Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques   Eté 2019

Nom, Prénom, SCIPER :

Signature:

total : **70 pts**

	1.	2.	3.	4.	Tot.

Section :

Problème 1 — (15 pts)

Soit le schéma donné à la figure 1.

1. Calculer la fonction de transfert discrète $\frac{Y(z)}{U(z)}$.
2. Calculer la réponse indicielle $\{y(kh)|k \geq 0\}$.

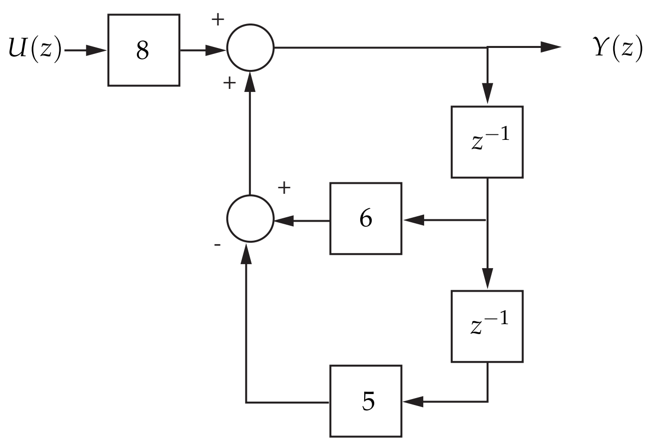

Figure 1: Schéma avec deux délais.

---

1. Fonction de transfert.

$$Y(z) = 8U(z) + z^{-1}\,6\,Y(z) - 5\,z^{-2}Y(z)$$

$$\begin{aligned} Y(z) + 5\,z^{-2}\,Y(z) - z^{-1}\,Y(z)\,6 &= 8\,U(z) \\ (1 - 6z^{-1} + 5z^{-2})Y(z) &= 8U(z) \end{aligned}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{8}{1 - 6z^{-1} + 5z^{-2}} = \frac{8z^2}{z^2 - 6z + 5}$$

2. Réponse indicielle.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{8z^2}{z^2-6z+5}\frac{z}{z-1} \\ &= 8\frac{z^3}{(z-1)^2\,(z-5)} \\ y(k) &= \frac{1}{2}\left(-9+5^{2+k}-4k\right) \\ &= -4.5-12.5\cdot 5^k-2\,k \end{aligned}$$

Problème 2 — (15 pts)

Soit l'équation aux différences

$$y(k+2)+y(k+1)+0.2\,y(k) = u(k)+0.32\,u(k)$$

Calculer $y(k)$ quand $u(k) = (-2)^{-k}$, $k \geq 0$.

$$z^2\,Y(z)+z\,Y(z)+0.2\,Y(z) = 1.32U(z) = 1.32\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= 1.32\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\,\frac{1}{(z^2+z+0.2)} \\ &= \frac{1.32\,z}{(z+0.5)(z+0.2764)(z+0.7236)} \end{aligned}$$

$$\frac{z}{(z+a)(z+b)(z+c)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)}\,\frac{z}{z+a}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}\,\frac{z}{z+b}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\,\frac{z}{z+c}$$

Avec $a = 0.5$, $b = 0.2764$ et $c = 0.7236$

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{1.32}{(0.5-0.2764)(0.5-0.7236)}\,(-0.5)^k+\frac{1.32}{(0.2764-0.5)(0.2764-0.7236)}\,(-0.2764)^k \\ &\quad +\frac{1.32}{(0.7236-0.5)(0.7236-0.2764)}\,(-0.7236)^k \\ &= -26.4\,(-0.5)^k+13.2\,(-0.2764)^k+13.2\,(-0.7236)^k \end{aligned}$$

Problème 3 — (20 pts)

Soit le système analogique de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s(s+10)} \tag{1}$$

1. Discrétiser la fonction de transfert en utilisant la méthode de maintien d'ordre zéro (ZOH) avec une fréquence d'échantillonnage de 5 [Hz].

