

Examen Commande Numérique des Systèmes Dynamiques Été 2018

Nom, Prénom, SCIPER :

total : 70 pts

	1.	2.	3.	4.	Tot.

Signature:

Section :

Problème 1 — (15 pts)

Trouver par décomposition en éléments simples, la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse des fractions suivantes:

1.

$$\frac{7z^3 - 22z^2 - 53z}{(z-3)(z+4)(z-5)}$$

2.

$$\frac{z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}z}{\left(z - \frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Corrigé

1.

$$\{h(k)\} = \left\{ \frac{7}{3}(-4)^k + 4 \cdot 3^k + \frac{2}{3}5^k \right\} \quad (1)$$

Détails. On commence par décomposer en éléments simples de la forme

$$c_1 \frac{z}{z-3} + c_2 \frac{z}{z+4} + c_3 \frac{z}{z-5}$$

et on calcule les coefficients c_1 , c_2 et c_3 par

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z-3}{z} H(z) = \frac{7z^2 - 22z - 53}{(z+4)(z-5)} \Big|_{z=3} = \frac{7 \cdot 9 - 22 \cdot 3 - 53}{(3+4)(3-5)} = \frac{-56}{-14} = 4 \\ c_2 &= \lim_{z \rightarrow -4} \frac{z+4}{z} H(z) = \frac{7z^2 - 22z - 53}{(z-3)(z-5)} \Big|_{z=-4} = \frac{7 \cdot 16 + 22 \cdot 4 - 53}{(-4-3)(-4-5)} = \frac{147}{63} = \frac{7}{3} \\ c_3 &= \lim_{z \rightarrow 5} \frac{z-5}{z} H(z) = \frac{7z^2 - 22z - 53}{(z-3)(z+4)} \Big|_{z=5} = \frac{7 \cdot 25 - 110 - 53}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-3} &\leftrightarrow \{3^k\} \\ \frac{z}{z+4} &\leftrightarrow \{(-4)^k\} \\ \frac{z}{z-5} &\leftrightarrow \{5^k\} \end{aligned}$$

on obtient (1) par le principe de superposition (linéarité)

$$\{h(k)\} = \left\{ 4 \cdot 3^k + \frac{7}{3} \cdot (-4)^k + \frac{2}{3} \cdot 5^k \right\}$$

2.

$$\{h(k)\} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}k\right) \right\}$$

En multipliant le dénominateur

$$(z - \frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2})(z + \frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2}) = z^2 - \sqrt{3}z + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = z^2 - \sqrt{3}z + 1$$

et en utilisant la ligne 12 du formulaire, on a

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z(z - \cos(\omega h))}{z^2 - 2 \cos(\omega h)z + 1} = \frac{z(z - \frac{\sqrt{3}}{2})}{z^2 - \sqrt{3}z + 1} \\ &\leftrightarrow \{\cos(\omega h k)\} \end{aligned} \quad (2)$$

ce qui conduit à

$$\cos(\omega h) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et donc

$$\omega h = \frac{\pi}{6}$$

et finalement,

$$H(z) \leftrightarrow \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}k\right) \right\} \quad (3)$$

Une autre méthode procède par décomposition en éléments simples,

$$\alpha \frac{z}{z - \frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2}} + \beta \frac{z}{z + \frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2} = \beta$ et donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}j + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}j + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k$$

qui est une autre façon d'écrire (3).

Problème 2 — (20 pts)

Echantillonner le système analogique

$$\frac{3}{(s+1)(s+6)}$$

à l'aide d'une période d'échantillonnage de $h = 0.05$ [s]. Utiliser les deux méthodes suivantes:

1. La méthode de Tustin.
2. En utilisant le maintien d'ordre 1 (constant par morceau).

Corrigé

- 1.
- 2.

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{3}{s(s+1)(s+6)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+6}$$

$$a = \left. \frac{3}{(s+1)(s+6)} \right|_{s=0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b = \left. \frac{3}{s(s+6)} \right|_{s=-1} = -\frac{3}{5}$$

