Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques   Eté 2020

Enseignant: Ph. Müllhaupt

Corrigé

total : **70 pts**

	1.	2.	3.	4.	Tot.

Problème 1 — (15 pts)

Déterminer les séquences (suite d'échantillons) des expressions suivantes:
(Find the samples associated with the following expressions:)

1. Soit la fonction de transfert
$$H(z) = \frac{z^2 - 0.45z}{z^2 - 0.9z + 0.81}$$
Déterminer sa réponse impulsionnelle. (*Given the transfer function, find the impulse response).*

2. Soit la fonction de transfert
$$H(z) = \frac{z}{z^2 - 0.6z + 0.08}$$
Déterminer sa réponse indicielle. (*Given the transfer function, find the step response.)*

Les conditions initiales sont considérées nulles. *(All initial conditions are assumed to be zero.)*

---

1. L'expression est de la forme
$$\frac{z^2 - e^{-ah}\cos(\omega h) z}{z^2 - 2e^{-ah}\cos(\omega h)\, z + e^{-2ah}} \leftrightarrow e^{-akh}\cos(\omega\, k\, h)$$
avec
$$\frac{z^2 - 0.9 \cdot 0.5 \cdot z}{z^2 - 2 \cdot 0.9 \cdot 0.5 + (0.9)^2} = \frac{z^2 - 0.45z}{z^2 - 0.9z + 0.81}$$
ce qui donne $\cos(\omega\, h) = 0.5$ et donc $\omega h = \frac{\pi}{3}$. D'autre part, $e^{-ah} = 0.9$, ainsi
$$\left\{0.9^k \cos\left(\frac{\pi}{3}\, k\right)\right\} = \left\{0.9^k \cos(1.047197551 \times k)\right\}$$

2. Il faut calculer les racines du polynôme du dénominateur (les pôles). On a
$$z^2 - 0.6z + 0.08 = (z - 0.2)\,(z - 0.4)$$
et donc les pôles $z = 0.2$ et $z = 0.4$. Cela conduit aux éléments simples $\frac{z}{z-0.2}$ et $\frac{z}{z-0.4}$. La réponse indicielle est la réponse à un saut indicielle. Il faut donc déterminer la transformée en Z inverse de
$$\begin{aligned} \frac{z}{z-1}\,\frac{z}{z^2 - 0.6z + 0.08} &= \alpha\,\frac{z}{z-0.2} + \beta\,\frac{z}{z-0.4} + \gamma\,\frac{z}{z-1} \\ \alpha &= \left.\frac{z-0.2}{z}\,\frac{z}{(z-0.2)(z-0.4)}\,\frac{z}{z-1}\right|_{z\to 0.2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{z}{(z-0.4)(z-1)}\right|_{z=0.2} = \frac{0.2}{(0.2-0.4)(0.2-1)} = 1.25 = \frac{5}{4} \\
\beta &= \left.\frac{z}{(z-0.2)(z-1)}\right|_{z=0.4} = \frac{0.4}{(0.4-0.2)(0.4-1)} = -3.3333 = -\frac{10}{3} \\
\gamma &= \left.\frac{z}{(z-0.2)(z-0.4)}\right|_{z=1} = \frac{1}{(1-0.2)(1-0.4)} = 2.08333 = \frac{25}{12}
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$\frac{25}{12}\frac{z}{z-1} - \frac{10}{3}\frac{z}{z-0.4} + \frac{5}{4}\frac{z}{z-0.2}$$

et donc après transformation en $\mathcal{Z}$ inverse

$$\frac{25}{12}\{\mathbf{1}\} - \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\left\{\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{k}}\right\} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\left\{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{k}}\right\}$$

et numériquement

$$2.083333\,\{\mathbf{1}\} - \mathbf{3.33333}\,\{\mathbf{0.4^k}\} + \mathbf{1.25}\{\mathbf{0.2^k}\}$$

Problème 2 — (15 pts)

Déterminer la transformée en Z des signaux suivants: *(Find the Z transform of the following expressions:)*

1. Soit $\{x(kh)\} = \{e^{-3kh}\sin(8kh+5)\}$ avec la période d'échantillonnage *(sampling time)* $h = 0.1$ [s].
2. Soit $\{x(kh)\} = \{kh\, e^{-8kh} + e^{-8kh}\}$ avec la période d'échantillonnage *(sampling time)* $h = 0.01$ [s].

