

# Régulateur RST

## *OBJECTIFS*

- *Définir le régulateur à deux degrés de liberté RST.*
- *Développer une méthode de synthèse algébrique du régulateur RST.*
- *Offrir quelques commentaires sur les effets d'un intégrateur et les amplitudes de la grandeur de commande.*
- *Présenter des variantes du régulateur RST.*

### 10.1 Introduction

Ce chapitre est entièrement dévolu au régulateur RST, nom provenant des trois polynômes qu'il fait intervenir. Sa synthèse est à classer dans les filières 4 et 6 de la figure 8.1.

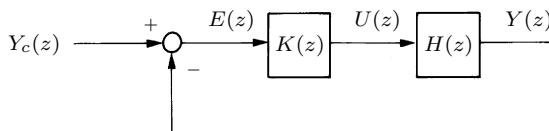
Les régulateurs numériques standard examinés tout au long des chapitres précédents peuvent dans une certaine mesure être considérés comme des traductions discrètes de fonctions relativement rudimentaires d'essence analogique. L'immense potentiel numérique offert par une commande par ordinateur est de la sorte peu valorisé. Le régulateur RST, quant à lui, est un algorithme plus sophistiqué tirant bénéfice des ressources numériques disponibles. Cette sophistication permet d'imposer, en plus des pôles en boucle fermée, certains zéros en boucle fermée. Le second degré de liberté ainsi introduit autorise la poursuite, sans écart permanent, de consignes pratiquement quelconques. De surcroît, les pôles en boucle fermée peuvent tous être positionnés n'importe où dans le cercle unité. Une solution unique et à degré minimal existe ; elle s'obtient en suivant une voie algébrique transparente et rigoureuse, évitant l'aspect itératif et quelque peu empirique des approches traditionnelles ; ceci est particulièrement attractif quand plusieurs corrections de nature avance-retard de phase seraient nécessaires pour tenter de satisfaire de sévères spécifications. Le concept de commande a priori, incluant un filtre adoucissant le signal de consigne, devient limpide dans la structure RST. Finalement, certaines contraintes inhérentes à l'architecture classique peuvent être assouplies.

Le régulateur RST est défini dans la section 10.2. Une méthode de synthèse du régulateur RST est détaillée dans la section 10.3. Les fondements sont tout

d'abord posés dans le paragraphe 10.3.1. L'imposition d'un modèle à poursuivre est ensuite explorée dans le paragraphe 10.3.2 avant de passer, dans le paragraphe 10.3.3, à l'équation diophantine permettant un dimensionnement systématique du régulateur. Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution réalisable à degré minimal sont regroupées dans le paragraphe 10.3.4. Le paragraphe 10.3.5 fournit d'utiles renseignements sur le choix du modèle à poursuivre. Plusieurs algorithmes de synthèse sont détaillés dans le paragraphe 10.3.6 et illustrés par des exemples. La section 10.4 offre quelques compléments d'information sur l'influence d'un intégrateur (§ 10.4.1) et sur les amplitudes de la grandeur de commande (§ 10.4.2). D'intéressantes variantes du régulateur RST sont proposées dans la section 10.5 : mise en évidence de la commande a priori (§ 10.5.1), simplification de pôles et de zéros (§ 10.5.2), poursuite et régulation à objectifs différents (§ 10.5.3) et enfin synthèse par calibrage fréquentiel (§ 10.5.4).

## 10.2 Définitions

Reprendons l'architecture classique d'un système automatique en poursuite, tel que représenté dans la figure 5.13 et répété dans la figure 10.1 par commodité.



**Fig. 10.1** Schéma fonctionnel du montage en asservissement avec un régulateur classique.

$Y_c(z)$ ,  $U(z)$  et  $Y(z)$  dénotent les grandeurs de consigne, de commande et à commander, respectivement ;  $K(z)$  est la fonction de transfert du régulateur, de type PID par exemple ;  $H(z)$  désigne la fonction de transfert échantillonnée du processus à commander, donnée par la formule  $H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}(G(s)/s)\}$ , où  $G(s)$  est la fonction de transfert analogique du système que l'on désire commander ;  $K(z)$  est une fonction rationnelle propre :

$$K(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

Les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  possèdent des degrés adéquats ;  $H(z)$  est une fonction rationnelle strictement propre (§ 5.2.1) :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Comme toujours,  $A(z)$  est monique ; nous supposons finalement que  $A(z)$  et  $B(z)$  n'ont aucun facteur commun (autre que numérique). L'algorithme de commande est décrit par l'équation polynomiale :

$$R(z)U(z) = S(z)Y_c(z) - S(z)Y(z) \quad (10.1)$$

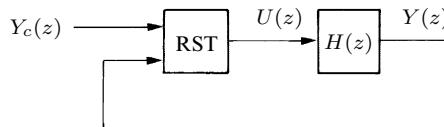
Et la fonction de transfert en boucle fermée est fournie par :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} \quad (10.2)$$

Le **régulateur RST** généralise cette structure classique ; à la place du seul polynôme  $S(z)$  apparaissant en facteur dans les deux termes constituant le membre de droite de l'égalité (10.1), on introduit deux polynômes  $S(z)$  et  $T(z)$  distincts :

$$R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z) \quad (10.3)$$

Il n'y a donc plus de comparaison directe entre  $Y_c(z)$  et  $Y(z)$ , générant l'écart  $E(z) = Y_c(z) - Y(z)$  ; le schéma fonctionnel de la figure 10.1 est remplacé par celui de la figure 10.2.



**Fig. 10.2** Schéma fonctionnel du montage en asservissement avec un régulateur RST.

L'équation (10.3) du régulateur RST s'écrit :

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \quad (10.4)$$

L'égalité  $Y(z) = H(z)U(z)$  implique :

$$Y(z) = H(z) \left( \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \right)$$

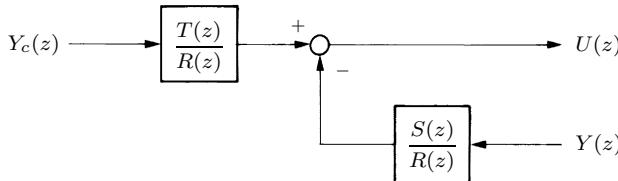
Il en découle, après avoir remplacé  $H(z)$  par  $B(z)/A(z)$ , la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} \quad (10.5)$$

Une comparaison entre (10.2) et (10.5) fait ressortir une différence cruciale : au numérateur de (10.2) apparaît  $S(z)$ , polynôme également mis en jeu dans le dénominateur de cette expression ; par contre, le numérateur de la fonction de transfert (10.5) contient le polynôme  $T(z)$  qui est absent de son dénominateur. Les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  aux dénominateurs de (10.2) et (10.5) sont souvent ajustés afin de positionner les pôles en boucle fermée (sect. 9.7). Dans l'architecture classique, les zéros en boucle fermée sont dès lors fixés, puisqu'égaux aux zéros de  $B(z)$  (zéros du processus à commander) et de  $S(z)$ . Par contre, dans une commande RST, il est possible de placer des zéros en boucle fermée au moyen du polynôme additionnel  $T(z)$ . Un degré de liberté supplémentaire est de la sorte in-

troduit. L'imposition de zéros en boucle fermée se révèle particulièrement attractif pour les asservissements à hautes performances, comme cela sera démontré dans le paragraphe 10.3.5. Le régulateur RST est dit *à deux degrés de liberté* pour refléter ce potentiel étendu.

