Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques   Eté 2021

Enseignant: Ph. Müllhaupt

Corrigé

total : **70 pts**

	1.	2.	3.	4.	Tot.

Problème 1 — (15 pts)

Déterminer les séquences (suite d'échantillons) des expressions suivantes:

1. Soit la fonction de transfert
$$H(z) = \frac{2z^2 - 2.5z}{z^2 - 2.5z + 1}$$
Déterminer sa réponse impulsionnelle.
2. Soit la fonction de transfert
$$H(z) = \frac{0.5\,z}{z^2 - z + 0.25}$$
Déterminer la réponse indicielle.

Les conditions initiales sont considérées nulles.

Corrigé.

1. solution:

$$\begin{aligned}
\frac{2z^2 - 2.5z}{z^2 - 2.5z + 1} &= \frac{2z^2 - 2.5z}{(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \\
&= \alpha \frac{z}{z-2} + \beta \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \\
2z^2 - 2.5z &= \alpha z \left(z - \frac{1}{2}\right) + \beta z (z-2) \\
&= (\alpha + \beta) z^2 - \left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 2 \\
\alpha + 4\beta &= 5
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 1$. Ce qui donne la transformée en Z inverse (réponse impulsionnelle)

$$\{2^k\} + \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

2. solution: La réponse indicielle est celle obtenue par transformation en Z inverse de la fonction de transfert multipliée par $\frac{z}{z-1}$. Comme on est en présence d'un pôle double, il faut mettre à la fois le pôle simple et le pôle double dans la décomposition en éléments simples.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-1}\right)\frac{0.5z}{z^2-z+0.25} &= \alpha\frac{z}{z-1}+\beta\frac{\frac{1}{2}z}{(z-0.5)^2}+\gamma\frac{z}{z-0.5} \\
\alpha &= 2 \\
\beta &= -1 \\
\gamma &= -2
\end{aligned}$$

ce qui donne après transformée en Z inverse

$$\{2\} - \left\{k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} - 2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

Problème 2 — (15 pts)

Déterminer la transformée en Z, $X(z)$, des signaux suivants:

1. Soit $\{x(kh)\} = \{e^{-6kh}\cos(8kh)\}$ avec la période d'échantillonnage $h = 0.1$ [s].
2. Soit $\{x(kh)\} = \{e^{-j2kh+10} + e^{+j2kh+10}\}$ avec la période d'échantillonnage $h = 0.01$ [s].

Corrigé

1.

$$\begin{aligned}
e^{-6kh}\cos(8kh) &\leftrightarrow \frac{z(z-e^{-6h}\cos(8h))}{z^2-2e^{-6kh}\cos(8h)z+e^{-12h}} \\
&= \frac{z^2-e^{-6\times 0.1}\cos(8\times 0.1)z}{z^2-2e^{-6\times 0.1}\cos(8\times 0.1)z+e^{-1.2}} \\
&= \frac{z^2-0.38236\,z}{z^2-0.76472\,z+0.301194}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
Z(e^{j2kh+10}+e^{j2kh+10}) &= Z(e^{10}(e^{j2kh}+e^{-j2kh})) \\
&= e^{10}\,2\,Z(\cos(2kh)) \\
&= e^{10}\,2\,\frac{z(z-\cos(2h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1} \\
&= 44053\,\frac{z^2-0.9998}{z^2-1.9996z+1}
\end{aligned}$$

Problème 3 — (20 pts)

Soit le système à régler discret de type 0

$$H(z) = \frac{3}{8}\frac{(z+1)(z+\frac{1}{3})}{z(z+\frac{1}{2})}$$

qui est commandé avec une période d'échantillonnage de $h = 0.1$ [s].

1. L'erreur sur de traînée doit être $e(\infty) = 0.02$. Introduire le bon type du régulateur.
2. Trouver un régulateur par retard de phase de telle sorte que la spécification du point précédent soit satisfaite tout en garantissant une marge de phase de 30 degrés. Laisser 10 degrés pour le retard de phase.
3. Ecrire l'équation aux différences pour implémenter le régulateur et donner le pseudo-code ou un code matlab ou un code en C du régulateur (ou le langage de votre choix).

