. On cherche ainsi

$$\begin{aligned} AR + BS &= z^2 - 0.55z - 0.215 \\ &= (z + 1.1)(z + r_1) + (z + 0.9)s_1 \\ &= z^2 + (1.1 + r_1)\,z + r_1\,1.1 + z\,s_1 - 0.9\,z \end{aligned}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.55 - 1.1 \\ -0.215 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.65 \\ -0.215 \end{pmatrix}$$

En réduisant en éliminant la première ligne et la première colonne

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-0.9 - 1.1} \begin{pmatrix} -0.9 & -1 \\ -1.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.65 \\ -0.215 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.85 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

On multiplie par 2 pour avoir la solution à

$$AR + BS = 2z^2 - 1.1z - 0.43$$

ce qui donne finalement la solution causale

$$\boxed{R = 2z - 1.7}$$

$$\boxed{S = -1.6}$$

Barème:

Le barème est linéaire et correspond aux points divisés par 10. La note est la note la plus grande contenue dans ce nombre. Par exemple 54.9 pts donne 5.49 et on attribue alors 5.25 et non 5.5.

En notation polonaire inverse (RPN):

$$\boxed{P \uparrow 10/4 * \ \mathrm{IP}\ 4/}$$