L'appellation ci-dessus se justifie aussi par le fait, résultant de (10.4) et illustré dans la figure 10.3, que la consigne  $Y_c(z)$  et la rétroaction de la grandeur à commander  $Y(z)$  sont filtrées par deux fonctions de transfert  $T(z)/R(z)$  et  $S(z)/R(z)$  distinctes.



**Fig. 10.3** Régulateur RST sous la forme d'un schéma fonctionnel dit *à trois branches*.

Dans la structure classique, la somme des fonction de sensibilité  $\mathcal{S}(z)$  et de sensibilité complémentaire  $\mathcal{T}(z)$  sont liées par :

$$\mathcal{S}(z) + \mathcal{T}(z) = \frac{1}{1 + K(z)H(z)} + \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} = 1 \quad (10.6)$$

Cette contrainte algébrique impose de sévères restrictions évoquées entre autres dans la section 9.6 ; par exemple, il n'est pas possible d'exiger simultanément de bonnes performances (module de  $\mathcal{S}(e^{j\omega h})$  petit) et de rejeter des bruits de mesure (module de  $\mathcal{T}(e^{j\omega h})$  petit). Dans une commande RST, les écarts permanents d'asservissement ne s'évaluent plus via la fonction de sensibilité, si bien que certaines limitations imposées par l'égalité (10.6) peuvent être assouplies. Une fois encore, il s'agit d'une conséquence du degré de liberté additionnel intrinsèque au régulateur RST.

Le polynôme  $R(z)$  est monique de degré  $\delta R$  :

$$R(z) = z^{\delta R} + r_1 z^{\delta R - 1} + \cdots + r_{\delta R}$$

Dénotons  $\delta S$  le degré du polynôme  $S(z)$  :

$$S(z) = s_0 z^{\delta S} + s_1 z^{\delta S - 1} + \cdots + s_{\delta S}$$

Et soit  $\delta T$  le degré du polynôme  $T(z)$  :

$$T(z) = t_0 z^{\delta T} + t_1 z^{\delta T - 1} + \cdots + t_{\delta T}$$

La causalité de la fonction de transfert  $T(z)/R(z)$  liant  $Y_c(z)$  à  $U(z)$  requiert un surplus de pôles  $\delta R - \delta T \geq 0$ ; et la causalité de la fonction de transfert  $-S(z)/R(z)$  entre  $Y(z)$  et  $U(z)$  exige  $\delta R - \delta S \geq 0$ . Dans le but d'utiliser sans

retard la consigne, comme dans la section 5.3 (implantation standard), on sélectionne souvent  $\delta R = \delta T$ ; de même,  $\delta R = \delta S$  pour employer au plus vite la grandeur à commander; ceci n'est réalisable que si le temps de calcul et de conversion est négligeable vis-à-vis de la période d'échantillonnage. Alors :

$$\delta R = \delta S = \delta T \quad (10.7)$$

Dans ce cas, (10.4) devient :

$$U(z) = \frac{t_0 z^{\delta R} + t_1 z^{\delta R-1} + \cdots + t_{\delta R}}{z^{\delta R} + r_1 z^{\delta R-1} + \cdots + r_{\delta R}} Y_c(z) - \frac{s_0 z^{\delta R} + s_1 z^{\delta R-1} + \cdots + s_{\delta R}}{z^{\delta R} + r_1 z^{\delta R-1} + \cdots + r_{\delta R}} Y(z)$$

En puissances négatives de  $z$  et après avoir multiplié les deux membres de cette égalité par  $R(z)$ :

$$(1 + r_1 z^{-1} + \cdots + r_{\delta R} z^{-\delta R}) U(z) = (t_0 + t_1 z^{-1} + \cdots + t_{\delta R} z^{-\delta R}) Y_c(z) \\ - (s_0 + s_1 z^{-1} + \cdots + s_{\delta R} z^{-\delta R}) Y(z)$$

Dans le domaine temporel, en introduisant l'opérateur retard  $q^{-1}$ :

$$(1 + r_1 q^{-1} + \cdots + r_{\delta R} q^{-\delta R}) u(k) = (t_0 + t_1 q^{-1} + \cdots + t_{\delta R} q^{-\delta R}) y_c(k) \\ - (s_0 + s_1 q^{-1} + \cdots + s_{\delta R} q^{-\delta R}) y(k)$$

D'où, finalement :

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - \cdots - r_{\delta R} u(k-\delta R) \\ + t_0 y_c(k) + t_1 y_c(k-1) + \cdots + t_{\delta R} y_c(k-\delta R) \\ - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) - \cdots - s_{\delta R} y(k-\delta R)$$

Le code réalisant le régulateur RST se fonde directement sur cette équation. Une faute à éviter est d'implanter le régulateur directement selon la formule (10.4), en calculant puis en soustrayant les signaux  $\frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z)$  et  $\frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$ , comme cela apparaît dans la figure 10.3. En effet, les fonctions de transfert  $T(z)/R(z)$  et  $S(z)/R(z)$  ne jouissent pas forcément de la propriété de stabilité BIBO. Le lecteur est renvoyé à la section 5.3 pour de plus amples informations ayant trait à la réalisation d'un régulateur.

Quand le temps de calcul et de conversion est égal à la période d'échantillonnage  $h$ , ou encore lorsqu'il est souhaitable que le retard découlant de l'exécution de l'algorithme et des conversions soit fixe (et égal à  $h$ ), un surplus de pôles valant 1 est délibérément placé dans les fonctions de transfert liant  $Y_c(z)$  à  $U(z)$  et  $Y(z)$  à  $U(z)$ ; par conséquent, il faut remplacer (10.7) par :

$$\delta R - 1 = \delta S = \delta T$$

L'équation (10.4) s'écrit alors :

$$U(z) = \frac{t_0 z^{\delta R-1} + t_1 z^{\delta R-2} + \cdots + t_{\delta R-1}}{z^{\delta R} + r_1 z^{\delta R-1} + \cdots + r_{\delta R}} Y_c(z) \\ - \frac{s_0 z^{\delta R-1} + s_1 z^{\delta R-2} + \cdots + s_{\delta R-1}}{z^{\delta R} + r_1 z^{\delta R-1} + \cdots + r_{\delta R}} Y(z)$$

D'où :

$$U(z) = \frac{t_0 + t_1 z^{-1} + \cdots + t_{\delta R-1} z^{-\delta R+1}}{z + r_1 + \cdots + r_{\delta R} z^{-\delta R+1}} Y_c(z)$$

$$- \frac{s_0 + s_1 z^{-1} + \cdots + s_{\delta R-1} z^{-\delta R+1}}{z + r_1 + \cdots + r_{\delta R} z^{-\delta R+1}} Y(z)$$

Dans le domaine temporel :

$$(q + r_1 + \cdots + r_{\delta R} q^{-\delta R+1}) u(k) = (t_0 + t_1 q^{-1} + \cdots + t_{\delta R-1} q^{-\delta R+1}) y_c(k)$$

$$- (s_0 + s_1 q^{-1} + \cdots + s_{\delta R-1} q^{-\delta R+1}) y(k)$$

Finalement :