2. Déterminer les coefficients μ et δ de l'équivalent analogique en w:

$$H^{'}(w) = \frac{-0.00476\, w^2 - 0.105\, w + \mu}{w^2 + 7.62\, w + \delta}$$

3. Déterminer la graduation sur les axes du diagramme de Bode de la figure 2.

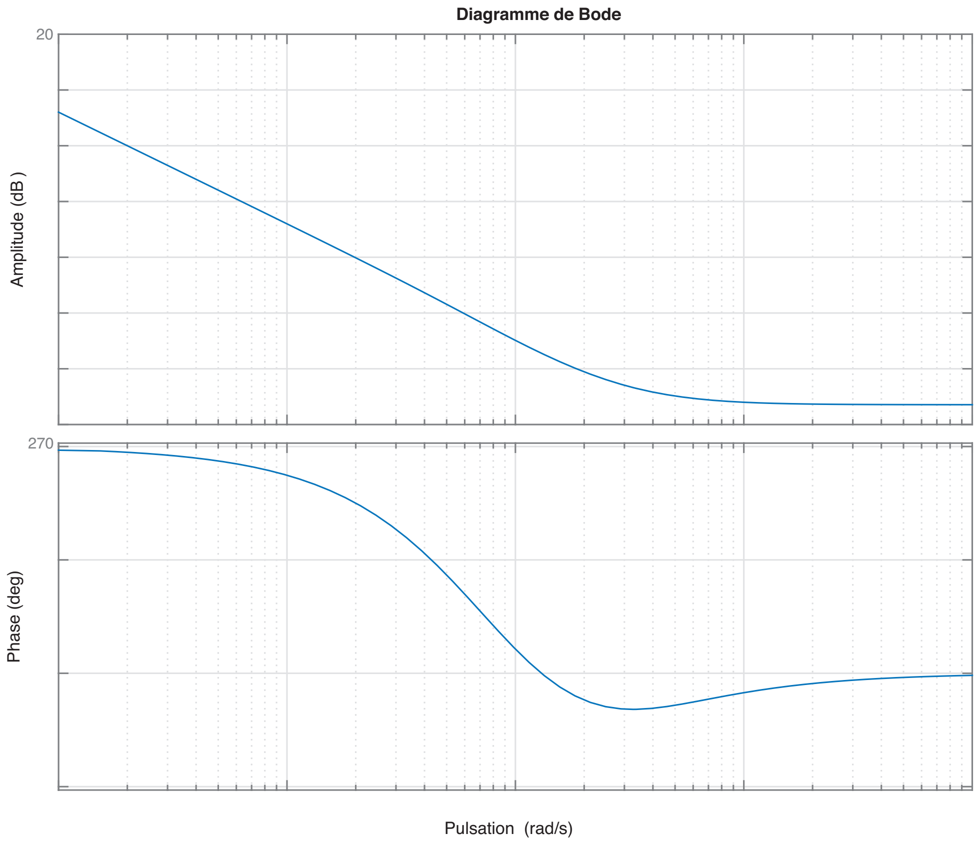

Figure 2: Diagramme de bode de $H^{'}(w)$. La pulsation ν est représentée en échelle logarithmique.

.

4. Dessiner sur le même diagramme, le diagramme de Bode asymptotique en amplitude et en phase.

5. Déterminer le gain qui assure une pulsation de croisement de 8 [rad/s].

6. Déterminer la marge de phase associée.

1. Discrétisation:

$$\begin{aligned}
\frac{G(s)}{s} &= \frac{2}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{50}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{50}\frac{1}{s+10} \\
\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right) &= \frac{z-1}{z}\left(-\frac{1}{50}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{5}\frac{0.2\,z}{(z-1)^2} + \frac{1}{50}\frac{z}{z-0.135}\right) \\
&= -\frac{1}{50} + \frac{1/5\,0.2}{z-1} + \frac{1}{50}\frac{z-1}{z-0.135} \\
&= \frac{-\frac{1}{50}(z-1)(z-0.135) + \frac{1}{5}\,0.2\,(z-0.135) + \frac{1}{50}(z-1)^2}{(z-1)(z-0.135)} \\
&= \frac{0.0227z + 0.0119}{z^2 - 1.135\,z + 0.135}
\end{aligned}$$