INDICATION: Trouver l'équivalent analogique $H'(w)$ dont on a représenté les intégrateurs éventuels du régulateur à la figure 1. Compléter en indiquant la légende des graphiques et les unités.

Corrigé

1. Constante d'erreur et type.
Il faut un type 1 pour garantir la spécification sur la traînée. En combinant l'intégrateur avec le système à régler initial, on a comme fonction de tranfert

$$H_1(z) = \frac{3}{8}\frac{(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{z(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

Le gain γ est alors donné par

$$\gamma = \lim_{z\to 1}(z-1)H_1(z) = \lim_{z\to 1} H(z) = \frac{3}{8}\frac{2\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{8}\frac{2\times 4/3}{3/2} = \frac{3\times 2\times 4\times 2}{3\times 8\times 3} = \frac{2}{3}$$

Ce qui conduit à la constante de vitesse K_v donnée par l'expression

$$e(\infty) = 0.02 = \frac{h}{K_v} = \frac{0.1}{K_v}$$

$$K_v = \frac{0.1}{0.02} = 5$$

et comme $\gamma = \frac{2}{3}$ cela donne $K_v = \gamma K_p$ autrement dit $5 = \frac{2}{3}K_p$ Le gain manquant est donc de

$$K_p = \frac{15}{2} \equiv 20\log_{10}\frac{15}{2} = 17.5 \qquad \text{[dB]}$$

Il faut ainsi augmenter le gain de 17.5 [dB] par rapport à la boucle ouverte (en basse fréquence).

Ainsi en regardant à la pulsation $\omega = 0.1$ [rad/s] sur le graphique, au lieu de 36.5 [dB], il faudrait avoir 54 [dB].

2. Design du retard de phase.

Il faut tenir compte de 10 degrés pour le retard de phase.

En examinant le graphique de phase, on sélectionne la pulsation de telle sorte à avoir la bonne marge de phase (30 degrés) auquel on ajoute les 10 degrés pour le retard de phase. Il faut donc se placer en 180-40 = 140 degrés. En examinant le graphique, on constate que La pulsation de croisement est $\nu_x = 10$ [rad/s] pour avoir la phase de 140 degrés.

Le module à la pulsation $\nu_x = 10$ [rad/s] vaut -3.5 [dB] selon le graphique. Cependant, pour satisfaire les spécification sur la traînée, il faut ajouter 17.5 [dB]. Ainsi le gain vaut, sans la compensation de la phase, -3.5 + 17.5 = 14 [dB].

Le rôle de retard de phase est donc de réduire le gain de -14 [dB] entre 0 [rad/s] et 10 [rad/s].

Commençons par construire un retard de phase normalisé pour réduire de 14 [dB]. Il part à 0 [dB] et on doit déterminer la pulsation pour avoir -14 [dB] à cette pulsation. On calcule sans peine $x = \frac{14}{20} = 0.7$ et donc $\nu = 10^{0.7} = 5$ [rad/s], ce qui donne la fonction de transfert normalisée

$$\frac{1}{5}\frac{w+5}{w+1}$$

Faisons la mise à l'échelle pour n'avoir que 10 degrés de perte de phase à $\nu_x = 10$ [rad/s]. Il s'agit de déterminer le facteur β dans la formule

$$\frac{1}{5}\frac{\frac{j\nu}{\beta}+5}{\frac{j\nu}{\beta}+1}$$

de telle sorte à avoir au maximum 10 degrés lorsque $\nu = \nu_x = 10$ [rad/s]. Un calcul des arguments donne

$$\begin{aligned} \text{Arg}\left(\frac{j\nu_x}{\beta}+5\right) - \text{Arg}\left(\frac{j\nu_x}{\beta}+1\right) &= 10 \\ \arctan\left(\frac{10}{5\beta}\right) - \arctan\left(\frac{10}{\beta}\right) &= 10 \end{aligned}$$