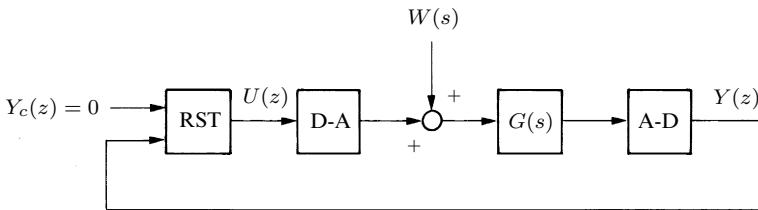
$$u(k+1) = -r_1 u(k) - \cdots - r_{\delta R} u(k-\delta R+1)$$

$$+ t_0 y_c(k) + t_1 y_c(k-1) + \cdots + t_{\delta R-1} y_c(k-\delta R+1)$$

$$- s_0 y(k) - s_1 y(k-1) - \cdots - s_{\delta R-1} y(k-\delta R+1)$$

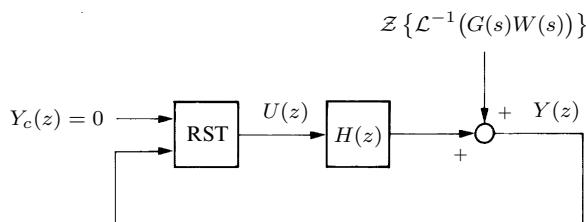
Là encore, le code du régulateur RST se base sur cette égalité.

Considérons maintenant le montage en régulation, dans lequel la consigne  $y_c(k)$  est nulle tandis qu'une perturbation analogique  $w(t)$  agit de manière additive en amont du processus à commander (fig. 10.4).



**Fig. 10.4** Schéma fonctionnel du montage en régulation avec un régulateur RST.

Les transformations successives effectuées dans le paragraphe 5.4.2 et résumées dans les figures 5.17 à 5.20 ne mettent pas en jeu l'algorithme de commande et sont donc toujours valides ; elles conduisent à la figure 10.5.



**Fig. 10.5** Schéma fonctionnel du montage en régulation avec un régulateur RST, après calcul de  $H(z)$ .

On en déduit l'influence de la perturbation sur la grandeur à commander :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}(G(s)W(s))\} + H(z) \left( -\frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \right)$$

D'où, en posant  $K(z) = S(z)/R(z)$  :

$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}(G(s)W(s))\}}{1 + K(z)H(z)}$$

Cette formule est identique à (5.13). Ainsi, en régulation, l'algorithme RST se comporte comme l'architecture classique. Les résultats du paragraphe 5.4.2 demeurent valables, de même que ceux du paragraphe 7.6.2 et de la fin de la section 7.7 relatifs aux écarts permanents. Le principe du modèle interne s'applique encore en régulation RST. Soulignons la nécessité, pour rejeter parfaitement des perturbations, de  $\ell$  effets intégrateurs, obtenus en posant dans tous les développements précédents et à venir :

$$R(z) = (z - 1)^\ell R'(z)$$

Le polynôme  $R(z)$  inclut le facteur préspécifié  $(z - 1)^\ell$ ;  $R(z)$  étant monique, il en est de même pour  $R'(z)$ . La fonction de transfert  $K(z) = S(z)/R(z)$  s'écrit alors :

$$K(z) = \frac{S(z)}{(z - 1)^\ell R'(z)}$$

Et la fonction de transfert  $T(z)/R(z)$  devient :

$$\frac{T(z)}{(z - 1)^\ell R'(z)}$$

Les conditions de causalité imposent maintenant  $\delta R' + \ell - \delta S \geq 0$  et  $\delta R' + \ell - \delta T \geq 0$ . Ces intégrateurs se rencontrent parfois sous le nom de **compensateur de perturbation**;  $\ell$  est son **type** ou sa **classe**.

Dans un cadre plus général, la partie fixée  $P_R(z)$  du polynôme  $R(z)$ , pas forcément égale à  $(z - 1)^\ell$ , doit avoir pour zéros les pôles de la perturbation afin d'être cohérent avec le principe du modèle interne;  $R(z)$  est dans ce cas contraint à exhiber la structure suivante :

$$R(z) = P_R(z)R'(z)$$

Le polynôme  $P_R(z)$  dépend bien sûr de la perturbation à rejeter. Les atouts de parties préspécifiées dans les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  seront discutés dans le paragraphe 10.5.4.

## 10.3 Synthèse algébrique du régulateur RST

### 10.3.1 Principe de la synthèse

La fonction de transfert du montage en asservissement est :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

Les polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  du régulateur RST vont être dimensionnés afin que cette fonction de transfert en boucle fermée soit égale à la fonction de transfert  $H_m(z)$  d'un **modèle à poursuivre**, ou **modèle de référence**, donné par l'utilisateur :

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

$H_m(z)$  est une fonction rationnelle strictement propre ; en outre, le polynôme  $A_m(z)$  est monique et ses zéros sont tous à l'intérieur du cercle unité. Des indications sur un choix correct de  $H_m(z)$  seront offertes au fil des pages suivantes. La figure 10.6 illustre cette philosophie, qui n'est pas sans rappeler celle du paragraphe 1.7.6.

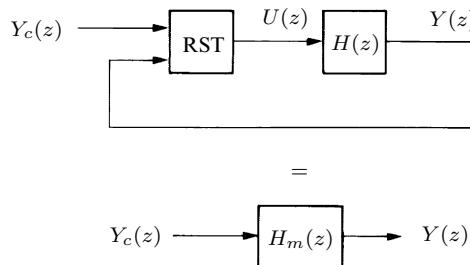


Fig. 10.6 Principe de la synthèse algébrique du régulateur RST.

Lors de la synthèse dans le lieu des pôles d'un régulateur classique, examinée dans la section 9.7, les pôles du système en boucle fermée sont positionnés dans des endroits permettant de satisfaire des spécifications sur l'amortissement du régime transitoire. De par la simplicité de la structure classique, ce positionnement est limité à certaines régions du plan complexe et les spécifications ne peuvent pas toujours être vérifiées. L'approche est itérative et semée d'embûches ; son aspect empirique la rend impossible à transcrire sous une forme algébrique. Le dimensionnement du régulateur RST qui va être présenté généralise considérablement la synthèse dans le lieu des pôles. On désire toujours placer les pôles du système en boucle fermée dans le but de maîtriser le régime transitoire. Toutefois, il est possible de distribuer ces pôles arbitrairement dans le cercle unité. De surcroît, le degré de  $A_m(z)$  n'est pas forcément égal à celui du polynôme caractéristique en boucle fermée  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  ; en fait, un modèle à poursuivre simple, avec un polynôme  $A_m(z)$  de degré inférieur à celui de  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$ , peut

être sélectionné. Vu que le régulateur RST est à deux degrés de liberté (sect. 10.2), les zéros en boucle fermée peuvent aussi, du moins dans une certaine mesure, être positionnés à volonté dans le plan complexe. Plutôt que d'une synthèse par placement des pôles, il s'agit véritablement d'une synthèse par imposition d'un modèle complet, incluant les pôles *et* des zéros. Finalement, la synthèse du régulateur RST est d'essence algébrique et se prête admirablement à être codée ; elle peut entre autres être mise en œuvre dans un schéma de commande adaptative, comme nous le verrons dans le chapitre 12.