Corrigé

1. On peut utiliser la formule pour $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ et donc on cherche la tranformée en Z de

$$e^{-3kh}\sin(8kh+5) = e^{-3kh}\left[\sin(8kh)\,\cos(5) + \cos(8kh)\,\sin(5)\right]$$

ce qui donne en se référant aux entrées 13 et 14 du formulaire

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos(5)e^{-3h}\sin(8h)\,z + \sin(5)\,z\,(z - e^{-3h}\,\cos(8h))}{z^2 - 2e^{-3h}\,\cos(8h) + e^{-6h}} \\
&= \frac{\sin(5)\,z^2 + \left(\cos(5)e^{-3h}\sin(8h) - \sin(5)e^{-3h}\cos(8h)\right)z}{z^2 - 2e^{-3h}\cos(8h)z + e^{-6h}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Avec $h = 0.1$, cela donne numériquement (attention à ce que la calculatrice soit en mode radians):

$$\frac{-0.9589243\,z^2 + 0.6456792\,z}{z^2 - 1.032266\,z + 0.5488116}$$

Une autre méthode est celle par le calcul complexe en remarquant

$$\sin(8kh+5) = \frac{e^{j(8kh+5)} - e^{-j(8kh+5)}}{2j}$$

et ainsi on a

$$e^{-3k5}\,\sin(8kh+5) = -\frac{1}{2}e^{j5}\,j\,e^{(-3+8j)kh} + \frac{1}{2}\,e^{-j5}\,j\,e^{(-3-8j)kh}$$

en en utilisant la transformée en $\mathcal{Z}$ pour $a \in \mathbb{C}$

$$e^{-akh} \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-ah}}$$

cela conduit à successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left(e^{-3kh}\,\sin(8kh+5)\right) &= -\frac{1}{2}e^{j5}\,j\,\frac{z}{z - e^{(-3+8j)h}} + \frac{1}{2}\,e^{-j5}\,j\,\frac{z}{z - e^{-(+3-8j)h}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}e^{j5}\,j\,z\left(z - e^{-(3+8j)h}\right) + \frac{1}{2}e^{-j5}\,j\,z\left(z - e^{(-3+8j)h}\right)}{z^2 - \left(e^{(-3+8j)h} + e^{-(3+8j)h}\right)z + e^{-6h}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\,j\,e^{-(3+8j)h}z - \frac{1}{2}e^{-j5}\,j\,e^{(-3+8j)h}z + \frac{1}{2}jz + \frac{1}{2}e^{-j5}z}{z^2 - 2e^{-3h}\,\frac{e^{j8h}+e^{j8h}}{2} + e^{-6h}} \\
&= \frac{\frac{e^{j5}-e^{-j5}}{2j}z^2 + e^{-3h}\left(e^{j5}e^{-j8h}\,j - e^{-j5}e^{j8h}\,j\right)z}{z^2 - 2e^{-3h}\cos(8h) + e^{-6h}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

On remarque d'une part $(e^{j5} - e^{-j5})/(2j) = \sin(5)$ et d'autre part que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(e^{j5}e^{-j8h}\,j - e^{-j5}e^{j8h}\,j\right) &= -\frac{2e^{j5}e^{-j8h}}{4j} + \frac{2e^{-j5}e^{j8h}}{4j} \qquad (3) \\
&= \left(\frac{e^{j5}+e^{j5}}{2}\right)\left(\frac{e^{j8h}-e^{j8h}}{2j}\right) - \left(\frac{e^{j5}-e^{-j5}}{2j}\right)\left(\frac{e^{j8h}+e^{-j8h}}{2}\right) \qquad (4) \\
&= \cos(5)\sin(8h) - \sin(5)\cos(8h)
\end{aligned}$$

En effet, avec $a = e^{j5}$, $b = e^{-j5}$, $c = e^{j8h}$ et $d = e^{-j8h}$, on vérifie sans peine que

$$-2ad + 2bc = (a+b)(c-d) - (a-b)(c+d) = ac - ad + bc - bd - ac - ad + bc + bd = -2ad + 2bc$$

ce qui confirme que (3) est identique à (4) et donc que (2) correspond bien à (1). En fait, cette deuxième méthode démontre en quelque sorte la validité du formulaire, car elle n'utilise que la progression géométrique simple avec une raison complexe. Elle n'utilise pas le formulaire.

2.

$$\begin{aligned}
Z\left(kh\,e^{-8kh} + e^{-8kh}\right) &= \frac{he^{-8h}z}{(z - e^{-8h})^2} + \frac{z}{z - e^{-8h}} \\
&= \frac{h\,e^{-8h}\,z + z\,(z - e^{-8h})}{(z - e^{-8h})^2} \\
&= \frac{z^2 + (h-1)e^{-8h}z}{z^2 - 2e^{-8h}z + e^{-16h}} \\
&= \frac{z^2 - 0.99\,e^{-0.08}z}{z^2 - 2e^{-0.08}z + e^{-0.16}} = \frac{z^2 - 0.99\,e^{-0.08}z}{(z - e^{-0.08})^2} \\
&= \frac{z^2 - 0.9138852\,z}{z^2 - 1.8462327\,z + 0.8521438} = \frac{z^2 - 0.9138852\,z}{(z - 0.9231163)^2}
\end{aligned}$$