$$c = \left. \frac{3}{s(s+1)} \right|_{s=-6} = \frac{3}{(-6)(-5)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \left(\frac{G(s)}{s} \right) = \frac{1}{2} \epsilon(t) - \frac{3}{5} e^{-t} \epsilon(t) + \frac{1}{10} e^{-6t} \epsilon(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right] &= \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{3}{5} \frac{z}{z-e^{-h}} + \frac{1}{10} \frac{z}{z-e^{-6h}} \\ \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right] &= \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \frac{z-1}{z-e^{-h}} + \frac{1}{10} \frac{z-1}{z-e^{-6h}} \\ &= 0.5 + 0.6 \frac{z-1}{z-0.951} + 0.1 \frac{z-1}{z-0.741} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(z-e^{-h})(z-e^{-6h}) - \frac{3}{5}(z-1)(z-e^{-6h}) + \frac{1}{10}(z-1)(z-e^{-h})}{(z-e^{-h})(z-e^{-6h})} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \right) z^2 + \left[-\frac{1}{2}e^{-h} - \frac{1}{2}e^{-6h} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}e^{-6h} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-h} \right] z + \frac{1}{2}e^{-h}e^{-6h} - \frac{3}{5}e^{-6h} + \frac{1}{10}e^{-h}}{z^2 - (e^{-h} + e^{-6h})z + e^{-7h}} \\ &= \frac{0 z^2 + \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) e^{-h} + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) e^{-6h} + \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \right] z + \frac{1}{2}e^{-7h} - \frac{3}{5}e^{-6h} + \frac{1}{10}e^{-h}}{z^2 - (e^{-h} + e^{-6h})z + e^{-7h}} \\ &= \frac{(-0.570743 + 0.07408 + 0.5)z + 0.35234 - 0.44449 + 0.09512}{z^2 - 1.692z + 0.704688} \\ &= \frac{3.34 \cdot 10^{-3} z + 2.97 \cdot 10^{-3}}{z^2 - 1.692z + 0.704688} \end{aligned}$$

Problème 3 — (20 pts)

Soit le système échantillonné

$$H(z) = \frac{z-0.9}{(z-0.99)(z-0.8)}$$

On aimerait utiliser un régulateur RST en asservissement pour atteindre un modèle à poursuivre.

$$A(z) = z^2 - 1.79z + 0.792$$

$$B(z) = z - 0.9$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = z^3 - 0.5z^2$$

$$R(z) = z + r_0 + r_1$$

$$S(z) = s_0 z + s_1$$

$$z^3 - 1.79z^2 + 0.792z$$

$$(+ z^2 - 1.79z + 0.792) r_1$$

$$s_0(z^2 - 0.9z) \quad s_0$$

$$z - 0.9 \quad s_1 = z^2 - 0.5z$$

$$z^2 - 1.79z + 0.792 \quad \cdot \quad r_1$$

$$z^2 - 0.9z \quad \cdot \quad s_0$$

$$z - 0.9 \quad \cdot \quad s_1$$

$$z^3 - 0.5z^2$$

$$= \frac{-z^3 + 1.79z^2 - 0.792z}{1.29z^2 - 0.792z}$$

$$1.29z^2 - 0.792z$$

En écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1.79 & -0.9 & 1 \\ 0.792 & 0 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.29 \\ -0.792 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \\ c & d & e \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{be - ae + c - d} \begin{bmatrix} be - d - e & 1 \\ c - ae & e - 1 \\ ad - bc & c - d & b - a \end{bmatrix}$$

1

$$(-0.9)(-0.9) - (-1.79)(-0.9) + 0.792$$

$$\begin{bmatrix} (-0.9)(-0.9) & 0.9 & 1 \\ 0.792 - (-1.79)(-0.9) & -0.9 & -1 \\ (0.9)(0.792) & 0.792 & -0.9 + 1.79 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{-0.009} \cdot \begin{bmatrix} 0.81 & 0.9 & 1 \\ -0.819 & -0.9 & -1 \\ 0.7128 & 0.792 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.29 \\ -0.792 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{0.009} (0.81 \cdot 1.29 - 0.792 \cdot 0.9) \\ -\frac{1}{0.009} (-0.819 \cdot 1.29 + 0.792 \cdot 0.9) \\ -\frac{1}{0.009} (0.7128 \cdot 1.29 - (0.792)^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -36.9 \\ 38.19 \\ -32.472 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = -36.9 \\ s_0 = 38.19 \\ s_1 = -32.472. \end{array}$$

Verificação area:

$$(z^2 - 1.79z + 0.792)(z - 36.9) + (z - 0.9)(38.19z - 32.472) = z^3 - 0.5z^2 \checkmark$$

I/ reste à déterminer le polynôme T :

$$B.T = 5z^2 - 4.5z$$

$$(z - 0.9) T = 5z^2 - 4.5z$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 5z.}$$