Les spécifications courantes sont toujours celles passées en revue dans les sections 9.2 à 9.6. Elles sont rappelées ci-dessous.

Il résulte du principe même de la synthèse du régulateur RST que, en asservissement, l'*amortissement du régime transitoire* dépend étroitement des pôles du modèle à poursuivre  $H_m(z) = B_m(z)/A_m(z)$ . Afin de satisfaire des conditions absolue et relative d'amortissement, les zéros du polynôme  $A_m(z)$  appartiendront donc à une région telle que celle en tramé dans la figure 9.7.

En ce qui concerne les *performances en régime permanent*, le modèle à poursuivre  $H_m(z)$  doit être choisi de telle sorte que la différence  $y_c(k) - y(k)$  entre son entrée  $y_c(k)$  et sa sortie  $y(k)$  tende vers l'écart permanent d'asservissement spécifié. En effet, comme la synthèse provoque l'égalité  $H_m(z) = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$ , toute différence  $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k))$  au niveau de  $H_m(z)$  se répercute sur le système en boucle fermée comme écart permanent. Ceci est même vrai en présence d'un intégrateur, obtenu en posant dans les lignes précédentes  $R(z) = (z - 1)^\ell R'(z)$ . Par contre, un écart permanent de régulation s'élimine en insérant un intégrateur (sect. 10.2).

### EXEMPLE 10.1

Les spécifications ne tolèrent aucun statisme d'asservissement ; la transformée en  $z$  de la consigne, en forme de saut unité, vaut  $\frac{z}{z-1}$  et il faut que :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(Y_c(z) - Y(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(1 - H_m(z))Y_c(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(1 - H_m(z))\frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$H_m(1) = 1$$

Il existe un statisme d'asservissement si cette égalité n'est pas respectée, même en présence d'un intégrateur puisque la synthèse astreint  $H_m(z)$  à la fonction de transfert en boucle fermée. ■

La *fonction de transfert harmonique en boucle fermée* est égale à  $H_m(e^{j\omega h})$ , laquelle sera soigneusement choisie selon les spécifications, notamment en ce qui concerne la bande passante.

Avec  $H(z) = B(z)/A(z)$  et  $K(z) = S(z)/R(z)$ , la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{H(z)\frac{T(z)}{R(z)}}{1 + K(z)H(z)}$$

La *sensibilité* de cette expression à la fonction de transfert échantillonnée  $H(z)$  du processus à commander, considérée ici comme variable, se calcule facilement ; on trouve :

$$\mathcal{S}(z) = \frac{1}{1 + K(z)H(z)}$$

Comme dans la section 9.5, il faut que le module de  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  soit suffisamment élevé à basse fréquence pour amoindrir la sensibilité dans cette plage. Avec un intégrateur,  $K(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{S(z)}{(z-1)^\ell R'(z)}$  et cette condition est naturellement remplie.

Finalement, quelle est la *robustesse de la stabilité*, mesurée au moyen de marges ? Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les zéros du polynôme caractéristique  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$ , autrement dit les zéros de :

$$1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} = 1 + K(z)H(z)$$

Cette expression ne fait pas intervenir le polynôme  $T(z)$ , extérieur à la boucle de rétroaction ; on l'a déjà rencontrée tout au long de la section 7.4 ; les résultats des sections 7.4 et 7.5 demeurent ainsi valides. Il est alors possible, dès qu'un régulateur RST est dimensionné, d'en *analyser* la stabilité, puis sa robustesse par un calcul de marges. Quant à la *synthèse* d'un régulateur RST robuste, entre autres par calibrage fréquentiel, c'est un problème complexe dont la solution générale sort du cadre du présent ouvrage ; une approche itérative simple sera brièvement décrite dans le paragraphe 10.5.4.

### 10.3.2 Imposition du modèle à poursuivre

La synthèse d'un régulateur RST consiste à déterminer les polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  afin que :

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (10.8)$$

Les degrés des polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  sont soumis aux contraintes examinées dans la section 10.2 ; de surcroît,  $R(z)$  est monique et un intégrateur peut être requis.

**EXEMPLE 10.2**

Fixons :

$$R(z) = \frac{1}{b_0} B(z) A_m(z)$$

$$S(z) = 0$$

$$T(z) = \frac{1}{b_0} A(z) B_m(z)$$

Le nombre  $b_0$  est le coefficient mis en jeu dans le terme de degré le plus élevé dans le polynôme  $B(z)$ ; sa présence rend  $R(z)$  monique. Les conditions de causalité de l'algorithme RST sont satisfaites pour autant que :

$$\begin{aligned}\delta R - \delta T &= \delta B + \delta A_m - (\delta A + \delta B_m) \\ &= \delta A_m - \delta B_m - (\delta A - \delta B) \geq 0\end{aligned}$$

$$\delta R - \delta S = \delta B + \delta A_m \geq 0$$

D'où :

$$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$$

Le surplus de pôles du modèle à poursuivre  $H_m(z) = B_m(z)/A_m(z)$  doit être plus grand ou égal à celui du processus à commander  $H(z) = B(z)/A(z)$ .

La fonction de transfert en boucle fermée est, avec ce choix, bien égale au modèle à poursuivre :

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B(z)\frac{1}{b_0}A(z)B_m(z)}{A(z)\frac{1}{b_0}B(z)A_m(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (10.9)$$

Comme  $S(z) = 0$ , aucune rétroaction de la grandeur à commander n'existe ; c'est une solution en boucle ouverte dans laquelle les pôles et les zéros du système à commander se simplifient selon (10.9). Cette solution est manifestement équivalente à la commande a priori apparaissant dans la figure 9.66, bien sûr sans la rétroaction en place dans ce schéma fonctionnel. En plus des inconvénients intrinsèques à une commande en boucle ouverte, par exemple un mauvais rejet des perturbations, une telle approche peut dans la réalité se révéler inacceptable. En effet, le modèle  $H(z) = B(z)/A(z)$  du processus à commander est toujours, à cause de fluctuations et d'erreurs de modélisation, distinct de la fonction de transfert  $H^0(z) = B^0(z)/A^0(z)$  du système réel. Le régulateur RST dimensionné sur la base du modèle  $H(z)$ , mais appliqué au processus physique  $H^0(z)$ , conduit à la fonction de transfert en boucle fermée réelle :

$$\frac{B^0(z)T(z)}{A^0(z)R(z) + B^0(z)S(z)} = \frac{B^0(z)\frac{1}{b_0}A(z)B_m(z)}{A^0(z)\frac{1}{b_0}B(z)A_m(z)} = \frac{B^0(z)A(z)B_m(z)}{A^0(z)B(z)A_m(z)}$$

On remarque immédiatement que le régime transitoire renferme des modes non bornés dès que le système à commander est instable (zéros de  $A^0(z)$  sur ou à l'extérieur du cercle unité) ou à non-minimum de phase (zéros de  $B(z)$  sur ou à l'extérieur du cercle unité).