On procède par tatons en effectuant un tableau

β	$A = \arctan\left(\frac{10}{5\beta}\right)$	$B = \arctan\left(\frac{10}{\beta}\right)$	$A - B$
0.4	78.7	87.7	-9
0.5	75.9	87.1	-11.2
2	45	78.7	-33.7
5	21.8	63	-41
10	11.3	45	-33.7
50	2.29	11.3	-9.019

β grand donne les pulsations petites, et β petit, les pulsations grandes.

On prend donc $\beta = 0.5$ ce qui donne la fonction de transfert

$$\frac{1}{5}\frac{\frac{w}{0.5}+5}{\frac{w}{0.5}+1} = \frac{1}{5}\frac{w+\frac{5}{2}}{w+\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\frac{2w+5}{2w+1}$$

En transformant par la transformation bilinéaire inverse $w = 20\frac{z-1}{z+1}$ (rappel $h = 0.1$ [s])

$$\frac{1}{5}\frac{40\frac{z-1}{z+1}+5}{40\frac{z-1}{z+1}+1} = \frac{1}{5}\frac{40z-40+5z+5}{40z-40+z+1} = \frac{1}{5}\frac{45z-35}{41z-39}$$

ce qui donne le régulateur en transformée en z, une fois l'intégrateur ajouté ainsi que le gain de 15/2

$$K(z) = \frac{15}{2}\frac{1}{z-1}\frac{1}{5}\frac{45z-35}{41z-39}$$

3. Codage du régulateur.

L'entrée du régulateur est l'erreur entre la consigne $y_c(k)$ et la sortie du système à régler $y(k)$. Désignons donc $e(k) = y_c(k) - y(k)$ et on a la sortie du régulateur égal à la grandeur de commande $u(k)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
K(z) = \frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{3}{2}\frac{1}{z-1}\frac{45z-35}{41z-39} \\
2(41z^2 - 39z - 41z + 39)U(z) &= 2(45z-35)E(z) \\
82u(k) - 160u(k-1) + 78u(k-2) &= 90e(k-1) - 70e(k-2) \\
u(k) &= \frac{1}{82}\left(160u(k-1) - 78u(k-2) + 90e(k-1) - 70e(k-2)\right)
\end{aligned}$$

Problème 4 — (20 pts)

Soit la fonction de transfert d'un système discret

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{1}$$

avec $A(z) = z^2 + 3z + 2$ et $B(z) = z\left(z + \frac{1}{2}\right)$ On désire un polynôme au dénominateur du système en boucle fermée égal à

$$A_0\,A_m = z\left(z + \frac{1}{3}\right)$$

avec $A_0 = z$, le polynôme observateur

1. Montrer avec la division polynomiale (en divisant A par B) qu'un choix possible du polynôme R du RST tel que $AR + BS = A_0A_m$ est

   $$R = -\frac{5}{3}z^3 - \frac{1}{18}z^2 + \frac{1}{6}z$$

   Que vaut S dans ce cas?

2. Déterminer une solution minimale pour R et S en introduisant un polynôme Q convenable.

Corrigé.

1. Calcul du polynôme S et confirmation du calcul du polynôme R, par division polynomiale de A par B.

Avec

$$A = z^2 + 3z + 2 \qquad\qquad B = z^2 + \frac{1}{2}z$$

la première division donne le dividende 1 de telle sorte que $A = B + \frac{5}{2}z + 2$. Continuons et divisons B par le reste $\frac{5}{2}z + 2$:

$$\begin{array}{lll|l}
z^2 & +\frac{1}{2}z & & \frac{5}{2}z + 2 \\
\hline
-(z^2 & +\frac{4}{5}z) & & \frac{2}{5}z - \frac{3}{25} \\
 & -\frac{3}{10}z & & \\
 & -(-\frac{3}{10}z & -\frac{6}{25}) & \\
 & & \frac{6}{25} &
\end{array}$$