$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{5z^2 - 4.5z}{AR+BS} = \frac{5z^2 - 4.5z}{z^3 - 0.5z^2}$$

$$= \frac{5z - 4.5}{z^2 - 0.5z} = H_m(z).$$

2.1 Echantillonner le système analogique

$$\frac{3}{(s+1)(s+6)}$$

par la méthode de Tustin.

$$z = e^{sh} \approx \frac{1+s\frac{h}{2}}{1-s\frac{h}{2}}$$

$$s = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$

$$s = \frac{1}{h} \ln z = \frac{2}{h} \left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right)$$

ainsi

$$\frac{3}{\left[\frac{2}{h} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + 1 \right] \left[\frac{2}{h} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + 6 \right]} =$$

$$\frac{3h^2(z+1)^2}{\left[2(z-1) + h(z+1) \right] \left[2(z-1) + 6h(z+1) \right]} = \frac{3h^2(z+1)^2}{\left[(2+h)z + (h-2) \right] \left[(2+6h)z - 2+6h \right]}$$

$$= \frac{3h^2(z+1)^2}{(2+h)(2+6h)z^2 + [(2+h)(6h-2) + (h-2)(2+6h)]z + (h-2)(6h-2)}$$

$$= \frac{3h^2(z+1)^2}{(6h^2+14h+4)z^2 + [(6h^2+10h-4) + (6h^2-10h-4)]z + (6h^2-14h+4)}$$

$$= \frac{3h^2(z+1)^2}{(6h^2+14h+4)z^2 + (12h^2-8)z + (6h^2-14h+4)}$$

En valeurs numériques

$$6 \cdot (0.05)^2 + 14 \cdot 0.05 + 4 = 4.715$$

$$12 \cdot 0.05 - 8 = -7.97$$

$$6(0.05)^2 - 14 \cdot 0.05 + 4 = 3.315$$

$$H(z) = \frac{3 \cdot (0.05)^2 (z+1)^2}{4.715 z^2 - 7.97 z + 3.315} = \frac{7.5 \cdot 10^{-3} (z+1)^2}{4.715 z^2 - 7.97 z + 3.315}$$

En rendant monique:

$$H(z) = \frac{1.59 \cdot 10^{-3} (z+1)^2}{z^2 - 1.690 z + 0.703}$$

Approximation de Tustin (autre méthode)

$$s = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} = 40 \frac{z-1}{z+1}$$

$$\frac{3}{\left(40 \frac{z-1}{z+1} + 1\right) \left(40 \frac{z-1}{z+1} + 6\right)} = \frac{3 (z+1)^2}{\left(40(z-1) + z+1\right) \left(40(z-1) + 6z+6\right)}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{(z+1)^2}{(23z-17)(4z-39)} = \frac{3}{2} \frac{(z+1)^2}{943z^2 - 1594z + 663}$$

$$\frac{\frac{3}{2} \frac{1}{943} (z+1)^2}{z^2 - \frac{1594}{943}z + \frac{663}{943}} = \frac{1.59 \cdot 10^{-3} (z+1)^2}{z^2 - 1.690z + 0.703}$$

Problème 2.2

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+6)} = \frac{3}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+6}$$

Echantillonner avec zoh

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{3}{s(s+1)(s+6)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+6}$$

$$a = \left. \frac{3}{(s+1)(s+6)} \right|_{s=0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b = \left. \frac{3}{s(s+6)} \right|_{s=-1} = -\frac{3}{5}$$

$$c = \left. \frac{3}{s(s+1)} \right|_{s=-6} = \frac{3}{(-6)(-5)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{3}{5} e^{-t} + \frac{1}{10} e^{-6t}$$

$$\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right) = \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{3}{5} \frac{z}{z-e^{-h}} + \frac{1}{10} \frac{z}{z-e^{-6h}}$$

$$h = 0.05$$

$$\frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \frac{z-1}{z-e^{-h}} + \frac{1}{10} \frac{z-1}{z-e^{-6h}}$$

$$\frac{1}{2}(z - e^{-h})(z - e^{-6h}) - \frac{3}{5}(z-1)(z - e^{-6h}) + \frac{1}{10}(z-1)(z - e^{-h})$$

$$(z - e^{-h})(z - e^{-6h})$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right)z^2 + \left[-\frac{1}{2}e^{-h} - \frac{1}{2}e^{-6h} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}e^{-6h} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-h}\right]z + \frac{1}{2}e^{-h}e^{-6h} - \frac{3}{5}e^{-6h} + \frac{1}{10}e^{-h}$$

$$z^2 - (e^{-h} + e^{-6h})z + e^{-7h}$$

$$= 0 \cdot z^2 + \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right)e^{-h} + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)e^{-6h} + \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right]z + \frac{1}{2}e^{-7h} - \frac{3}{5}e^{-6h} + \frac{1}{10}e^{-h}$$