### EXEMPLE 10.3

Soit la sélection :

$$R(z) = \frac{1}{b_0} B(z)(A_m(z) - B_m(z))$$

$$S(z) = T(z) = \frac{1}{b_0} A(z)B_m(z)$$

Le nombre  $b_0$  est le coefficient apparaissant dans le terme de degré le plus grand dans le polynôme  $B(z)$ . Là encore, la causalité du régulateur RST est assurée quand le surplus de pôles du modèle à poursuivre  $H_m(z) = B_m(z)/A_m(z)$  est plus grand ou égal à celui du processus à commander  $H(z) = B(z)/A(z)$ .

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{aligned} & \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} \\ &= \frac{B(z)\frac{1}{b_0}A(z)B_m(z)}{A(z)\frac{1}{b_0}B(z)(A_m(z) - B_m(z)) + B(z)\frac{1}{b_0}A(z)B_m(z)} \\ &= \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \end{aligned}$$

Vu que  $S(z) = T(z)$ , la configuration du régulateur est ici classique, décrite par l'équation (10.1). Bien qu'une rétroaction de la grandeur à commander soit réalisée, le régime transitoire peut en réalité contenir des modes indésirables. Il n'est au surplus pas possible, avec le choix du polynôme  $R(z)$ , d'y inclure un intégrateur. ■

Ces deux exemples illustrent des choix très simples, mais qui se révèlent inadaptés. Une approche permettant d'incorporer aisément un intégrateur, entre autres, est maintenant élaborée.

Comme cela est mentionné dans le paragraphe 10.3.1, le modèle à poursuivre  $B_m(z)/A_m(z)$  peut être d'ordre inférieur à celui du système en boucle fermée  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$ . Afin de vérifier l'égalité (10.8), il doit exister, dans l'expression  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$ , des simplifications de zéros avec des pôles. Nous allons par conséquent dimensionner les polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  de manière à provoquer ces simplifications.

Le polynôme  $B(z)$  est factorisé en un facteur  $B^+(z)$ , qui sera également un facteur du polynôme caractéristique en boucle fermée  $A(z)R(z)+B(z)S(z)$  pour

obtenir des simplifications dans  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$ , et un facteur  $B^-(z)$ , dont aucun zéro n'est zéro de  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  :

$$B(z) = B^+(z)B^-(z) \quad (10.10)$$

Le membre de droite de cette égalité est appelé une **factorisation spectrale** de  $B(z)$ . Des informations sur la sélection de  $B^+(z)$  seront fournies à la fin du présent paragraphe ; signalons néanmoins ici que  $B^+(z)$  est monique dans le but d'avoir une factorisation (10.10) unique. L'égalité suivante est donc désirée :

$$\frac{B^+(z)B^-(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (10.11)$$

Ou, de façon équivalente :

$$B^+(z)B^-(z)T(z)A_m(z) = (A(z)R(z) + B(z)S(z))B_m(z)$$

Etant donné qu'aucun zéro de  $B^-(z)$  n'est zéro de  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$ , tous les zéros de  $B^-(z)$  doivent être des zéros de  $B_m(z)$  ; le polynôme  $B^-(z)$  est ainsi un facteur de  $B_m(z)$ , qui prend la forme :

$$B_m(z) = B^-(z)B'_m(z) \quad (10.12)$$

$B^+(z)$  est un facteur de  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$ . Tous les zéros de  $B^+(z)$  sont alors des zéros de  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  et, vu que  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A(z)R(z) + B^+(z)B^-(z)S(z)$ , ce sont des zéros de  $A(z)R(z)$ . Aucun zéro de  $B^+(z)$  ne peut être zéro de  $A(z)$  car  $A(z)$  et  $B(z) = B^+(z)B^-(z)$  n'ont pas hypothèse aucun facteur commun. Tous les zéros de  $B^+(z)$  sont par conséquent des zéros de  $R(z)$  ; on en conclut que  $B^+(z)$  est un facteur de  $R(z)$ , ce qui se traduit par :

$$R(z) = B^+(z)\bar{R}(z) \quad (10.13)$$

Les polynômes  $R(z)$  et  $B^+(z)$  étant tous deux moniques, il en est de même du polynôme  $\bar{R}(z)$ . La relation (10.11) devient, après substitution de (10.12) et (10.13) :

$$\frac{B^+(z)B^-(z)T(z)}{B^+(z)(A(z)\bar{R}(z) + B^-(z)S(z))} = \frac{B^-(z)B'_m(z)}{A_m(z)}$$

En simplifiant :

$$\frac{T(z)}{A(z)\bar{R}(z) + B^-(z)S(z)} = \frac{B'_m(z)}{A_m(z)}$$

Afin de vérifier cette égalité, le polynôme  $T(z)$  est pris égal au polynôme  $B'_m(z)$ , à un polynôme monique  $A_0(z)$  en facteur près, et  $A(z)\bar{R}(z) + B^-(z)S(z)$  est choisi égal à  $A_m(z)$ , au *même* facteur  $A_0(z)$  près :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) \quad (10.14)$$

$$A(z)\bar{R}(z) + B^-(z)S(z) = A_m(z)A_0(z) \quad (10.15)$$

Le facteur  $A_0(z)$  est fréquemment rencontré sous le nom de **polynôme observateur**.

En résumé, les polynômes  $B(z)T(z)$  et  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  sont en quelque sorte façonnés pour qu'ils contiennent tous deux en facteurs les polynômes  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$ . La fonction de transfert en boucle fermée  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$  se simplifie mathématiquement par les polynômes  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$  pour aboutir au modèle à poursuivre  $B_m(z)/A_m(z)$  :

$$\begin{aligned} \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} &= \frac{B^+(z)B^-(z)T(z)}{B^+(z)(A(z)\bar{R}(z) + B^-(z)S(z))} \\ &= \frac{B^+(z)B^-(z)B'_m(z)A_0(z)}{B^+(z)A_m(z)A_0(z)} \\ &= \frac{A_0(z)B^+(z)B_m(z)}{A_0(z)B^+(z)A_m(z)} \\ &= \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \end{aligned}$$

Lorsqu'un intégrateur est inclus,  $R(z) = (z - 1)^\ell R'(z)$ . Ainsi, l'égalité (10.8) devient :

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)(z - 1)^\ell R'(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

La démarche précédente, avec  $(z - 1)^\ell R'(z)$  en lieu et place de  $R(z)$ , demeure valide. En particulier, les zéros de  $B^+(z)$  doivent être des zéros de  $(z - 1)^\ell R'(z)$ ; aucun zéro de  $B^+(z)$  ne pouvant être égal à 1 pour des motifs qui seront éclaircis ci-dessous, les zéros de  $B^+(z)$  sont des zéros de  $R'(z)$  et  $B^+(z)$  est un facteur de  $R'(z)$  :

$$R'(z) = B^+(z)\bar{R}'(z)$$

$\bar{R}'(z)$  est monique car  $R'(z)$  et  $B^+(z)$  sont moniques ; en outre, il est évident que  $\bar{R}(z) = (z - 1)^\ell \bar{R}'(z)$ . L'équation (10.15) prend maintenant la forme :

$$A(z)(z - 1)^\ell \bar{R}'(z) + B^-(z)S(z) = A_m(z)A_0(z) \quad (10.16)$$

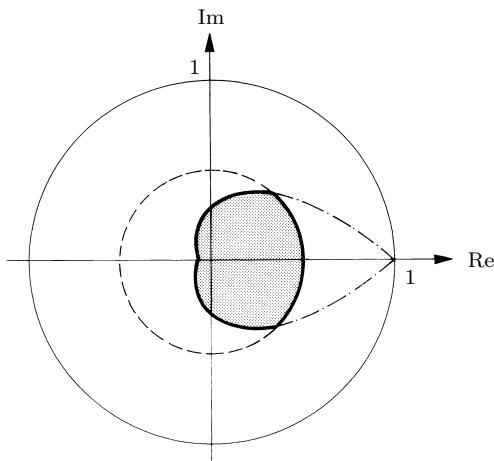
Quelques commentaires relatifs au choix des polynômes  $B^+(z)$  et  $A_0(z)$  sont maintenant proposés.

