Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques   Eté 2022

Enseignant: Ph. Müllhaupt

Nom, Prénom, SCIPER :

Signature:

Corrigé

total : **60 pts**

	1.	2.	3.	4.	Tot.

Section :

Problème 1 — (15 pts)

Soit la fonction de transfert continue

$$G(s) = \frac{150}{s^2 + 20s + 2}$$

Cette fonction de transfert est échantillonnée à l'aide d'une période d'échantillonnage de 1 [s]. On demande de calculer:

1. L'équivalent discret par la méthode 'zoh', maintien d'ordre zéro.
2. L'équivalent par la transformée bilinéaire de Tustin.
3. Expliquer la différence obtenue au niveau des pôles. Est-ce que la stabilité est maintenue ?
4. Etablir la relation exacte théorique entre les pôles discrets et continu. Laquelle des deux méthodes proposées garantit approximativement cette correspondance?
5. Proposer une solution pour corriger la différence constatée.

Corrigé du problème 1.

1.1 Equivalent par 'zoh'. Il s'agit de calculer

$$\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$

Les deux racines du dénominateur sont $-10+7\sqrt{2}$ et $-10-7\sqrt{2}$. Décomposons $G(s)/s$ en éléments simples.

$$\begin{aligned}\frac{G(s)}{s} &= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+10-7\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{s+10+7\sqrt{2}} \\ &\approx \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+0.1005} + \frac{\gamma}{s+19.899}\end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{s\to 0}\frac{150}{s^2+20s+2} = \frac{150}{2} = 75 \\
\beta &= \lim_{s\to -10+7\sqrt{2}} \frac{1}{s}\frac{150}{s+10+7\sqrt{2}} = \frac{1}{-10+7\sqrt{2}}\frac{150}{14\sqrt{2}} \approx -75.38 \\
\gamma &= \lim_{s\to -10-7\sqrt{2}} \frac{1}{s}\frac{150}{s+10-7\sqrt{2}} = \frac{1}{-10-7\sqrt{2}}\frac{-150}{14\sqrt{2}} = \frac{150}{(10+7\sqrt{2})14\sqrt{2}} \approx 0.3807
\end{aligned}
$$

De telle sorte que

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = 75\epsilon(k) + \frac{1}{7\sqrt{2}-10}\frac{150}{14\sqrt{2}}e^{(-10+7\sqrt{2})k} + \frac{150}{(10+7\sqrt{2})14\sqrt{2}}e^{(-10-7\sqrt{2})k}
$$

Ceci conduit alors à la fonction de transfert discrète

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = 75 + \frac{z-1}{z}\frac{150}{(7\sqrt{2}-10)14\sqrt{2}}\frac{z}{z-e^{-10+7\sqrt{2}}} \\
&\quad + \frac{z-1}{z}\frac{150}{(10+7\sqrt{2})}\frac{z}{z-e^{-10-7\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

On peut laisser l'expression sous cette forme. On constate, deux pôles discrets, un rapide proche de zéro et un relativement lent. Leurs expressions sont

$$
\begin{gathered}
z_1 = e^{-10+7\sqrt{2}} \approx 0.904 \\
z_2 = e^{-10-7\sqrt{2}} \approx 2.279\times 10^{-9}
\end{gathered} \tag{1}
$$

1.2 Equivalent par la méthode de Tustin. On a les relations bilinéaires suivantes avec $h = 1$ [s]:

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1+\frac{s}{2}}{1-\frac{s}{2}} = \frac{2+s}{2-s} \\
s &= 2\frac{z-1}{z+1}
\end{aligned}
$$

En utilisant la deuxième expression, la fonction de transfert s'écrit

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{150}{\left(2\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 20\left(2\frac{z-1}{z+1}\right) + 2} = \frac{150(z+1)^2}{4(z^2-2z+1)+40(z-1)(z+1)+2(z+1)^2} \\
&= \frac{150(z^2+2z+1)}{4z^2-8z+4+40z^2-40+2z^2+4z+2} \\
&= \frac{150(z^2+2z+1)}{46z^2-4z-34} \\
&= \frac{150/46\,(z^2+2z+1)}{z^2-4/46\,z-34/46} \\
&= \frac{3.26z^2+6.52z+3.26}{z^2-0.086956\,z-0.73913}
\end{aligned}
$$

1.3 Différence entre les deux résultats et 1.4 relation exacte. Calculons la position de racines dans la méthode de Tustin:

$$
z_{1,2} = \frac{-0.087 \pm \sqrt{(0.087)^2 + 4\times 0.739}}{2} = \begin{cases} -0.817 \\ +0.904 \end{cases}
$$

On constate que 0.904 est proche de la valeur théorique $e^{-10+7\sqrt{2}}$. Par contre, -0.817 ne correspond pas à la valeur théorique de $e^{-10-7\sqrt{2}} \approx 2.279^{-9}$. La valeur théorique est donnée au numéro suivant.