En reconstruisant, en utilisant la première division qui donne $\frac{5}{2}z+2 = A-B$, on obtient les identités (rappel $B = z^2+\frac{1}{2}z$):

$$\begin{aligned}
\frac{6}{25} &= \left(z^2+\frac{1}{2}z\right)-\left(\frac{5}{2}+2\right)\left(\frac{2}{5}z-\frac{3}{25}\right)\\
&= B-(A-B)\left(\frac{2}{5}z-\frac{3}{25}\right)\\
&= B+B\left(\frac{2}{5}z-\frac{3}{25}\right)-A\left(\frac{2}{5}z-\frac{3}{25}\right)\\
&= \left(\frac{22}{25}+\frac{2}{5}z\right)B-A\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{25}\right)\\
1 &= \frac{25}{6}\left(\frac{22}{25}+\frac{2}{5}z\right)B-A\frac{25}{6}\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{25}\right)\\
&= \left(\frac{11}{3}+\frac{5}{3}z\right)B+A\left(-\frac{5}{3}z+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

En multipliant la dernière identité par $A_0A_m = z^2+\frac{1}{3}z$, on trouve la solution non minimale R et S suivante:

$$\begin{aligned}
A_0A_m &= \left(z^2+\frac{1}{3}z\right)\left(\frac{5}{3}z+\frac{11}{3}\right)B+\left(-\frac{5}{3}z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2+\frac{1}{3}\right)A\\
&= \left(\frac{5}{3}z^3+\frac{11}{3}z^2+\frac{5}{9}z^2+\frac{11}{9}z\right)B+\left(-\frac{5}{3}z^3-\frac{5}{9}z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z\right)A\\
&= \left(\frac{5}{3}z^3+\frac{38}{9}z^2+\frac{11}{9}z\right)B+\left(-\frac{5}{3}z^3-\frac{1}{18}z^2+\frac{1}{6}z\right)A\\
S &= \frac{5}{3}z^3+\frac{38}{9}z^2+\frac{11}{9}z\\
R &= -\frac{5}{3}z^3-\frac{1}{18}z^2+\frac{1}{6}z
\end{aligned}$$

2. Solution minimale, R_1 et S_1.
On introduit le polynôme Q qui paramétrise toutes les solutions et en particulier la minimale qui s'exprime à partir de celle obtenue au point 1.

$$S_1 = S-Q\,A$$
$$R_1 = R+Q\,B$$

Pour obtenir Q, c'est le dividende du quotient de S par A:

$$\begin{array}{cccc|c}
+\frac{5}{3}z^3 & +\frac{38}{9}z^2 & +\frac{11}{9}z & & z^2+3z+2\\
\hline
-\frac{5}{3}z^3 & -5z^2 & -\frac{10}{3}z & & +\frac{5}{3}z-\frac{7}{9}\\
 & -\frac{7}{9}z^2 & -\frac{19}{9}z & & \\
 & +\frac{7}{9}z^2 & +\frac{7}{3}z & +\frac{14}{9} & \\
 & & \frac{2}{9}z & +\frac{14}{9} &
\end{array}$$

Ainsi $Q = \frac{5}{3}z-\frac{7}{9}$ et

$$S_1 = \frac{2}{9}z+\frac{14}{9}$$

Pour obtenir R_1 on utilise Q et B

$$R_1 = R + Q\,B = -\frac{2}{9}z$$

R_1 et S_1 donnent la solution minimale. Une vérification s'impose

$$\begin{aligned}
AR_1 + BS_1 &= (z^2+3z+2)\left(-\frac{2}{9}z\right) + \left(z^2+\frac{1}{2}z\right)\left(\frac{2}{9}z+\frac{14}{9}\right) \\
&= -\frac{2}{9}z^3 - \frac{2}{3}z^2 - \frac{4}{9}z \qquad + \qquad \frac{2}{9}z^3 + \frac{1}{9}z^2 + \frac{14}{9}z^2 + \frac{7}{9}z \\
&= \left(-\frac{2}{3}+\frac{15}{9}\right)z^2 + \left(-\frac{4}{9}+\frac{7}{9}\right)z \\
&= \frac{-6+15}{9}z^2 + \frac{3}{9}z \\
&= z^2 + \frac{1}{3}z = A_0A_m
\end{aligned}$$