Par le principe même de la synthèse du régulateur RST, les pôles du système en boucle fermée sont, pour le montage en asservissement, mathématiquement les pôles du modèle à poursuivre  $H_m(z) = B_m(z)/A_m(z)$ , à savoir les zéros de  $A_m(z)$ . En réalité, le modèle du processus à commander  $H(z) = B(z)/A(z)$ , sur lequel se fonde la synthèse, est distinct du système à commander  $H^0(z) = B^0(z)/A^0(z)$  physique, ceci étant dû à des fluctuations et à des erreurs de modélisation. Le processus en boucle fermée est donc décrit par la fonction de transfert  $\frac{B^0(z)T(z)}{A^0(z)R(z) + B^0(z)S(z)}$ , qui ne se simplifie nullement et dont les pôles sont les zéros du polynôme caractéristique en boucle fermée  $A^0(z)R(z) + B^0(z)S(z)$ . Ces zéros peuvent être plus nombreux que les zéros de  $A_m(z)$  et, le plus souvent, il n'existe

même aucun zéro commun ! Toutefois, quand les fonctions de transfert  $H(z)$  et  $H^0(z)$  sont voisines, suite à une modélisation suffisamment fine, les polynômes caractéristiques  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  et  $A^0(z)R(z) + B^0(z)S(z)$  diffèrent peu ; vu que les zéros de tout polynôme varient continûment avec leurs coefficients, les zéros de ces polynômes sont proches. En multipliant les deux membres de (10.15) (ou (10.16)) par  $B^+(z)$ , nous avons  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)B^+(z)$  ; par conséquent, les zéros de  $A^0(z)R(z) + B^0(z)S(z)$  sont environ les zéros de  $A_m(z)$ , de  $A_0(z)$  et de  $B^+(z)$  : les pôles du système en boucle fermée réel sont approximativement les zéros de  $A_m(z)$ , auxquels s'ajoutent les zéros du polynôme observateur  $A_0(z)$  et les zéros de  $B^+(z)$ . Les pôles engendrent des modes, comme on l'a montré dans le paragraphe 4.5.2 ; il est vital d'enrayer l'influence des modes parasites découlant des zéros de  $A_0(z)$  et de  $B^+(z)$ , modes superposés à ceux réellement désirés, lesquels sont issus des zéros de  $A_m(z)$ .

Il importe de se souvenir que, si un pôle  $p$  d'une fonction de transfert est proche, tout en étant différent, de l'un de ses zéros  $b$ , il n'y a pas de simplification mathématique des facteurs  $z - p$  et  $z - b$ . Un signal  $cp^k$  subsiste à la sortie. Le coefficient  $c$ , proportionnel à l'écart  $p - b$  (§ 4.5.2), est d'autant plus faible que le pôle est près du zéro. Toutefois, le mode  $p^k$  peut prendre une importance prépondérante suivant la valeur de  $p$ , notamment si  $|p| > 1$ . Dans le contexte de la synthèse du régulateur RST, une simplification par les polynômes  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$  est recherchée. L'emplacement des zéros de ces polynômes est dès lors vitale pour garantir une décroissance acceptable des modes parasites.

Le polynôme observateur  $A_0(z)$  est fixé par l'utilisateur. Au vu de la discussion précédente, ses zéros doivent nécessairement être à l'intérieur du cercle unité ; toutefois, cette condition n'est généralement pas suffisante. Les modes parasites dus à  $A_0(z)$  sont en pratique soumis à de sévères conditions absolue et relative d'amortissement afin que leur décroissance temporelle soit plus rapide que celle des modes effectivement souhaités (sect. 9.4). Typiquement, les zéros de  $A_0(z)$  sont choisis dans une région comme celle en tramé de la figure 10.7.



**Fig. 10.7** Région dans laquelle doivent se situer les zéros des polynômes  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$ .

Un **polynôme à réponse pile**, caractérisé par  $A_0(z) = z^{\delta A_0}$ , est parfois sélectionné ;  $\delta A_0$  dénote le degré de  $A_0(z)$ . Il découle du paragraphe 4.4.1 que le signal parasite provenant du polynôme observateur est alors simplement une somme pondérée et *finie* d'impulsions unité apparaissant aux instants  $0, h, \dots, \delta A_0 h$ . Plus souvent, la dynamique associée au polynôme observateur est prise deux à trois fois plus rapide que la dynamique principale du modèle à poursuivre ; en d'autres termes, les zéros du polynôme observateur sont, en module, choisis deux à trois fois plus petits que le ou les pôles dominants de  $H_m(z)$ . Les modes générés avec cette option s'amortissent plus en douceur que dans une réponse pile, exigeant un effort de commande modéré.

Les zéros du polynôme  $B^+(z)$  doivent pour les mêmes raisons être à l'intérieur du cercle unité. Une restriction supplémentaire consiste à imposer des conditions absolue et relative d'amortissement. Dans ce cas, les zéros de  $B^+(z)$  appartiennent à la région en tramé de la figure 10.7. Rappelons que des processus à commander à non-minimum de phase possèdent des zéros sur ou à l'extérieur du cercle unité. L'incorporation de ces zéros dans l'ensemble des zéros de  $B^+(z)$  est à bannir, puisqu'ils conduisent à l'instabilité. Ils doivent impérativement être des zéros de  $B^-(z)$  et, comme  $B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$ , ils doivent également être des zéros du modèle à poursuivre.

Les polynômes  $R^0(z)$ ,  $S^0(z)$  et  $T^0(z)$  réellement implantés sont distincts des polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  calculés, principalement à cause de la quantification sur les coefficients de ces polynômes. De telles erreurs sont beaucoup plus faibles que celles intervenant sur le système à commander et peuvent par conséquent être négligées.