1.4 Relation exacte entre les pôles. La valeur théorique des pôles obéissent à la relation

$$e^{s_i h} = z_i \qquad i = 1,2 \qquad h = 1$$

1.5 Solution pour améliorer la situation. La différence entre un des pôles entre le deux méthodes provient du fait que le pôle rapide nécessite une période d'échantillonnage petite pour être fidèlement restitué. Dans la méthode 'zoh' nous avons pu calculer le pôle en utilisant la méthode théorique par correspondance des éléments simples discrets et continus. Avec la transformation bilinéaire ce n'était pas possible.

Un remède est de diminuer la période d'échantillonnage afin que la position du pôle simple rapide soit en bonne correspondance avec l'équivalent bilinéaire.

Problème 2 — (15 pts)

Deux codes semblent donner la même solution au niveau de la relation entre le signal d'entrée $\{u(k)\}$ et le signal de sortie $\{y(k)\}$.

Le premier code est décrit par les lignes Matlab suivantes:

```
% uu contient les entrees. yy contient les sorties
uk1 = 0; yk1 = 0; yk2 = 0;
uu = ones(1,n);
yy = zeros(1,n);
for k=1:n
    uk = uu(k);
    a = 0.2*yk1 + 0.48*yk2;
    b = uk-0.2*uk1;
    yy(k) = a + b;
    uk1 = uk;
    yk2 = yk1;
    yk1 = yy(k);
end;
```

Le second par:

```
% uu contient les entrees. yy contient les sorties
uk1 = 0; vk1 = 0; yk1 = 0;
uu = ones(1,n);
yy = zeros(1,n);
for k=1:n
    uk = uu(k);
    vk = 0.8*vk1 + uk - 0.2*uk1;
    yy(k) = -0.6*yk1 + vk;
    uk1 = uk;
    vk1 = vk;
    yk1 = yy(k);
end;
```

1. Donner une démonstration de l'équivalence des deux codes au niveau du comportement entrée sortie en absence d'erreur d'arrondi.

2. Compléter la troisième variante du code en déterminant les valeurs de a et b dans la partie du code suivant:

   ```
   a = ...;
   b = ...;
   vk = 0.8*vk1 + a*uk;
   wk = -0.6*wk1 + b*uk;
   ```

et compléter le code pour qu'il donne la même relation entrée uu et sortie yy que les deux autres codes.

INDICATION: Utiliser la transformée en z.

Corrigé du problème 2.

2.1 Equivalence des deux codes. Dans les codes, on constate les correspondance suivantes entre les variables du code et les expressions mathématiques correspondantes:

code	math
`uk`	$u(k)$
`uk1`	$u(k-1)$
`vk`	$v(k)$
`vk1`	$v(k-1)$
`wk`	$w(k)$
`wk1`	$w(k-1)$
`yk`	$y(k)$
`yk1`	$y(k-1)$
`yk2`	$y(k-2)$

Ainsi, la relation entrée sortie du premier code est décrit par les équations aux différences

$$y(k) = 0.2\,y(k-1) + 0.48\,y(k-2) + u(k) - 0.2\,u(k-1)$$

ce qui correspond à la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 - 0.2z}{z^2 - 0.2z - 0.48}$$

Pour le deuxième code, nous avons les équations aux différences

$$\begin{aligned} v(k) &= 0.8\,v(k-1) + u(k) - 0.2\,u(k-1) \\ y(k) &= -0.6\,y(k-1) + v(k) \end{aligned}$$

Ceci correspond au produit de deux fonction de transfert en z

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{V(z)}{U(z)}\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{z-0.2}{z-0.8}\;\frac{z}{z+0.6} \\ &= \frac{z^2-0.2z}{(z-8)(z+0.6)} \\ &= \frac{z^2-0.2z}{z^2-0.2z+0.48} \end{aligned}$$

Comme $H_2(z) = H(z)$, et que les conditions initiales sont nulles et identiques, le comportement entrée sortie est identique.