2. Coeffcient μ et δ Le plus expéditif est de constater que la structure de l'intégrateur est maintenu par le processus de discrétisation et de l'équivalent analogique correspondant. Ceci conduit à

$$\delta = 0$$

Ensuite, on peut remarquer que le gain statique doit correspondre pour avoir un modèle analogique équivalent. Ce qui conduit à

$$\frac{2}{10} = \frac{\mu}{7.62}$$

et donc

$$\mu = \frac{2\,\cdot\,7.62}{10} = 1.524$$

Ceci est confirmé en effectuant la substitution

$$z = \frac{1 + w\,0.1}{1 - w\,0.1}$$

dans $H(z)$

$$\begin{aligned}
H^{'}(w) &= \frac{0.0119 + 0.0277\,\frac{1+w\,0.1}{1-w\,0.1}}{\left(\frac{1+w\,0.1}{1-w\,0.1}\right)^2 - 1.135\frac{1+w\,0.1}{1-w\,0.1} + 0.135} \\
&= \frac{0.0119(1-w\,0.1)^2 + 0.0227\,(1+w\,0.1)\,(1-w\,0.1)}{(1+w\,0.1)^2 - 1.135(1+w\,0.1)(1-w\,0.1) + 0.135\,(1-w\,0.1)^2}
\end{aligned}$$

En effet le terme constant du dénominateur disparaît (assurant $\delta = 0$) car

$$\delta = 1 - 1.135 + 0.135 = 0$$

et en ne retenant que le terme constant du numérateur divisé par le terme devant w^2 au dénominateur

$$\mu = \frac{0.0119 + 0.0227}{0.01\,(1 + 1.135 + 0.135)} = \frac{0.0346}{0.0227} = 1.524$$

ce qui est cohérent avec le calcul précédant.

3. Graduation sur le diagramme de Bode. 1 Se référer à la figure 3

4. Diagramme de Bode asymptotique

   Pôles: en $w = 0$ et en $w = -7.62$

   Zéros: en $w = 9.98$ et en $w = -32$

   Confirmation des zéros par le calcul:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{0.105 \pm \sqrt{(-0.105)^2 + 4\cdot 1.524\cdot 0.00476}}{-2\cdot 0.004776} \\
&= \frac{0.105 \pm 0.2}{-2\cdot 0.00476} = \left\{\begin{array}{l} -32 \\ 9.98 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En basse fréquence, $\nu << 7.62$, le système est approximé par

$$\frac{1.524}{7.62}\,\frac{1}{w}$$

qui est un intégrateur et donc -20 [dB/decade] au début du diagramme et on calcul que pour $\nu = 0.2$ [rad/s] on a un module de 0 [dB]. On détermine ainsi la graduation sur l'axe de pulsation.

Entre les pulsations 7.62 et 9.98 on est en -40 [dB/decade].

Ensuite, entre 9.98 et 32 on est à nouveau en -20 [dB/decade].

Finalement, après 32 [rad/s], on aura une pente nulle de 0 [dB/decade].

ν		7.62		9.98		32	
dB/dec	-20		-40		-20		0

Pour la valeur asymptotique finale on aura

$$20\,\log_{10}(0.00476) = -46.4\,[\mathrm{dB}]$$

et à la pulsation $\nu = 60$ [rad/s] l'approximation basse fréquence $\frac{1.524}{7.62}\,\frac{1}{w}$ passera par

$$20\,\log_{10}\left(\frac{1.524}{7.62}\,\frac{1}{60}\right) = -49.54 \approx -50\,[\mathrm{dB}]$$

Ceci correspond au trait en traitillé sur la figure 3.

En ce qui concerne la phase, on a les valeurs asymptotiques suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{1.524}{7.62\cdot j\nu} &\quad\rightarrow\quad \frac{1}{j\nu} \equiv +270\,[\mathrm{deg.}]\\
\frac{1.524}{(j\nu+7.62)\,j\nu} &\quad\rightarrow\quad -\frac{1}{\nu^2} \equiv +180\,[\mathrm{deg.}]\\
\frac{-0.00476\cdot 32\cdot(j\nu-9.98)}{(j\nu+7.62)\cdot j\nu} &\quad\rightarrow\quad -\frac{1}{j\nu} \equiv +90[\mathrm{deg.}]\\
\frac{-0.00476\cdot(j\nu-32)(j\nu-9.98)}{(j\nu+7.62)j\nu} &\quad\rightarrow\quad -\frac{(j\nu)^2}{(j\nu)^2} \equiv +180\,[\mathrm{deg.}]
\end{aligned}$$

ce qui donne le tableau suivant

ν		7.62		9.98		32	
arg	+270		+180		+90		+180

Ces valeurs asymptotiques sont représentée à la figure 3.