Jusqu'à maintenant, l'accent a été mis sur le montage en asservissement. Qu'en est-il du montage en régulation et, plus généralement, d'autres fonctions de transfert ? Il ressort de la section 10.2 et du paragraphe 5.4.2 que, pour une perturbation constante (ou lente), la fonction de transfert en régulation est :

$$\frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)} = \frac{B(z)R(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

En tenant compte de la factorisation spectrale (10.10) et vu que la synthèse assure l'égalité  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)B^+(z)$  :

$$\begin{aligned} \frac{B(z)R(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} &= \frac{B^+(z)B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z)B^+(z)} \\ &= \frac{B^+(z)B^-(z)R(z)}{B^+(z)A_m(z)A_0(z)} \\ &= \frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z)} \end{aligned}$$

Ainsi, la réponse en régulation contient les mêmes modes qu'en asservissement, provenant des zéros de  $A_m(z)$ , auxquels se superposent des modes parasites issus des zéros de  $A_0(z)$ . Ces modes parasites sont présents même dans le cas mathématique idéal, puisque le polynôme  $A_0(z)$  n'est ici plus simplifié. Si des zéros de

$A_0(z)$  se trouvent à l'extérieur du cercle unité, la stabilité BIBO est ruinée. Quand les variations de la perturbation sont significatives, les zéros de  $1 + K(z)H(z)$ , en d'autres termes les zéros du polynôme caractéristique  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$ , sont les pôles de la réponse du montage en régulation (§ 5.4.2). Le polynôme  $B^+(z)$  ne se simplifie pas et on retrouve les modes désirés découlant de  $A_m(z)$ , auxquels s'ajoutent les modes parasites engendrés par  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$ . Ces derniers ont généralement plus d'importance qu'en asservissement ; en effet, les polynômes ne se simplifient mathématiquement pas, les coefficients pondérant les modes parasites ne sont pas nécessairement petits.

La fonction de transfert  $U(z)/Y_c(z)$  entre la consigne et la grandeur de commande se calcule facilement en éliminant  $Y(z)$  des égalités  $R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z)$  et  $Y(z)/U(z) = B(z)/A(z)$  :

$$\frac{U(z)}{Y_c(z)} = \frac{A(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

Et, comme  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$  et  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)B^+(z)$  :

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{Y_c(z)} &= \frac{A(z)B'_m(z)A_0(z)}{A_m(z)A_0(z)B^+(z)} \\ &= \frac{A_0(z)A(z)B'_m(z)}{A_0(z)A_m(z)B^+(z)} \\ &= \frac{A(z)B'_m(z)}{A_m(z)B^+(z)} \end{aligned}$$

Le polynôme  $B^+(z)$  apparaît au dénominateur de cette fonction de transfert : les modes qui en résultent sont toujours contenus dans  $u(k)$ . Par exemple, un zéro de  $B^+(z)$  négatif génère assurément un mode sonnette (§ 4.5.2). Si des zéros de  $B^+(z)$  sont à l'extérieur du cercle unité, la stabilité interne (§ 7.4.1) est détruite ! Dans les conditions mathématiques idéales  $Y(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}Y_c(z)$  et le polynôme  $B^+(z)$  n'est pas un facteur de  $A_m(z)$  : aucun mode parasite n'affecte  $y(k)$ . Ceci n'est toutefois correct qu'aux instants d'échantillonnage ; les modes dans le signal  $u(k)$  générés par  $B^+(z)$  influencent la grandeur à commander analogique  $y(k)$  entre les instants d'échantillonnage.

Au vu de ces considérations, il est primordial de rappeler qu'une simplification pôle-zéro dans une fonction de transfert en boucle fermée ne signifie aucunement que cette simplification a lieu dans les autres fonctions de transfert en boucle fermée (§ 5.4.4). Dans le contexte du présent paragraphe, il y a mathématiquement simplification par les polynômes  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$  dans le montage en asservissement, par  $B^+(z)$  en régulation et par  $A_0(z)$  dans la fonction de transfert  $U(z)/Y_c(z)$ . Pour le surplus, en conditions réelles où le modèle du système à commander diffère modérément du processus physique, il existe toujours des modes parasites dus aux polynômes  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$  ; afin de maîtriser l'amortissement du régime transitoire simultanément dans toutes les situations, il faut que les zéros de  $A_0(z)$  et de  $B^+(z)$  appartiennent à un domaine tel que celui apparaissant en tramé dans la figure 10.7.

Finalement, que se passe-t-il avec des fonctions de transfert nominale  $H(z) = B(z)/A(z)$  et réelle  $H^0(z) = B^0(z)/A^0(z)$  différant substantiellement suite à une modélisation manquant de finesse ? Dans ces circonstances, les polynômes caractéristiques en boucle fermée nominal  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)B^+(z)$  et réel  $A^0(z)R(z) + B^0(z)S(z)$  ne sont plus proches ; il en est dès lors de même pour leurs zéros. Les conséquences peuvent se révéler critiques. Par exemple, avec des marges de robustesse inadéquates, les pôles en boucle fermée réels ne sont pas forcément à l'intérieur du cercle unité, bien que les zéros des polynômes  $A_m(z)$ ,  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$  le soient, anéantissant la stabilité. Le résultat général suivant montre que, en présence d'incertitudes, la fonction de transfert réelle est égale au modèle à poursuivre  $H_m(z)$  multiplié par un facteur distinct de l'unité, lequel fait intervenir l'écart  $\frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)}$  entre les inverses des fonctions de transfert réelle  $H^0(z)$  et nominale  $H(z)$ .

### Théorème 10.1

*Soit un régulateur RST dimensionné sur la base du modèle  $H(z) = B(z)/A(z)$  du système à commander. L'implantation de ce régulateur sur le processus à commander réel  $H^0(z) = B^0(z)/A^0(z)$  conduit, pour le montage en asservissement, à la fonction de transfert suivante :*

$$H_m(z) \frac{1}{1 + R(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_m(z)A_0(z)}}$$

### Démonstration

La fonction de transfert réelle du montage en asservissement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{B^0(z)T(z)}{A^0(z)R(z) + B^0(z)S(z)} &= \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot \frac{1}{\frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot \frac{R(z)}{T(z)} \left( \frac{A^0(z)}{B^0(z)} + \frac{S(z)}{R(z)} \right)} \\ &= H_m(z) \frac{1}{\frac{B_m(z)R(z)}{A_m(z)T(z)} \left( \frac{1}{H^0(z)} + \frac{S(z)}{R(z)} \right)} \end{aligned}$$

Comme  $B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$  et  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$ , cette dernière expression devient :

$$\begin{aligned} H_m(z) \frac{1}{\frac{B^-(z)B'_m(z)R(z)}{A_m(z)B'_m(z)A_0(z)} \left( \frac{1}{H^0(z)} + \frac{S(z)}{R(z)} \right)} \\ = H_m(z) \frac{1}{\frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z)} \left( \frac{1}{H^0(z)} + \frac{S(z)}{R(z)} \right)} \end{aligned}$$

D'autre part, (10.15) implique :

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{A_m(z)A_0(z) - A(z)\bar{R}(z)}{B^-(z)} \\ &= \frac{A_m(z)A_0(z)B^+(z) - A(z)R(z)}{B(z)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{S(z)}{R(z)} &= \frac{A_m(z)A_0(z)B^+(z)}{B(z)R(z)} - \frac{A(z)}{B(z)} \\ &= \frac{A_m(z)A_0(z)B^+(z)}{B(z)R(z)} - \frac{1}{H(z)} \end{aligned}$$

En portant cette égalité dans la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\begin{aligned} H_m(z) &\frac{1}{\frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z)} \left( \frac{1}{H^0(z)} + \frac{S(z)}{R(z)} \right)} \\ &= H_m(z) \frac{1}{\frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z)} \left( \frac{1}{H^0(z)} + \frac{A_m(z)A_0(z)B^+(z)}{B(z)R(z)} - \frac{1}{H(z)} \right)} \\ &= H_m(z) \frac{1}{1 + R(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_m(z)A_0(z)}} \end{aligned}$$