2.2 Troisième variante. On constate que les deux équations aux différences sont découplées et ont la même entrée $u(k)$. Ceci suggère la somme de deux fonctions de transferts équivalante à $H(z)$. Ceci est possible si on procède à une décomposition en éléments simples.

$$\begin{aligned} H(z) &= a\frac{z}{z-0.8} + b\frac{z}{z+0.6} \\ &= \frac{az\,(z+0.6) + bz\,(z-0.8)}{(z+0.6)(z-0.8)} \\ &= \frac{z^2-0.2z}{z^2-0.2z+0.48} \end{aligned}$$

et en identifiant les numérateurs par puissance de z

$$\begin{aligned} a\,z^2 + b\,z^2 &= 1\,z^2 \\ a\,0.6\,z - b\,0.8\,z &= -0.2\,z \end{aligned}$$

En écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

et en inversant la matrice

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{-1.4} \begin{pmatrix} -0.8 & -1 \\ -0.6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

on trouve

$$\begin{aligned} a &= \frac{-0.8+0.2}{-1.4} = \frac{5}{7}\frac{6}{10} = \frac{3}{7} \approx 0.42857 \\ b &= \frac{-0.6-0.2}{-1.4} = \frac{5}{7}\frac{8}{10} = \frac{4}{7} \approx 0.571429 \end{aligned}$$

ce qui conduit au code complété

```
% uu contient les entrees. yy contient les sorties
vk1 = 0; wk1 = 0;
uu = ones(1,n);
yy = zeros(1,n);
a = 3/7;
b = 4/7;
for k=1:n
    uk = uu(k);
    vk = 0.8*vk1 + a*uk;
    wk = -0.6*wk1 + b*uk;
    yy(k) = vk + wk;
    wk1 = wk;
    vk1 = vk;
end;
```

Il est judicieux de sortir `a` et `b` de la boucle `for`.

Problème 3 — (15 pts)

Une fonction de transfert discrète est approximée par le modèle pseudo-analogique:

$$G'(w) = \frac{-0.5w + 50}{w^2 + 10w + 20}$$

Déterminer un régulateur par avance de phase

$$K'(w) = \gamma m \frac{w + \Omega}{w + m\,\Omega}$$

afin d'atteindre les performances suivantes:

1. Une erreur de statisme d'au maximum 0.12.
2. Une marge de phase de 60 degrés.

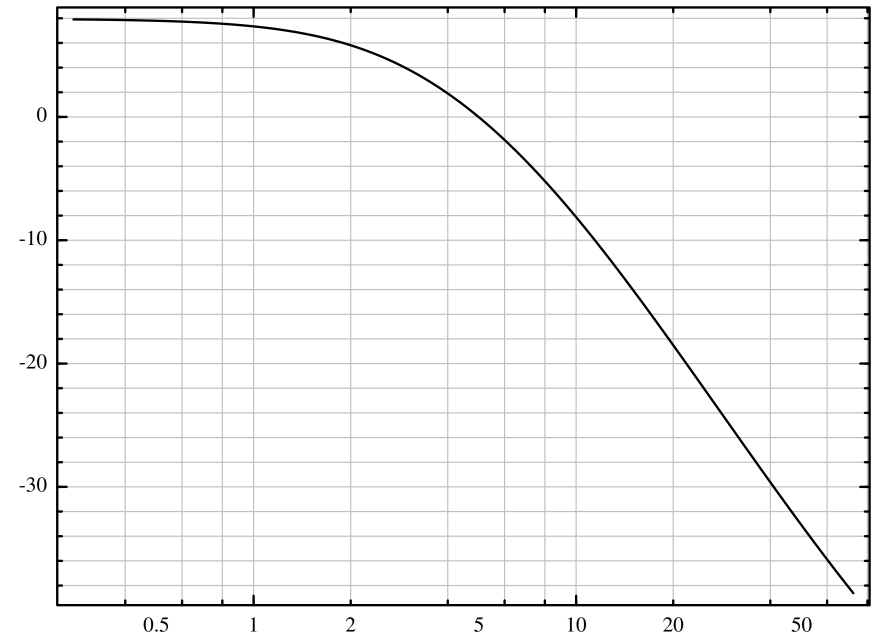

Figure 1: Diagramme de Bode du module de la fonction de transfert à régler (en horizontal [rad/s] et en vertical [dB]).