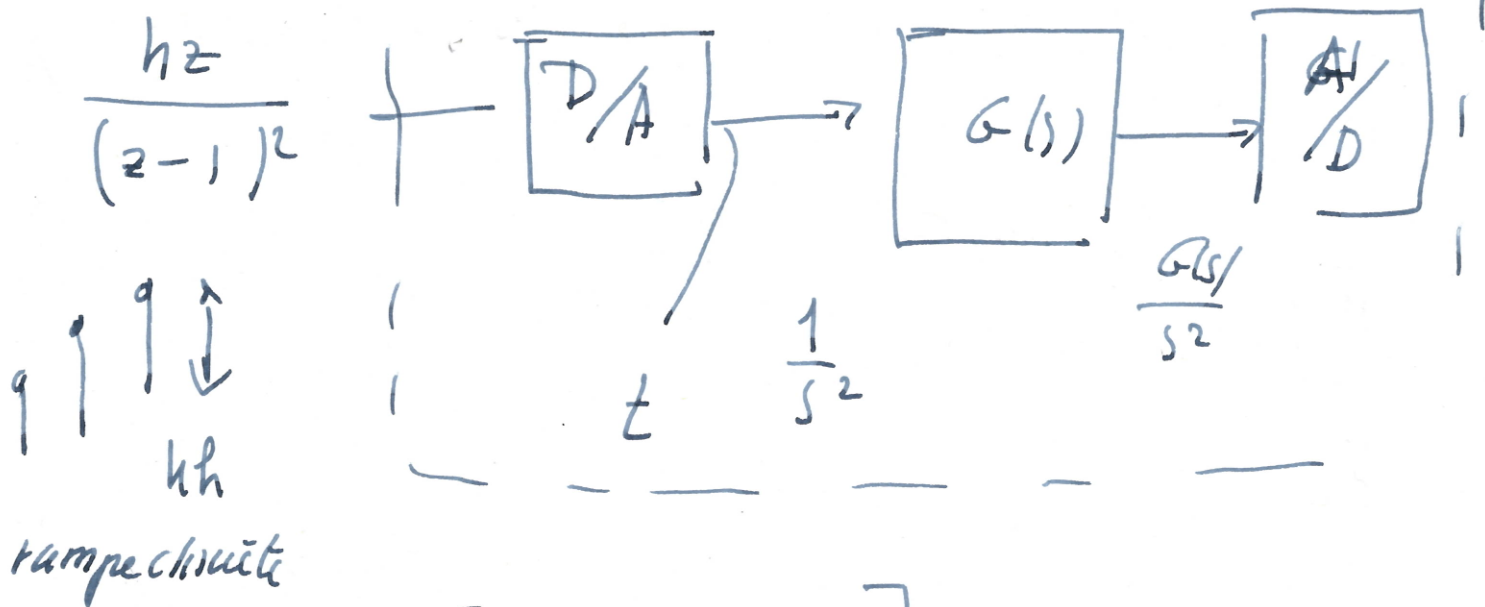
$$z^2 - (e^{-h} + e^{-6h})z + e^{-7h}$$

$$3.344 \cdot 10^{-3}$$

$$\left(-0.57 + 0.743 \cdot 0.07408 + 0.5\right)z + 2.976 \cdot 10^{-3}$$

$$z^2 - 1.692z + 0.7, 04688$$

Maintien d'ordre 1 (le vrai maintien) d'ordre 1



$$\frac{(z-1)^2}{hz} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s^2} \right) \right]$$

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+6)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s^2} \right) = -\frac{7}{12} - \frac{e^{-6t}}{60} + \frac{3}{5} e^{-t} + \frac{t}{2}$$

$$\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s^2} \right) \right) = \frac{1}{60} \mathcal{Z} \left(\frac{5(7+6ht-7e^{-t})}{(z-1)^2} + \frac{36e^{-t}}{e^{6t}-1} \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(z-1)^2}{hz} \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s^2} \right) \right) \\ &= \frac{0.00115 \cdot z^2 + 0.00421z + 0.000963}{z^2 - 1.692z + 0.7047} + \frac{e^{6h}}{1-e^{6h}z} \\ &= \frac{0.001147z^2 + 0.00421z + 0.000929}{z^2 - 1.692z + 0.70469} \end{aligned}$$