Problème 3 — (20 pts)

On considére la commande en boucle fermée d'un entraînement électrique en position dont la fonction de transfert analogique est

(We consider a DC drive in closed loop where the position is controlled. It has the following analog transfer function)

$$G(s) = \frac{4}{s(s+1)}$$

1. Discrétiser le système analogique avec une période d'échantillonnage de $h = 0.1$ [s] à l'aide du maintien d'ordre zéro et donner sa fonction de transfert discrète $H(z)$. *(Discretize the analog transfer function with a sampling time of $h = 0.1$ [s] using a zero-order hold. Give the discrete-time transfer function $H(z)$.)*

2. Calculer l'équivalent analogique (par la méthode de Tustin) $H'(w)$ du système discret $H(z)$. *(Compute the analog equivalent, using Tustin's method, $H'(w)$ of the discrete-time system $H(z)$).*

3. Déterminer à l'aide de la méthode fréquentielle (en utilisant l'équivalent de Tustin $H'(w)$) un régulateur proportionnel qui donne une pulsation de croisement $\nu_x = 0.03$ [rad/s]. *(Find using the frequency method – using the Tustin equivalent $H'(w)$ – a proportional controller ensuring a cross-over frequency of $\nu_x = 0.03$ [rad/s].)*

4. Améliorer le résultat en utilisant un retard de phase de telle sorte que $\nu_x = 0.22$ [rad/s] sans affecter le comportement basse fréquence en boucle ouverte et en assurant une marge de phase de 65 degrés environ. Tenir compte de 10 degrés supplémentaire pour le retard de phase du régulateur.

   (Improve the result by applying a phase-lag controller in such a way that $\nu_x = 0.22$ [rad/s] without affecting the low-frequency behavior in open loop while guaranteeing a phase margin of roughly 65 degrees. Take into account an extra 10 degrees for the phase lag compensator.)

   Indication: On a représenté en figure 1 les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ ainsi que celle obtenue au point 3, $H'(w)$. On a également représenté, sans les légendes et sans les valeurs numériques, l'équivalent analogique du régulateur $K'(w)$ demandé à la figure 2.

   (Hint: In Figure 1, the Bode plots of the open-loop transfer function $G(s)$ are given together with the ones obtained at point 3, $H'(w)$. There are also the plots of the required analog equivalent of the controller $K'(w)$ in figure 2, without any indication either on the axes or on the numerical values.)

5. Déterminer l'équation aux différences qui réalise le régulateur obtenu au point précédent. Utiliser la transformation bilinéaire de Tustin. (*Find the discrete-time equations that realize the controller obtained at the previous step. In that respect, use the bilinear transform of Tustin.)*

Corrigé

1. Discrétisation par la méthode d'ordre zéro:

$$
\begin{aligned}
\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right] &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s+1)}\right)\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2}-\frac{4}{s}+\frac{4}{s+1}\right)\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\left(\frac{4hz}{(z-1)^2}-4\frac{z}{z-1}+4\frac{z}{z-e^{-h}}\right) \\
&= \frac{4h}{z-1}-4+\frac{4(z-1)}{z-e^{-h}} \\
&= \frac{4h(z-e^{-h})-4(z^2-(1+e^{-h})z+e^{-h})+4(z^2-2z+1)}{z^2-(1+e^{-h})z+e^{-h}} \\
&= \frac{(4h+4(1+e^{-h})-8)z-4he^{-h}-4e^{-h}+4}{z^2-(1+e^{-h})z+e^{-h}} \\
&= \frac{0.019349672\,z+0.018715361}{z^2-1.904837418\,z+0.904837418}
\end{aligned}
$$

2. Equivalent $H'(w)$:

$$
\begin{aligned}
z &= e^{sh} = \frac{e^{s\frac{h}{2}}}{e^{-s\frac{h}{2}}} \approx \frac{1+\frac{sh}{2}}{1-\frac{sh}{2}} \\
z &= \frac{2+wh}{2-wh}
\end{aligned}
$$

En posant la fonction de transfert comme $\frac{az+b}{z^2+cz+d}$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{az+d}{z^2+cz+d} &= \frac{a\left(\frac{2+wh}{2-wh}\right)+b}{\left(\frac{2+wh}{2-wh}\right)^2+c\left(\frac{2+wh}{2-wh}\right)+w} \\
&= \frac{a(2+wh)(2-wh)+b(2-wh)^2}{(2+wh)^2+c(2+wh)(2-wh)+d(2-wh)^2} \\
&= \frac{a(4-w^2h^2)+b(4-4wh+w^2h^2)}{4+4wh+w^2h^2+c(4-w^2h^2)+d(4-4wh+w^2h^2)} \\
&= \frac{(b-a)h^2w^2-4hbw+4(a+2)}{(1-c+d)h^2w^2+4(1-d)hw+4(1+c+d)}
\end{aligned}
$$