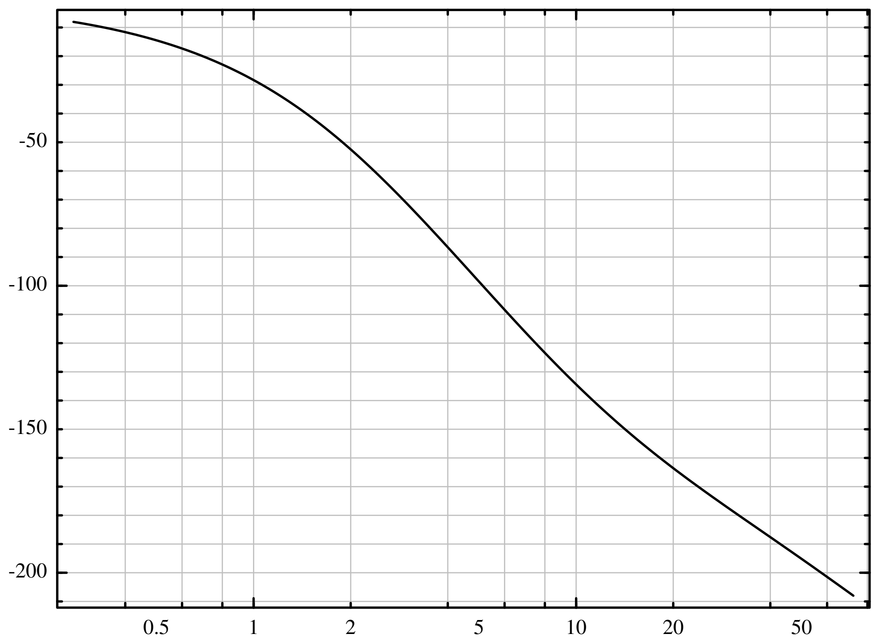

Figure 2: Diagramme de Bode de la phase de la fonction de transfert à régler (en horizontal [rad/s] et en vertical [deg]).

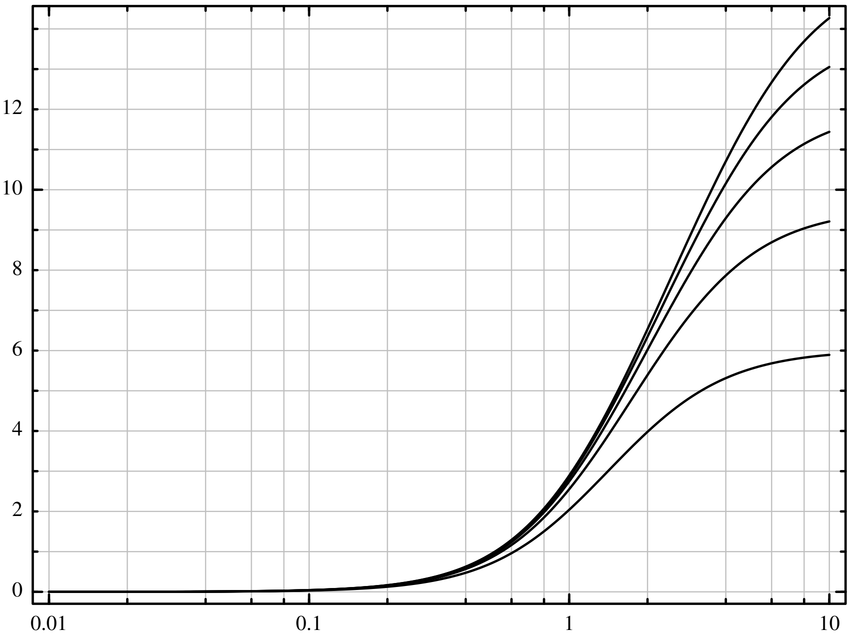

Figure 3: Diagramme de Bode du régulateur normalisé $m\frac{w+1}{w+m}$ pour $m = 2, 3, 4, 5, 6$. La valeur $m = 2$ correspond à la courbe inférieure. Les unités sont le [dB] sur l'axe vertical. En horizontal, la pulsation ν est exprimée en [rad/s].