Linéarité

$\mathcal{Z}(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}) = \mathcal{Z}(\{w_1(kh)\}) + \mathcal{Z}(\{w_2(kh)\})$
$\mathcal{Z}(a\{w(kh)\}) = a\mathcal{Z}(w(kh)) \qquad a \in \mathbb{C}$

Décalages temporels

$\mathcal{Z}(w(kh - dh)) = z^{-d}W(z) \qquad d \in \mathbb{N}$
$\mathcal{Z}(w(kh + dh)) = z^{d}W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} z^{d-i} \qquad d \in \mathbb{N}$

Dérivation complexe

$\mathcal{Z}(kh\, w(kh)) = -hz \frac{dW}{dz}(z)$

Changement d'échelle complexe

$\mathcal{Z}(a^{kh}w(kh)) = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \qquad a \in \mathbb{C}\ a \neq 0$

Valeurs initiale et finale

$w(0) = \lim_{z\to\infty} W(z)$
$\lim_{k\to\infty} w(kh) = \lim_{z\to 1}(z-1)W(z) \qquad |z_i| < 1$

Produit de convolution

$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} u(lh)g(kh - lh)\right) = G(z)U(z)$

Accumulation

$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} w(lh)\right) = \frac{z}{z-1}W(z)$

Différence

$\mathcal{Z}(w(kh) - w(kh - h)) = \frac{z-1}{z}W(z)$

Table 1: Tableau de la grammaire de la transformée en $\mathcal{Z}$

N^o	$w(t)$	$\mathcal{L}(w(t))$	$w(kh)$	$\mathcal{Z}(w(kh))$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta(kh)$	1
3	1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{h^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}$	$\frac{1}{s^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akh}	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$
8	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kh\,e^{-akh}$	$\frac{he^{-ah}z}{(z-e^{-ah})^2}$
9	$\frac{1}{2}t^2\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2e^{-akh}$	$\frac{h^2e^{-ah}z(z-e^{-ah}+2e^{-ah})}{2(z-e^{-ah})^3}$
10	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}e^{-akh}$	$\frac{(-1)^{(l-1)!}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
11	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kh)$	$\frac{\sin(\omega h)z}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
12	$\cos(\omega h)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
13	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\sin(\omega kh)$	$\frac{e^{-ah}\sin(\omega h)z}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$

Table 2: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

14	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-e^{-ah}\cos(\omega h))}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$
15			a^k	$\frac{z}{z-a}$
16			$k\,a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
17			$\frac{1}{2}k\,(k-1)\,a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
18			$\frac{1}{(l-1)!}\left(\prod_{i=0}^{l-2}(k-i)\right)(a^{k-l+1})$	$\frac{z}{(z-a)^l}$

Table 3: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-a-b^2+bc}\begin{pmatrix} -1 & b & -b^2 \\ 1 & -b & bc-a \\ c-b & -a & ab \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \\ c & d & e \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{be-ae+c-d}\begin{pmatrix} be-d & -e & 1 \\ c-ae & e & -1 \\ ad-bc & c-d & b-a \end{pmatrix}$$