En rendant monique

$$
\frac{\frac{b-a}{1-c+d}w^2-\frac{4b}{(1-c+d)h}w+\frac{4(a+b)}{(1-c+d)h^2}}{w^2+\frac{4(1-d)h}{(1-c+d)h^2}w+\frac{4(1+c+d)}{(1-c+d)h^2}}
$$

On a

$$1+c+d=0$$

et

$$1-c+d=3.809674836$$

et on obtient numériquement successivement

$$
\begin{aligned}
\frac{b-a}{1-c+d} &= -0.000166500 \\
-\frac{4b}{(1-c+d)h} &= -0.19650350 \\
\frac{4(a+b)}{(1-c+d)h^2} &= 3.996670019 \\
\frac{4(1-d)h}{(1-c+d)h^2} &= 0.999167500
\end{aligned}
$$

ce qui conduit finalement au résultat

$$
H^{'}(w) = \frac{-0.0001665\,w^2-0.1965035\,w+3.99667}{w^2+0.9991675\,w}
$$

3. Régulateur proportionnel (gain) pour atteindre $\nu_x = 0.03$ [rad/s]:

Il faut atteindre un gain de 1 (c.-à-d. 0 [dB]) pour la pulsation $\nu_x = 0.03$ [rad/s]. On se concentre ainsi que sur le module dans le diagramme de bode et on translate la courbe verticalment afin que celle-ci croise 0 [dB] à la pulsation $\nu_x = 0.03$ [rad/s]. En examinant la figure on remarque qu'il faut un gain d'approximativement -42 [dB], autrement dit

$$K_p = 10^{-42/20} = 0.007943282$$

On obtient cette valeur en constatant que la distance en [cm] entre 0.001 (dont le log vaut -3) et 10 (dont le log vaut 1) sur les abscisses vaut 8.6 [cm]. La distance logarithmique entre 1 et 0.001 est donc de 4. Le facteur en centimètres vaut donc 8.6/4 [cm/log]. En calculant $\log(0.03) = -1.52$ la distance logarithmique entre -3 et -1.52 vaut 1.48. On reporte donc la distance

$$\frac{8.6}{4} \times 1.48 = 3.18[cm]$$

à partir de l'abscisse en 0.001 et on trouve la position de $\nu_x = 0.03$. En remontant à la verticale on détermine la valeur du module qui vaut approximativement 42 [dB]. Confirmons le gain K_p par le calcul. Calculons $H'(j0.03)$:

$$\begin{aligned} H^{'}(j0.03) &= \frac{0.0001665 \times (0.03)^2 - 0.1965035\, j\, 0.03 + 3.99667}{-0.03^2 + 0.9991675 \times 0.03\, j} \\ |H^{'}(j0.03)| &= \frac{\sqrt{(0.1965035 \times 0.03)^2 + (3.99667 + 0.000165 \times (0.03)^2)^2}}{\sqrt{(0.9991675 \times 0.03)^2 + 0.03^4}} = \frac{3.996674496}{0.029988533} = 133.2734238 \end{aligned}$$

Le régulateur proportionnel est donc l'inverse de cette valeur

$$K_p = \frac{1}{133.2734238} \approx 0.0075$$

Graphiquement, on constate également que la fonction de transfert analogique est confondue avec $H'(j\nu)$ pour ν autour de $\nu_x = 0.03$. On peut donc simplifier un peu les calculs:

$$|G(j0.03)| \approx |H^{'}(j0.03)| = \left| \frac{4}{j \times 0.03 \times (j \times 0.03 + 1)} \right| = \frac{4}{\sqrt{(0.03)^4 + (0.03)^2)}} = 133.27233738$$

Le gain vaut

$$K_p = \frac{1}{133.27233738} \approx 0.0075$$

ainsi sur le graphique c'est plus proche de 42.5 [dB] que de 42 [dB].