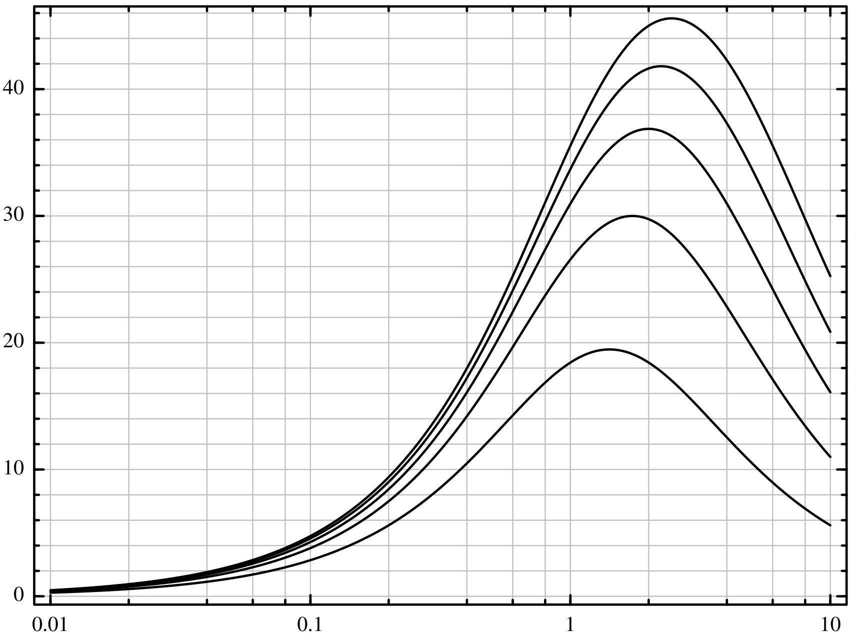

Figure 4: Diagramme de Bode du régulateur normalisé $m\frac{w+1}{w+m}$ pour $m = 2, 3, 4, 5, 6$. La valeur $m = 2$ correspond à la courbe inférieure. Les unités sont les degrés sur l'axe vertical. En horizontal, la pulsation ν est exprimée en [rad/s].

INDICATIONS: On a représenté dans les graphiques le diagramme de Bode de $G^{'}(j\,\nu)$ en module et en phase. On a également représenter le régulateur normalisé en gain $\gamma = 1$ et en fréquence $\Omega = 1$ pour plusieurs valeurs de m. Marche à suivre: 1. Déterminer γ pour avoir la spécification sur le statisme. 2. Déterminer Ω en fonction de la pulsation de croisement. 3. Déterminer m pour avoir la bonne marge de phase. 4. Ajuster si nécessaire.

Donner le pseudo-code du régulateur et déterminer les conditions initiales et les variables intermédiaires supplémentaires si nécessaire. Utiliser les deux méthodes suivantes avec $h = 0.01$:

3. L'équivalent 'zoh'; INDICATION: diviser les polynômes.
4. La méthode de Tustin (transformée bilinéaire).
5. Vérifier s'il existe une différence similaire à celle constatée dans le problème 1.

Corrigé du problème 3.

3.1 Design pour un statisme au maximum de 0.12 Supoosons un régulateur proprotionnel pur et de gain unité $K = 1$. Le gain de la boulce KG pour la composante continue $w = 0$ donne un gain de boucle

$$K(0)G(0) = 1\,\frac{5}{2} = 2.5$$

ce qui conduit en boucle fermée au transfert entre la consigne et la grandeur mesurée de

$$\frac{K(0)G(0)}{1 + K(0)G(0)} = \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{5}{2+5} = \frac{5}{7} = 0.71429$$

engendrant une erreur de $1 - 0.71429 = 0.28571 > 0.12$. Il faut donc augmenter le gain K pour atteindre la spécification sur le statisme. L'équation à résoudre est pour le gain minimal $K(0)$

$$\frac{K(0)\frac{5}{2}}{1 + K(0)\frac{5}{2}} = 1 - 0.12 = 0.88$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} 1.76 + 4.4\,K &= 5K \\ K &= \frac{1.76}{0.6} = 2.93 \end{aligned}$$

Ainsi avec un gain $K = 3 > 2.93$ on satisfait la spécification sur le statisme. Ceci correspond à décaler le diagramme de Bode en amplitude de la quantité

$$20\,\log_{10} 3 = 9.54\,[\text{dB}]$$

Pour faire simple, tout en garantissant la spécification sur le statisme, on augmente un petit peu le gain pour avoir 10 [dB]. Mais gardons $K = 3$ pour les figure. Nous avons représenter à la figure 5 le diagramme de Bode en amplitude de KG avec $K = 3$.