5. Gain pour avoir une pulsation de croisement de 8 [rad/s].

   On lit sur le graphique lorsque $\nu = 8$ [rad/s] sur l'échelle logarithmique, approximativement 33 [dB] ce qui donne un gain de
   $$k = 10^{33/20} = 44.6$$

   En effectuant les calculs:
   $$\frac{1}{k} = \frac{\sqrt{(64\cdot 0.00476 + 1.524)^2 + (8\cdot 0.105)^2}}{\sqrt{64^2 + (7.68\cdot 8)^2}} = \frac{2.0123}{88.4} = 0.02276$$

   Le gain est donc de
   $$k = \frac{1}{0.02276} = 43.9$$

   ce qui correspond en dB:
   $$20\log_{10} 43.9 = 32.85[\mathrm{dB}]$$

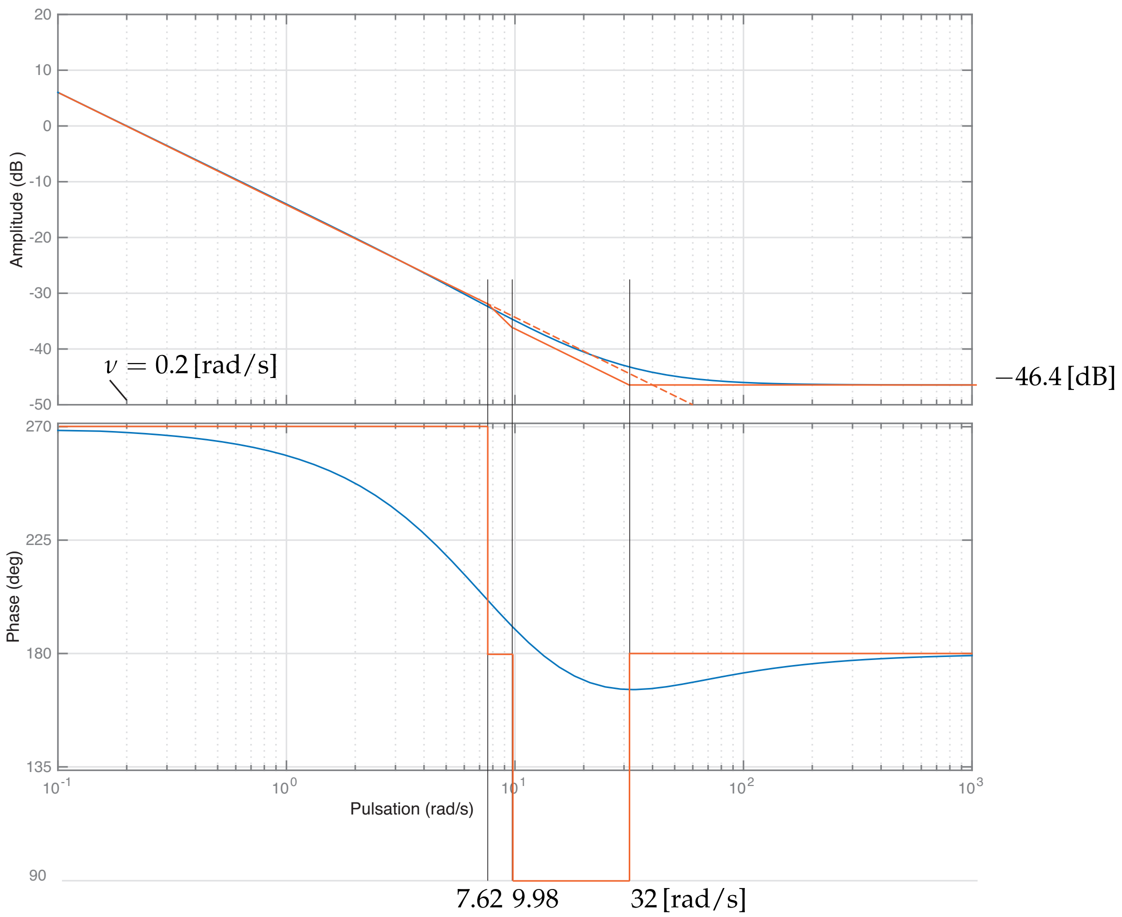

Figure 3: Diagramme de Bode asymptotique.