4. Design du retard de phase:
Ce dernier a pour expression

$$K^{'}(w) = \frac{w + \lambda\, b}{\lambda\, (w + b)}$$

avec b qui détermine la pulsation et λ le rapport entre le gain basse fréquence et haute fréquence. On commence par examiner le gain manquant (sur la figure par exemple) à $\nu_x = 0.22$. On voit que $|K^{'}(j\, 0.22)| \approx 25$ [dB]. Ainsi on détermine λ pour avoir -25 [dB]. On pose pour commencer $b = 1$ (le cas normalisé) et on détermine λ. L'expression

$$\frac{j\nu + \lambda}{\lambda(j\nu + 1)}$$

a deux valeurs asymptotiques, une en $\nu = 0$ qui prend la valeur 1 et une autre en $\nu \to +\infty$ qui prend la valeur $\frac{1}{\lambda}$ et donc atténue d'un facteur λ. Ainsi

$$\begin{aligned} 20 \log \left(\frac{1}{\lambda} \right) &= -25 = -20 \log(\lambda) \\ \lambda &= 10^{\frac{25}{20}} = 17.78 \end{aligned}$$

On cherche alors la pulsation pour laquelle le réseau normalisé déphase de - 10 degrés. Ceci se produit pour $\nu = 100$ [rad/s]. En effet (calculatrice en mode degrés)

$$\begin{aligned} \arg \left(\frac{j100 + 17.78}{17.78(j100 + 1)} \right) &= \arg(j100 + 17.78) - \arg(j100 + 1) = \\ \arctan \left(\frac{100}{17.78} \right) &- 90 = -10.08183221[\text{deg}] \end{aligned}$$

Il reste à adapter le cas normalisé au cas demandé. Il s'agit d'utiliser le facteur b pour translater la pulsation obtenue de 100 [rad/s] vers 0.22 [rad/s]. Ainsi

$$b = \frac{0.22}{100} = 0.0022$$

ce qui donne le régulateur par retard de phase demandé

$$\begin{aligned} K'(w) &= \frac{w + \lambda\, b}{\lambda\,(w+b)} = \frac{w + 17.78 \times 0.0022}{17.78 \times (w + 0.0022)} \\ &= \frac{w + 0.039116}{17.78 \times w + 0.039116} \end{aligned}$$

5. Réalisation du retard de phase par une équation aux différences:
Il faut effectuer la transformation bilinéaire inverse, autrement dit poser

$$w = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} = 20\frac{z-1}{z+1}$$

dans l'expression du régulateur $K'(w)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{20\frac{z-1}{z+1} + 0.039116}{20 \times 17.78 \times \frac{z-1}{z+1} + 0.039116} \\ &= \frac{20 \times (z-1) + 0.039116 \times (z+1)}{355.6 \times (z-1) + 0.039116 \times (z-1)} \\ &= \frac{20.039116 \times z - 19.960884}{355.639116 \times z - 355.560884} \\ &= \frac{\frac{20.039116}{355.639116} \times z - \frac{19.960884}{355.639116}}{z - \frac{355.560884}{355.639116}} \\ &= \frac{0.056346771 \times z - 0.056126796}{z - 0.999780024} \end{aligned}$$

REMARQUE: Dans tous ces calculs, il est important d'utiliser toute la précision de la calculatrice. C'est une particularité des systèmes discrets d'être très sensible aux erreurs d'arrondi. On ne peut pas utiliser les règles de l'ingénieur des chiffres significatifs dans le domaine des z. C'est ok pour les grandeurs analogiques en s et en w toutefois. Lors de la conversion, il faut utiliser pleinement les capacités numériques de la calculatrice. Un petit truc est de vérifier la correspondance des pôles après calcul. On doit toujours avoir quelque chose de proche de $z_p = e^{s_p h}$ avec z_p le pôle discret et s_p le pôle analogique. Bien que nous n'ayons pas utiliser la fonction exponentielle dans le calcul (que son approximation par la transformation bilinéaire) vérifions la correspondance avec le pôle analogique $s_p \approx w_p = -17.78/0.039116 = -0.0022$ et le pôle discret correspondant

$$z_p = e^{s_p h} = e^{-0.0022 \times 0.1} = 0.999780024$$

ce qui confirme que les calculs sont corrects en ce qui concerne le pôle.

Sachant que $K(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ avec $u(k)$ la sortie du régulateur qui est la grandeur de commande du système et $e(k) = y_c(k) - y(k)$ qui est l'erreur entre la consigne et la grandeur mesurée, on arrive à l'équation aux différences

$$u(k) = 0.999780024 \times u(k-1) + 0.056346771 \times e(k) - 0.056126796 \times e(k-1)$$

Problème 4 — (20 pts)

Soit la fonction de transfert d'un système discret

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{5}$$

avec $A(z) = z^2 + 0.9z + 0.81$ et $B(z) = z - 0.5$

1. Est-ce que le système est BIBO stable *(is the system BIBO stable)* ?

2. Calculer un régulateur RST qui réalise un comportement en boucle fermée donnée par le modèle à poursuivre suivant: *(Compute a RST controller that achieves a closed-loop behavior by matching the following model:)*

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{z^2 - 0.7z + 0.01}{z^2 - 1.2z + 0.36} \tag{6}$$