3.2 Marge de phase. En examinant la courbe du milieu de la figure 5, c.-à-d. celle obtenue lorsque le régulateur est purement proportionnel $K = 3$, on constate que celle-ci croise 0 [dB] pour une pulsation approximativement de $\nu = 11$ [rad/s]. Calculons précisément cette quantité (0 [dB] correspond à un gain de 1 en boucle ouverte). Ce calcul précis est facultatif. On le donne pour le corrigé.

$$1 = \left| \frac{-0.5j\nu + 50}{(j\nu)^2 + 10\,j\nu + 20} \right|$$

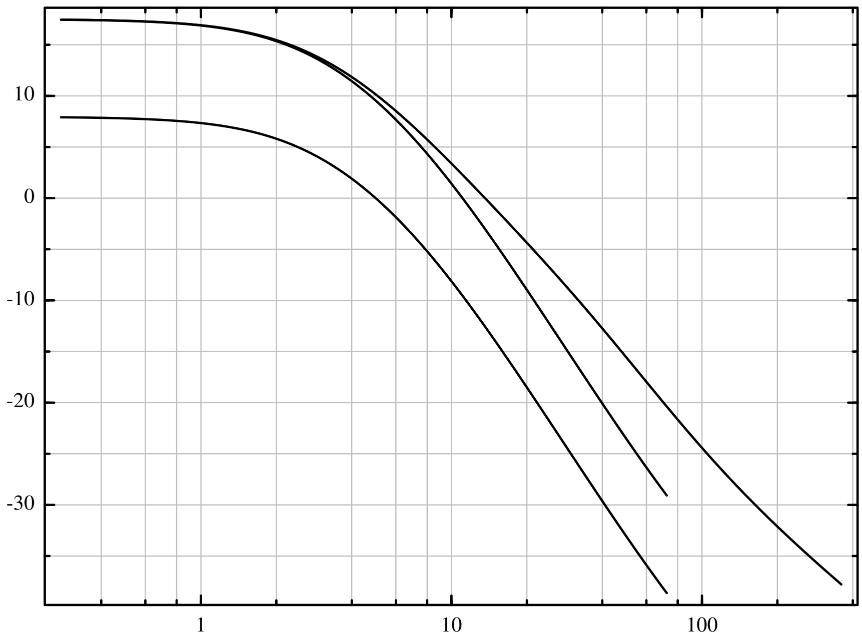

Figure 5: Diagramme de Bode en amplitude (axe vertical [dB], axe horizontal ν en [rad/s]) du système à régler et de deux régulateurs, le premier (courbe du milieu) est une régulateur proportionnel pur $K = 3$ et le second (courbe du haut) est le résultat du régulateur par avance de phase demandé dans le problème.

En égalant le carré des modules du numérateur et du dénominateur

$$(150)^2 + (1.5\,j\nu)^2 = (20 - \nu^2)^2 + 100\,\nu^2$$
$$0 = 400 - 150^2 + (60 - 1.5^2)\,\nu^2 + \nu^4$$
$$0 = \nu^4 + 57.75\nu^2 - 22100$$

ce qui donne une quadratique pour $x = \nu^2$

$$\begin{aligned} x^2 + 57.75x - 22100 &= 0 \\ x &= \frac{-57.75 + \sqrt{(57.75)^2 + 4 \times 22100}}{2} \\ &= \frac{-57.75 + 302.878}{2} = 122.5639 \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\nu = 11.07086 \qquad \text{[rad/s]}$$

En reportant les 11 [rad/s] sur le diagramme de phase de la fonction de transfert en boucle fermée on constate que la marge de phase y serait de

$$180 - 140 = 40 \qquad \text{[deg.]}$$

Il manque 20 [deg.]. Cet appport manquant sera fourni par l'avance de phase. Pour dimensionner celle-ci, on se place sur le diagramme normalisé ($\Omega = 1$) et à la pulsation de $\nu = 1$ [rad/s]. En prenant $m = 2$, on a seulement +18 [deg.]. Par contre, en choisissant $m = 3$, on a +26 [deg.] ce qui donne les 20 [deg.] manquants. En choisissant ensuite $\Omega = 11$ [rad/s] pour décaler le réseau à la pulsation de $\nu = 11$ [rad/s] au lieu de $\nu = 1$ [rad/s], on obtient avec $\gamma = 3$ pour assurer le bon gain statique, le régulateur demandé