6. Marge de phase associée.

   On lit sur le graphique un rapport de 6 [mm] sur 15 [mm] avec 15 [mm] correspondant à 45 [deg.], ce qui donne

$$\psi = \frac{6}{15}45 = 18 \qquad \text{[deg.]}$$

   Calcul:

$$\frac{0.00476 \cdot 64 \cdot 1.524 - 0.105 \cdot 8 \cdot j}{-64 + 7.62 \cdot 8 \cdot j}$$

   en argument:

$$\begin{aligned}
\psi &= \arctan\left(\frac{-0.105 \cdot 8}{0.00476 \cdot 64 + 1.524}\right) - \arctan\left(\frac{7.62 \cdot 8}{-64}\right) \\
&= \arctan(-0.46) - \arctan(-0.9525) \\
&= -24.67 + 43.6 = 18.93 \qquad \text{[deg.]}
\end{aligned}$$

Problème 4 — (20 pts)

Soit la fonction de transfert en boucle ouverte discrète

$$H(z) = \frac{0.0316z + 0.0143}{z^2 - 1.08z + 0.08}$$

On aimerait dimensionner un régulateur RST pour ce système.

1. Soit un modèle à poursuivre

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \tag{2}$$

   On aimerait avoir deux pôles en 0.5 et, si possible, la simplification du zéro de $H(z)$. On aimerait également que le modèle à poursuivre ait un gain statique de 1. Est-ce que ces spécifications sont raisonnables ? Si oui proposer un modèle à poursuivre le plus simple possible qui remplissent ces objectifs.

2. On fixe le polynôme observateur à réponse pile du troisième ordre

$$A_0(z) = z^3$$

3. Déterminer les polynômes $R(z)$, $S(z)$ de structure suivante

$$\begin{aligned} R(z) &= z^2 + r_1\, z + r_2 \\ S(z) &= s_0\, z + s_1 \end{aligned}$$

   de telle sorte à satisfaire l'équation de Diophante associée. Utiliser à cette fin le lemme d'inversion matricielle dans la table fournie.

4. Calculer le polynôme $T(z)$.

---

1. Modèle à poursuivre: Le zéro est

$$\frac{-0.0143}{0.0316} = -0.4525$$

   comme il est bien amorti, il pourrait être simplifié. Toutefois il est près de la limite 0.5 et également proche des pôles en boucle fermée imposés. On décide de la conserver dans le modèle à poursuivre. Ce dernier est pris le plus simple possible afin d'avoir deux pôles en 0.5 et aucun statisme. Ainsi

$$\frac{\gamma \cdot (0.0316\, z + 0.0143)}{(z-0.5)^2} = \frac{\gamma \cdot (0.0316\, z + 0.0143)}{z^2 - z + 0.25}$$

   Pour garantir aucun statisme $\gamma \cdot (0.0316 + 0.0143) = 1 - 1 + 0.25 = 0.25$, et donc

$$\gamma = \frac{0.25}{0.0459} = 5.45$$

$$\frac{B_m}{A_m} = \frac{5.45(0.0316\, z + 0.0143)}{z^2 - z + 0.25} = \frac{b_{m0}\, z + b_{m1}}{z^2 + a_{m1}\, z + a_{m2}}$$

2. Polynôme observateur est donné:

$$A_0(z) = z^3$$

3. Déterminer les polynômes $R(z)$ et $S(z)$: Les données sont

$$\begin{aligned} A(z) &= z^2 - 1.08\, z + 0.08 = z^2 + a_1\, z + a_2 \\ B(z) &= 0.0316\, z + 0.0143 = b_0\, z + b_1 \end{aligned}$$

   et on a trouvé

$$A_0\, A_m = z^5 - z^4 + 0.25\, z^3 = z^5 + c_1\, z^4 + c_2\, z^3$$

Avec la notation générale du cours

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & 1 & \cdots & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & b_1 & b_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{\delta A} & \vdots & \cdots & b_{\delta A} & \vdots \\ 0 & a_{\delta A} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\delta B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{\delta R} \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{\delta S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_{\delta A} - a_{\delta A} \\ c_{\delta A+1} \\ \vdots \\ c_{\delta R+\delta S+1} \end{pmatrix}$$

Avec les données précédantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.08 & 1 & 0.0316 & 0 \\ 0.08 & -1.08 & 0.0143 & 0.0316 \\ 0 & 0.08 & 0 & 0.0143 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-(-1.08) \\ 0.25-(0.08) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit après inversion avec le lemme de la table