Utiliser, si besoin est, le lemme d'inversion matriciel donné dans le formulaire. *(If need be, use the inversion formula given in the table below.)* Prendre comme polynôme observateur $A_0 = z - 0.5$. *(Choose $A_0 = z - 0.5$ as observer polynomial.)*

3. Calculer la réponse impulsionnelle en boucle fermée (d'asservissement) du système obtenu. *(Compute the tracking impulse response in closed-loop of the resulting system.)*

Corrigé

1. Les deux pôles de la fonction de tranfert sont à l'intérieur du cercle unité car $z^2 + 0.9z + 0.81 = (z + 0.9)^2$ et comme $|-0.9| = 0.9 < 1$, le système est BIBO stable.

2. Il faut déterminer R,S et T de telle sorte que

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{B_m\, A_0}{A_m\, A_0}$$

Il faut résoudre le l'équation de Diohante $AR + BS = A_m A_0$ avec

$$\begin{aligned} A &= z^2 + 0.9\, z + 0.81 \\ B &= z - 0.5 \\ A_m &= z^2 - 1.2z + 0.36 \\ A_0 &= z - 0.5 \end{aligned}$$

De là, on déduit

$$C = A_m\, A_0 = z^3 - 1.7z^2 + 0.96\, z - 0.18$$

Résolution matricielle par l'inversion de la matrice de Sylvester modifiée: On utilise le lemme d'inversion matriciel (le deuxième) avec $a = 0.9$, $b = -0.5$, $c = 0.81$, $d = 0$, $e = -0.5$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.9 & -0.5 & 1 \\ 0.81 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -1.7 \\ 0.96 \\ -0.18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.81 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \frac{1}{0.5^2 + 0.9 \times 0.5 + 0.81} \begin{bmatrix} 0.5^2 & 0.5 & 1 \\ 0.81 + 0.45 & -0.5 & -1 \\ 0.405 & 0.81 & -1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.6 \\ 0.15 \\ -0.18 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1.51} \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1.26 & -0.5 & -1 \\ 0.405 & 0.81 & -1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.6 \\ 0.15 \\ -0.18 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{1.51}\left(0.25 \times (-2.6) + 0.5 \times 0.15 - 0.18\right) \\ \frac{1}{1.51}\left(1.26 \times (-2.6) - 0.5 \times 0.15 + 0.18\right) \\ \frac{1}{1.51}\left(0.405 \times (-2.6) + 0.81 \times 0.15 + 1.4 \times 0.18\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -2.1 \\ -0.45 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} R &= z - 0.5 \\ S &= -2.1z - 0.45 \end{aligned}$$

Pour obtenir T, il faut que $BT = B_m A_0 = z^3 - 1.2z^2 + 0.36z - 0.005$. Il faut donc faire une division polynomiale de $B_m A_0$ par B

$$\begin{array}{r|l} +z^3 - 1.2z^2 + 0.36z - 0.06 & z - 0.5 \\ \hline & z^2 - 0.7z + 0.01 \end{array}$$

ce qui donne

$$T = z^2 - 0.7z + 0.01$$

et on vérifie que

$$BT = (z-0.5)(z^2 - 0.7z + 0.01) = z^3 - 1.2z^2 + 0.36z - 0.005 = B_m A_0$$

3. La réponse impulsionnelle en boucle fermée d'asservissement:
C'est la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de $H_m(z)$.

$$H_m(z) = \frac{z^2 - 0.7z + 0.01}{(z-0.6)^2} = c_0 + c_1 \frac{z}{z-0.6} + c_2 \frac{0.6\,z}{(z-0.6)^2} \tag{7}$$

En réduisant au dénominateur commun

$$\begin{aligned} c_0(z^2 - 1.2z + 0.36) + c_1 z(z-0.6) + c_2 0.6z &= c_0 z^2 - 1.2c_0 z + 0.36c_0 + c_1 z^2 - 0.6z + c_2 0.6z \\ &= (c_0 + c_1)z^2 + (-1,2c_0 - 0.6c_1 + c_2 0.6)z + 0.36c_0 \\ &= z^2 - 0.7z + 0.01 \end{aligned}$$

ce qui conduit en identifiant les coefficients devant les puissances de z

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{0.01}{0.36} = 0.02\bar{7} \\ c_1 &= 1 + c_0 = 0.97\bar{2} \\ c_2 &= \frac{-0.7 + 1.2 \times 0.02\bar{7} + 0.6 \times 0.97\bar{2}}{0.6} = -\frac{0.08\bar{3}}{0.6} = -0.13\bar{8} \end{aligned}$$

et en prenant la transformée en $\mathcal{Z}$, on obtient le résultat demandé

$$0.02\bar{7}\,\{\Delta(k)\} + 0.97\bar{2}\,\{0.6^k\} - 0.13\bar{8}\,\{k\,0.6^k\}$$