$$K = 3 \times 3 \frac{w + 11}{w + 11 \times 3} = 9 \frac{w + 11}{w + 33}$$

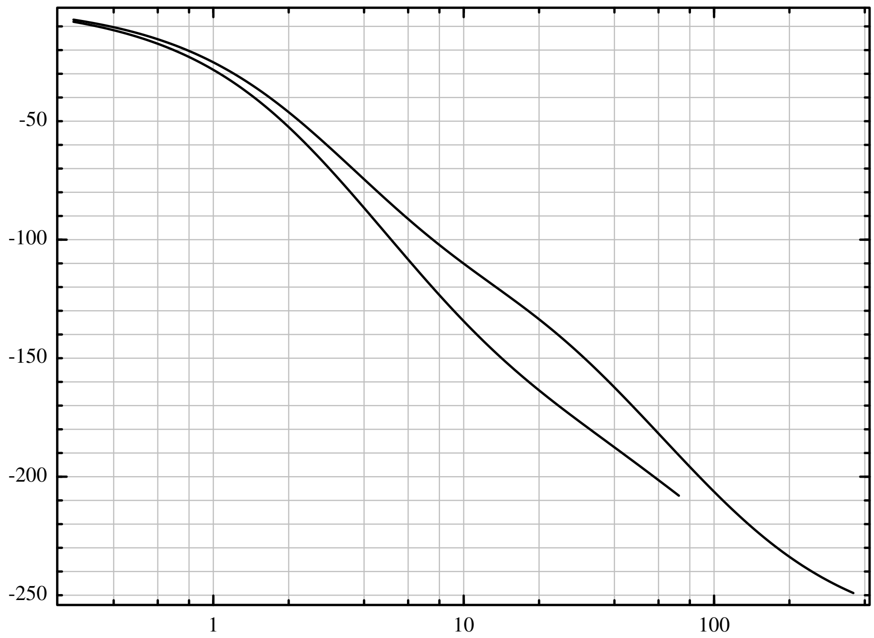

Figure 6: Diagramme de Bode de $K(j\nu)G(j\nu)$ (courbe du haut) comparé à $G(j\nu)$ (courbe du bas), et on constate la bonne marge de phase autour des 11 [rad/s]. En prenant un peu de marge en considérant jusquà 15 [rad/s] (cf. diagramme à la figure 5, courbe supérieure) on a toujours suffisament de marge de phase ($>$ 60 [deg.]). L'échelle verticale est en [deg.] et en horizontal ν est représenté en [rad/s].

3.3 Equivalent 'zoh' du régulateur. En procédant par division, on constate que $w + 33$ entre 1 seule fois dans $w + 11$ et il reste -22, i.e.

$$w + 11 = 1(w + 33) - 22$$

ce qui conduit à la décomposition du régulateur

$$K = 9\left(1 - \frac{22}{w + 33}\right)$$

ce qui donne en appliquant la formule

$$K(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K(w)}{w}\right)$$

en commençant par

$$\begin{aligned}\frac{K(w)}{w} &= \frac{9}{w} - \frac{198}{w(w+33)} \\ &= \frac{9}{w} + \frac{\alpha}{w} + \frac{\beta}{w+33}\end{aligned}$$

on a $\alpha = -\beta = 6$ et donc

$$\frac{K(w)}{w} = \frac{9}{w} - \frac{6}{w} + \frac{6}{w+33}$$

ainsi

$$\begin{aligned}K(z) &= 3 + \frac{z-1}{z}\frac{z}{z - e^{-33\times 0.01}} \\ &= \frac{9\,z - 8.1567}{z - 0.7189}\end{aligned}$$

3.4 Equivalent de Tustin (bilinéaire) du régulateur. On applique la transformée bilinéaire avec $h = 0.01$

$$w = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} = 200\frac{z-1}{z+1}$$

avec

$$K(w) = \frac{9(w+11)}{w+33}$$

on a

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{9 \times 200\frac{z-1}{z+1} + 99}{200\frac{z-1}{z+1} + 33} = \frac{9 \times 200\,(z-1) + 99\,(z+1)}{200\,(z-1) + 33\,(z+1)} \\ &= \frac{1899\,z - 1701}{233\,z - 167} \end{aligned}$$

en rendant monic

$$K(z) = \frac{\frac{1899}{233}\,z - \frac{1701}{233}}{z - \frac{167}{233}} = \frac{8.150214592\,z - 7.3004329}{z - 0.71673}$$

3.5 Comparaison des deux méthodes. Contrairement au premier problème, on trouve peu de différence entre la position du pôle. En effet

$$\frac{167}{233} = 0.71673 \approx e^{-33\times 0.01} = 0.7189$$

Dans ce problème on peut dire que la période d'échantillonnage est correctement choisie pour avoir une bonne approximation du pôle dominant du régulateur par la méthode bilinéaire.