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0.332726 & 0.264744 & -0.58503 & 1.29279 \\ 23.6479 & 23.2676 & 18.5136 & -40.9112 \\ -1.86141 & -1.48109 & 3.27289 & 62.6977 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.071625 \\ 5.84732 \\ -0.400697 \end{pmatrix}$$

ainsi en résumé

$$\begin{aligned} R(z) &= z^2 + 0.08\,z + 0.071625 \\ S(z) &= 5.84732\,z - 0.400697 \end{aligned}$$

et une petite vérification facultative donne avec

$$A(z) = z^2 - 1.08\,z + 0.08$$
$$B(z) = 0.0316\,z + 0.0143$$

$$AR + BS = z^3 - z^2 + 0.25\,z + 8.7 \cdot 10^{-9}$$

4. Déterminer le polynôme $T(z)$: On doit avoir

$$\begin{aligned} B(z)\,T(z) &= B_m(z)\,A_0(z) \\ (0.0316\,z + 0.143)\,T(z) &= 5.45(0.0316\,z + 0.0143) \cdot z^3 \end{aligned}$$

et on trouve

$$T(z) = 5.45\,z^3$$

On constate que ceci conduit à une réalisation non causale car le degré de $T(z)$ est supérieur à celui de $R(z)$. Une solution à cette difficulté est de réduire le polynôme observateur à $A_0(z) = z^2$ et d'introduire un pôle à l'origine dans le système à régler. Ceci ne change en rien le produit $A_0(z)A_m(z)$ et donc les solutions $R(z)$ et $S(z)$ obtenues précédemment. Ainsi,

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{5.45 \cdot (0.0316\,z + 0.0143)}{z^3 - z^2 + 0.25z}$$

et le polynôme $T(z)$ s'écrit

$$T(z) = 5.45\,z^2$$

conduisant à une solution causale satisfaisante, car les pôles dominants demeurent le pôle double en 0.5, malgré la présence du pôle à réponse pile dans le modèle à poursuivre.

Autre méthode avec simplification du zéro

1. Modèle à poursuivre. Pour garantir le statisme nul $H_m(1) = 1$, et la simplification du zéro conduit à

$$H_m = \frac{B_m}{A_m} = \frac{0.25}{z^2 - z + 0.25} \tag{3}$$

afin d'avoir les deux pôles en 0.5.

2. Si on simplifie le pôle le degré de R' sera de un et donc

$$R' = z + r_1'$$

On doit résoudre

$$A\,R' + B^-\,S = A_m\,A_0$$

Il faut baisser l'ordre du polynôme observateur et poser $A_0 = z$. Autrement dit, il faut résoudre

$$(z^2 - 1.08\,z + 0.08)\,R' + 0.0316\,S = (z^2 - z + 0.025) \cdot z$$

3. Calcul des polynôme R et S: En factorisant

$$B = 0.0316\,z + 0.0143 = B^- \cdot B^+ = 0.0316 \cdot (z + 0.4545)$$

et en utilisant le lemme d'inversion matricielle on doit calculer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_1' \\ s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.08 & 1 & 0 & 0 \\ 0.08 & -1.08 & 0.0316 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0 & 0.0316 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.08 \\ 8.11392 \\ -0.202532 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} R' &= z + 0.08 \\ S &= 8.11392\,z - 0.202532 \end{aligned}$$

et un vérification conduit bien à

$$(z^2 - 1.08\,z + 0.08)(z + 0.08) + 0.0316 \cdot (8.11392\,z - 0.202532) = z^3 - z^2 + 0.25z$$

En introduisant le facteur de la simplication (le zéro) on obtient le polynôme

$$\begin{aligned} R = B^+ \cdot R' &= (z + 0.4545)\,(z + 0.08) \\ &= z^2 + 0.5345\,z + 0.03636 \end{aligned}$$

4. Calcul du polynôme T:

Avec

$$B = 0.0316z + 0.0413 = 0.0316 \cdot (z + 0.4545) = B^-\,B^+$$

$$B_m = 0.25 = B^-\,B_m' = 0.0316\,B_m'$$

on a

$$B^-\,T = A_0\,B^-\,B_m'$$

et comme

$$\begin{aligned} B^- &= 0.0316 \\ A_0 &= z \\ B_m' &= \frac{0.25}{0.0316} = 7.911 \end{aligned}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
T\,B^- &= A_0\,B^-\,B_m^{'} \\
T \cdot 0.0316 &= z \cdot 0.0316 \cdot 7.911 \\
T &= z \cdot 7.911
\end{aligned} \tag{4}
$$