Table 4: Inverses de matrices particulières

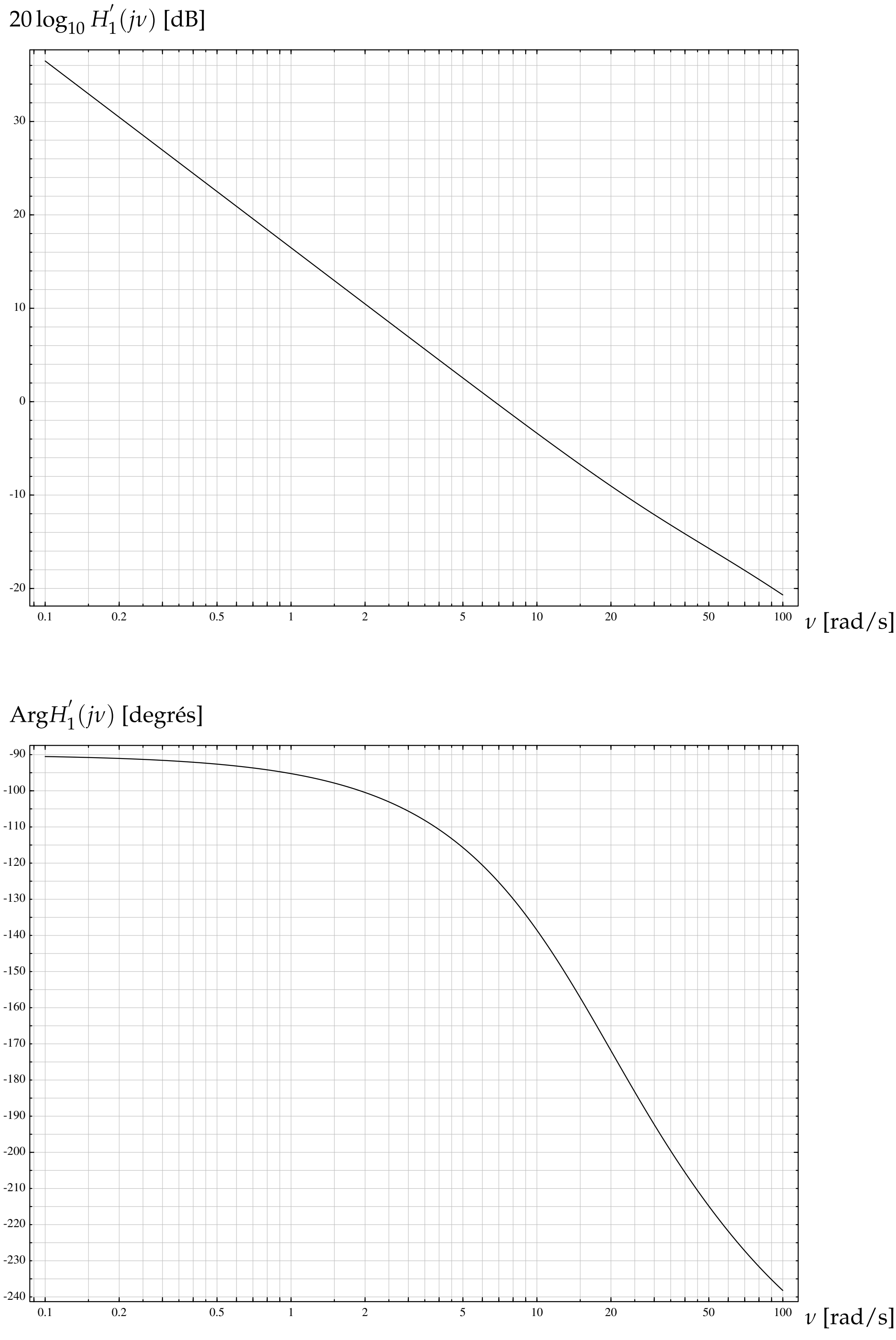

Figure 1: Reprśentation du diagramme de Bode en module et en phase de l'équivalent de Tustin du système à régler avec l'ajout éventuel d'intégrateurs pour avoir le bon type pour assurer une traînée selon la spécification du problème. Comme demandé, on a jouté les légendes aux graphiques.