Problème 4 — (15 pts)

Soit la fonction de transfert d'un système discret

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

avec $A(z) = z + 0.2$ et $B(z) = z + 1.2$.

Le polynôme observateur est $A_0(z) = z$ et le modèle à poursuivre est

$$H_m(z) = \frac{z+1.2}{z-0.6}$$

1. Déterminer un régulateur RST qui atteint les spécifications.
2. Donner la matrice de Sylvester associée.
3. Ecrire un code correspondant au régulateur proposé.

Corrigé du problème 4

4.1 Détermination d'un régulateur RST Il s'agit de résoudre dans un premier temps l'équation de Diophante

$$AR + BS = A_m A_0$$

avec $A_0 = z$ le polynôme observateur donné et $A_m = z - 0.6$ le dénominateur de H_m.

La première méthode est d'essayer d'identifier les coefficients directement. Posons $R = z + r$ et $S = s$ un scalaire.

$$\begin{aligned} AR + BS &= (z+0.2)(z+r) + (z+1.2)s = A_0 A_m = z(z-0.6) \\ &= z^2 + (r+0.2)\,z + 0.2\,r + s\,z + 1.2s \\ &= z^2 + (r+s+0.2)\,z + 0.2\,r + 1.2\,s = z^2 - 0.6\,z \end{aligned}$$

ce qui conduit au système d'équation en identifiant les puissance de z successives

$$\begin{aligned} r + s + 0.2 &= 0.6 \\ 0.2\,r + 1.2s &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième équation donne $r = -6s$ que l'on introduit dans la première pour obtenir $-6s + s + 0.2 = -0.6$ ce qui fournit

$$\begin{aligned} r &= -\frac{24}{25} = -0.96 \\ s &= \frac{4}{25} = 0.16 \end{aligned}$$

et ainsi $R(z) = z - \frac{24}{25} = z - 0.96$ et $S = \frac{4}{25} = 0.16$.

En ce qui concerne le polynôme T, on doit avoir $BT = B_m A_0 = z^2 + 1.2z$ et comme $B = z + 1.2$, cela donne $T = z$

4.2 Matrice de Sylvester. En écrivant l'identification des coefficients des puissances de z de

$$AR + BS = A_0 A_m$$

sous forme de vecteurs lignes, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 1 & 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

ou en transposant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 1 \\ 0 & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui fait apparaître la matrice de Sylvester que l'on peut inverser à l'aide de l'aide donnée dans le formulaire. En regardant le formulaire, on constate que la forme en vecteur ligne convient mieux et on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 1 & 1.2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1.2 - 0.2} \begin{pmatrix} 1.2 - 0.2 & -1.2 \times 0.2 & 0.2^2 \\ 0 & 1.2 & -0.2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{25} - \frac{3\times 6}{25} & \frac{1}{25} + \frac{3}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{24}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

et on retrouve la même solution qu'auparavant $R = z - \frac{24}{25}$ et $S = \frac{4}{25}$. Même méthode pour trouver le polynôme T que celle déjà présentée et on a $T = z$.

4.3 Code correspondant au RST. Il ne faut pas implémenter les fonctions de transfert $T(z)/R(z)$ et $S(z)/T(z)$ de manière isolée, mais sous la forme de la relation en transformée en z

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$$

sous la forme

$$\begin{aligned} U(z)R(z) &= T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z) \\ U(z)(z+r) &= z\,Y_c(z) - s\,Y(z) \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation aux différences

$$u(k) + r\,u(k-1) = y_c(k) - s\,y(k-1)$$

ce qui se met sous la forme de pseudo-code

```
r = -24/25; s = 4/25;

uk = -r*uk1 - yck - s*yk1;
uk1 = uk;
yk1 = yk;
```

Répartition des points

exercice	points
1.1	5
1.2	5
1.3	2
1.4	1.5
1.5	1.5
2.1	10
2.2	5
3.1	2
3.2	5
3.3	3
3.4	3
3.5	2
4.1	8
4.2	5
4.3	2

Barème

La formule est fort simple, soit p la note n est donnée par la formule suivante, après arrondi au 1/4 de note.

$$n = \frac{p}{11} + 1$$