Linéarité $\mathcal{Z}(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}) = \mathcal{Z}(\{w_1(kh)\}) + \mathcal{Z}(\{w_2(kh)\})$ $\mathcal{Z}(a\{w(kh)\}) = a\mathcal{Z}(w(kh)) \qquad a \in \mathbb{C}$
Décalages temporels $\mathcal{Z}(w(kh - dh)) = z^{-d}W(z) \qquad d \in \mathbb{N}$ $\mathcal{Z}(w(kh + dh)) = z^{d}W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} z^{d-i} \qquad d \in \mathbb{N}$
Dérivation complexe $\mathcal{Z}(kh\, w(kh)) = -hz \frac{dW}{dz}(z)$
Changement d'échelle complexe $\mathcal{Z}(a^{kh}w(kh)) = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \qquad a \in \mathbb{C}\ a \neq 0$
Valeurs initiale et finale $w(0) = \lim_{z\to\infty} W(z)$ $\lim_{k\to\infty} w(kh) = \lim_{z\to 1}(z-1)W(z) \qquad \lvert z_i \rvert < 1$
Produit de convolution $\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} u(lh)g(kh - lh)\right) = G(z)U(z)$
Accumulation $\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} w(lh)\right) = \frac{z}{z-1}W(z)$
Différence $\mathcal{Z}(w(kh) - w(kh-h)) = \frac{z-1}{z}W(z)$

Table 1: Tableau de la grammaire de la transformée en $\mathcal{Z}$

N^o	$w(t)$	$\mathcal{L}(w(t))$	$w(kh)$	$\mathcal{Z}(w(kh))$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta(kh)$	1
3	1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{h^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}$	$\frac{1}{s^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akh}	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$
8	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kh\,e^{-akh}$	$\frac{he^{-ah}z}{(z-e^{-ah})^2}$
9	$\frac{1}{2}t^2\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2e^{-akh}$	$\frac{h^2e^{-ah}z(z-e^{-ah}+2e^{-ah})}{2(z-e^{-ah})^3}$
10	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}e^{-akh}$	$\frac{(-1)^{(l-1)!}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
11	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kh)$	$\frac{\sin(\omega h)z}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
12	$\cos(\omega h)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
13	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\sin(\omega kh)$	$\frac{e^{-ah}\sin(\omega h)z}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$

Table 2: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

14	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-e^{-ah}\cos(\omega h))}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$
15			a^k	$\frac{z}{z-a}$
16			$k\,a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
17			$\frac{1}{2}k\,(k-1)\,a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
18			$\frac{1}{(l-1)!}\left(\prod_{i=0}^{l-2}(k-i)\right)(a^{k-l+1})$	$\frac{z}{(z-a)^l}$

Table 3: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-a-b^2+bc}\begin{pmatrix} -1 & b & -b^2 \\ 1 & -b & bc-a \\ c-b & -a & ab \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \\ c & d & e \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{be-ae+c-d}\begin{pmatrix} be-d & -e & 1 \\ c-ae & e & -1 \\ ad-bc & c-d & b-a \end{pmatrix}$$