Problème 3 examen

A faire repuler
formula de la transformée
de Fourier directe
TE.

$$H(z) = \frac{z - 0.9}{(z - 0.99)(z - 0.8)}$$

- a) Déterminer le modèle à poursuivre par deux pôles
 $z = 0$ et $z = 0.5$

on conserve le zéro

$$\frac{\alpha(z - 0.9)}{z(z - 0.5)} = \frac{\alpha z - 0.9\alpha}{z^2 - 0.5z}$$

les coefficients α doit être choisis tel que

$$\alpha - 0.9\alpha = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\alpha(1 - 0.9) = 0.5$$

$$\alpha \cdot 0.1 = 0.5$$

$$\underline{\underline{\alpha = 5}}$$

$$H_m(z) = \frac{5z - 4.5}{z^2 - 0.5z}$$

2. Déterminer un régulateur RST.

$$\frac{BT}{AR + BS} = H_m(z)$$



$$A_0(z) = z$$

$$\frac{A \cdot T}{(AR + BS)z} = (z^2 - 0.5z)z$$

$$BT = (5z - 4.5)z$$

Problème 4 Effectuer la transformée de Fourier

discrete de la séquence

$\{1, 1, 0, 0, 0, 0\}$

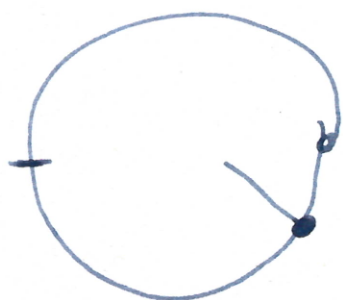
$$N=6$$

$$N-1=5$$

$$X(N) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk}$$

$$W_N^{-nh} = e^{-2\pi j \frac{nh}{N}}$$

$$1 + e^{-2\pi j \frac{1}{5}} + e^{-2\pi j \frac{4}{5}} + e^{-2\pi j \frac{5}{5}}$$



$$1 + e^{-j \frac{2\pi}{5}} + e^{-j \frac{3\pi}{5}} + e^{-j 2\pi}$$

$n =$	
0	$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j 2\pi \frac{nk}{N}} = 1 + e^{-j \frac{2\pi}{5}} + e^{-j 2\pi \frac{4}{5}}$
1	
2	
3	
4	
5	

$$\begin{array}{l}
 n=0 \quad 1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{4\pi}{3}} + 1 \\
 1 \quad 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} \\
 2 \quad 1 + e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\frac{8\pi}{3}} \\
 3 \quad 1 + e^{-j\frac{6\pi}{3}} + e^{-j\frac{12\pi}{3}}
 \end{array}$$

$$X(n) = \sum_{h=0}^3 x(h) e^{-j2\pi \frac{nh}{4}}$$

$$X(0) = \sum_{h=0}^3 x(h) = 1+1 = 2$$

$$X(1) = \sum_{h=0}^3 x(h) e^{-j2\pi \frac{h}{4}} = 1 + e^{-j2\pi \frac{1}{4}} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$X(2) = \sum_{h=0}^3 x(h) e^{-j2\pi \frac{2h}{4}} = 1 + \frac{e^{-j2\pi \frac{2}{4}}}{e^{-j\pi}} = 1 + \frac{e^{-j\pi}}{e^{-j\pi}} = 1 + 1 = 2$$

$$X(3) = \sum_{h=0}^3 x(h) e^{-j2\pi \frac{3h}{4}} = 1 + e^{-j2\pi \frac{3}{4}} = 1 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 + j$$

$$X(0) = 2$$

$$X(1) = 1 - j$$

$$X(2) = 1 + 1 = 2$$

$$X(3) = 1 + j$$

$$\{2, 1-j, 2, 1+j\}$$

Transformée de Fourier directe

$$X(n) = \{2, 0, 0, 0\}$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} X(n) W_N^{kn}$$

$$X(k) = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^2 X(n) W_N^{kn}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & & & \end{array}$$

$$\frac{1}{4} X(0) = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^2 2 = \frac{1}{2}$$

$$X(1) = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^2 2 \cdot W e^{j 2\pi \frac{0 \cdot 2}{N}} = \frac{1}{2}$$

$$X(2) = \frac{1}{2}$$

$$X(3) = \frac{1}{2}$$

à cause du fait que
nul $k \neq 0$ compte.

$$X(k) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Interprétation : (c'est la composante moyenne du
signal qui est retournée