Vérification finale:

$$
\begin{aligned}
\frac{BT}{AR+BS} &= \frac{(0.0316\,z + 0.0143)\cdot z \cdot 7.911}{(z^2 - 1.08z + 0.08)(z+0.4545)(z+0.08) + (0.0316\,z + 0.0143)(8.11392\,z - 0.202532)} \\
&= \frac{z \cdot 0.0316 \cdot 7.911}{(z^2 - 1.08z + 0.08)(z+0.08) + 0.0316 \cdot (8.11392z - 0.202532)} \\
&= \frac{0.25 \cdot z}{z^3 - z^2 + 0.25\,z} = \frac{0.25}{z^2 - z + 0.25}
\end{aligned}
$$

Linéarité $\mathcal{Z}(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}) = \mathcal{Z}(\{w_1(kh)\}) + \mathcal{Z}(\{w_2(kh)\})$ $\mathcal{Z}(a\{w(kh)\}) = a\mathcal{Z}(w(kh)) \qquad a \in \mathbb{C}$
Décalages temporels $\mathcal{Z}(w(kh - dh)) = z^{-d}W(z) \qquad d \in \mathbb{N}$ $\mathcal{Z}(w(kh + dh)) = z^{d}W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} w(ih)\, z^{d-i} \qquad d \in \mathbb{N}$
Dérivation complexe $\mathcal{Z}(kh\, w(kh)) = -hz\, \frac{dW}{dz}(z)$
Changement d'échelle complexe $\mathcal{Z}(a^{kh}w(kh)) = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \qquad a \in \mathbb{C}\ a \neq 0$
Valeurs initiale et finale $w(0) = \lim_{z\to\infty} W(z)$ $\lim_{k\to\infty} w(kh) = \lim_{z\to 1}(z-1)W(z) \qquad \|z_i\| < 1$
Produit de convolution $\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} u(lh)g(kh - lh)\right) = G(z)U(z)$
Accumulation $\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{k} w(lh)\right) = \frac{z}{z-1}W(z)$
Différence $\mathcal{Z}(w(kh) - w(kh - h)) = \frac{z-1}{z}W(z)$

Table 1: Tableau de la grammaire de la transformée en $\mathcal{Z}$

N^o	$w(t)$	$\mathcal{L}(w(t))$	$w(kh)$	$\mathcal{Z}(w(kh))$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta(kh)$	1
3	1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{h^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}$	$\frac{1}{s^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akh}	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$
8	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kh\,e^{-akh}$	$\frac{he^{-ah}z}{(z-e^{ah})^2}$
9	$\frac{1}{2}t^2\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2e^{-akh}$	$\frac{h^2e^{-ah}z(z-e^{-ah}+2e^{-ah})}{2(z-e^{-ah})^3}$
10	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}e^{-akh}$	$\frac{(-1)^{(l-1)}}{(l-1)!}\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-ah}}\right)$
11	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kh)$	$\frac{\sin(\omega h)z}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
12	$\cos(\omega h)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
13	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\sin(\omega kh)$	$\frac{e^{-ah}\sin(\omega h)z}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$

Table 2: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

14	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh}\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-e^{-ah}\cos(\omega kh))}{z^2-2e^{-ah}\cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$
15			a^k	$\frac{z}{z-a}$
16			$k\,a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
17			$\frac{1}{2}k\,(k-1)\,a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
18			$\frac{1}{(l-1)!}\left(\prod_{i=0}^{l-2}(k-i)\right)(a^{k-l+1})$	$\frac{z}{(z-a)^l}$

Table 3: Tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ et de Laplace

$W_N^{nk} = e^{j2\pi\frac{nk}{N}}$	
$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(n)\,W_N^{kn}$	$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,W_N^{-nk}$
$y(k) = x(k)g(k)$	$Y(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)G(n-m)$
$y(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)g(k-l)$	$Y(n) = X(n)G(n)$ TFD avec $N_x + N_g - 1$ échantillons
$x(k-k_0)$ cyclique	$W_N^{-nk_0}\,X(n)$

Table 4: Table transformée de Fourier discrète

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & a & 0 \\ y & x & b & a \\ 0 & y & 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2y - abx + b^2}\begin{pmatrix} a^2y - abx + b^2 & 0 & 0 & 0 \\ b(ay-bx) & b^2 & -ab & a^2 \\ b\left(x^2-y\right) - axy & ay - bx & b & -a \\ y(bx-ay) & -by & ay & b - ax \end{pmatrix}$$

Table 5: Résultat de l'inverse d'une matrice particulière