Table 4: Inverses de matrices particulières

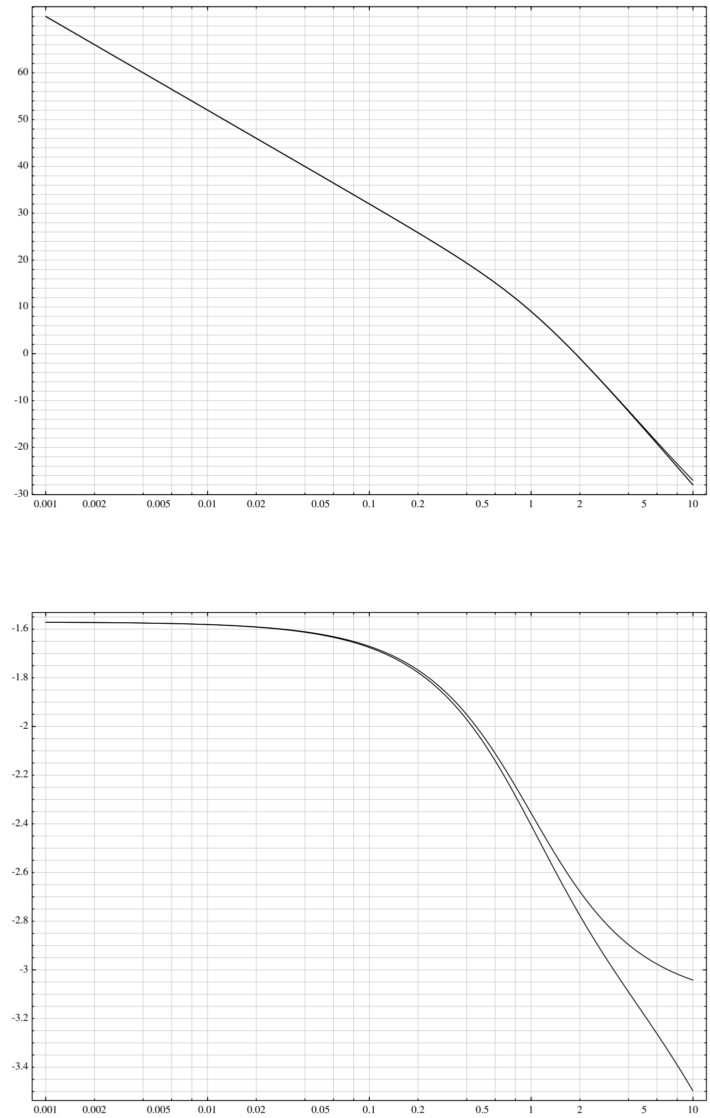

Figure 1: Diagrammes de bode en amplitude et en phase de la fonction de transfert analogique $G(s)$ et de l'équivalent analogique du système discret $H'(w)$. L'axe horizontal donne les pulsations en [rad/s], ω pour $G(s)$ et ν pour $H'(w)$. Les angles (associés à la phase) sont en [rad] et l'amplitude en [dB]. *(Bode diagrams – magnitude and phase – of the analog transfer function $G(s)$ together with the analog equivalent of the disrete-time system $H'(w)$. The horizontal axis indicates the frequency in [rad/s]—ω for $G(s)$ and ν for $H'(w)$. The angles, associated with the phase, are given in [rad] and the magnitude in [dB].)*

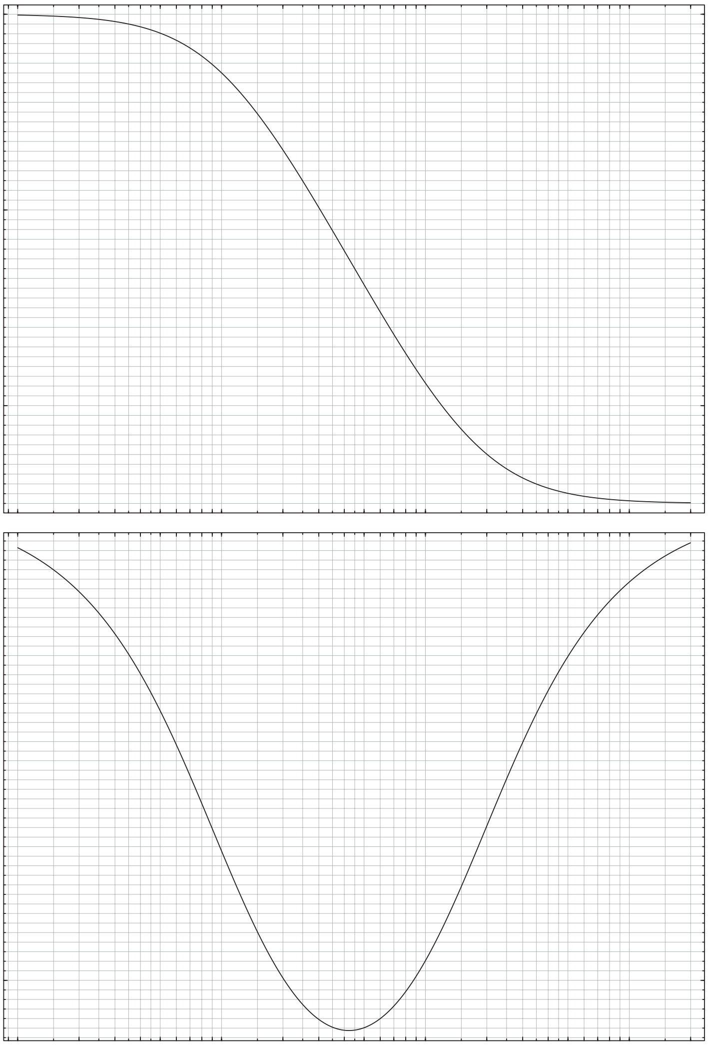

Figure 2: Equivalent analogique K′(w) du régulateur demandé dans le problème 3. En haut l'amplitude et an bas la phase. Il n'y a pas d'échelle et pas de valeurs numériques. *(Analog equivalent of the controller $K'(w)$ in problem 3. Top is the magnitude, and below, the phase. There are no scales and no numerical values.)*