### 10.3.3 Équation de Diophante

Soient des polynômes  $A(z)$ ,  $B(z)$  et  $C(z)$  donnés et des polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  inconnus. Dans ce paragraphe consacré à la théorie générale, les polynômes  $A(z)$  et  $R(z)$  ne sont pas forcément moniques, afin de se conformer à l'usage en vigueur en mathématiques. De surcroît, les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  peuvent posséder des facteurs communs et, sans perte de généralité,  $\delta A \geq \delta B$ . L'égalité polynomiale suivante est appelée **équation de Diophante**, **équation diophantine**, **identité d'Aryabhatta** ou encore **identité de Bezout** :

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z) \quad (10.17)$$

Les relations (10.15) et (10.16), dans lesquelles il faut déterminer les polynômes  $\bar{R}(z)$  ou  $\bar{R}'(z)$  et  $S(z)$ , sont des équations de Diophante. La question de l'existence d'une solution fait l'objet du théorème suivant. Mais avant de passer à son énoncé et à sa démonstration, il est utile de rappeler la définition du plus grand commun diviseur de deux polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ , dont l'un au moins est différent du polynôme nul. Un **diviseur commun** de  $A(z)$  et  $B(z)$  est un polynôme qui divise à la fois  $A(z)$  et  $B(z)$ . Le **plus grand commun diviseur** de  $A(z)$  et  $B(z)$  est un polynôme  $D(z)$  tel que  $D(z)$  soit un diviseur commun de  $A(z)$  et  $B(z)$ , et que  $D(z)$  soit divisible par tout diviseur commun de  $A(z)$  et  $B(z)$ . Le plus grand commun diviseur de  $A(z)$  et  $B(z)$  est dénoté  $(A, B)$ . Il est unique à un facteur numérique non nul près.

### Théorème 10.2

*Soient  $A(z)$ ,  $B(z)$  et  $C(z)$  des polynômes dont les coefficients sont des nombres réels. Alors l'équation de Diophante (10.17) possède une solution  $R(z)$  et  $S(z)$  si et seulement si le plus grand commun diviseur de  $A(z)$  et  $B(z)$  est un facteur de  $C(z)$ .*

### Démonstration

Afin de simplifier l'écriture, l'argument  $z$  des polynômes est omis tout au long de cette démonstration. Posons  $A_0 = A$  et  $A_1 = B$ . Soit  $Q_1$  le quotient de la division de  $A_0$  par  $A_1$  et  $A_2$  son reste :

$$A_0 = Q_1 A_1 + A_2 \quad \delta A_2 < \delta A_1$$

Tout polynôme divise  $A_0$  et  $A_1$  si et seulement s'il divise  $A_1$  et  $A_2$ ; par conséquent, le plus grand commun diviseur de  $A_0$  est  $A_1$  est identique au plus grand commun diviseur de  $A_1$  et  $A_2$ :

$$(A, B) = (A_0, A_1) = (A_1, A_2)$$

En divisant  $A_1$  par  $A_2$ , si le polynôme  $A_2$  n'est pas nul :

$$A_1 = Q_2 A_2 + A_3 \quad \delta A_3 < \delta A_2$$

Et :

$$(A_1, A_2) = (A_2, A_3)$$

En continuant de la sorte et en rassemblant les résultats :

$$A_0 = Q_1 A_1 + A_2 \quad \delta A_2 < \delta A_1$$

$$A_1 = Q_2 A_2 + A_3 \quad \delta A_3 < \delta A_2$$

⋮

$$A_{n-3} = Q_{n-2} A_{n-2} + A_{n-1} \quad \delta A_{n-1} < \delta A_{n-2} \quad (10.18)$$

$$A_{n-2} = Q_{n-1} A_{n-1} + A_n \quad \delta A_n < \delta A_{n-1} \quad (10.19)$$

$$(A, B) = (A_0, A_1) = (A_1, A_2) = \dots = (A_{n-1}, A_n) \quad (10.20)$$

On relève que  $\delta B = \delta A_1 > \delta A_2 > \delta A_3 > \dots > \delta A_{n-1} > \delta A_n$ : les restes des divisions possèdent des degrés de plus en plus petits si bien que le procédé doit nécessairement s'arrêter en un nombre fini d'étapes avec une division sans reste. En dénotant  $n$  l'entier tel que le reste  $A_{n+1}$  est nul :

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= Q_n A_n + 0 \\ (A_{n-1}, A_n) &= (A_n, 0) \end{aligned} \quad (10.21)$$

Le plus grand commun diviseur du polynôme non nul  $A_n$  et du polynôme nul 0 est bien évidemment  $A_n$ ; (10.20) et (10.21) impliquent que le plus grand commun

diviseur des polynômes  $A$  et  $B$  est le dernier reste non nul des divisions polynomiales :

$$(A, B) = A_n$$

Il s'agit d'une méthode de calcul du plus grand commun diviseur de deux polynômes appelée **algorithme d'Euclide**.

Soit  $R$  et  $S$  une solution de l'équation diophantine (10.17). Les polynômes  $A$  et  $B$  sont maintenant écrits en faisant apparaître en facteur leur plus grand commun diviseur  $A_n$  :

$$A = A_n A'$$

$$B = A_n B'$$

Alors :

$$AR + BS = A_n(A'R + B'S) = C$$

Nous en concluons que le plus grand commun diviseur de  $A$  et  $B$  est un facteur de  $C$ .

Réciproquement, si le plus grand commun diviseur de  $A$  et  $B$  est un facteur de  $C$ , il s'agit de prouver qu'il existe une solution à l'équation diophantine. Pour ce faire, l'algorithme d'Euclide est exploité à rebours ; (10.19) fournit :

$$A_n = A_{n-2} - Q_{n-1}A_{n-1} \quad (10.22)$$

Ainsi,  $(A, B) = A_n$  s'exprime comme une combinaison linéaire des polynômes  $A_{n-2}$  et  $A_{n-1}$ . L'étape précédente (10.18) de l'algorithme d'Euclide donne :

$$A_{n-1} = A_{n-3} - Q_{n-2}A_{n-2}$$

Par substitution dans (10.22) :

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-2} - Q_{n-1}(A_{n-3} - Q_{n-2}A_{n-2}) \\ &= -Q_{n-1}A_{n-3} + (1 + Q_{n-1}Q_{n-2})A_{n-2} \end{aligned}$$

$A_n$  est maintenant une combinaison linéaire des polynômes  $A_{n-3}$  et  $A_{n-2}$ . En poursuivant ces substitutions, on en déduit que  $A_n$  est une combinaison linéaire des polynômes  $A_0 = A$  et  $A_1 = B$  :

$$A_n = R'A + S'B \quad (10.23)$$

Comme  $A_n$  est par hypothèse un facteur du polynôme  $C$  :

$$C = A_n C'$$

D'où, en multipliant les deux membres de (10.23) par  $C'$  :

$$A(R'C') + B(S'C') = C$$

Une solution  $R = R'C'$  et  $S = S'C'$  a donc été construite. ■

Dénotons  $R_0(z)$  et  $S_0(z)$  une solution de l'équation diophantine :

$$A(z)R_0(z) + B(z)S_0(z) = C(z)$$

Dans ce cas,  $R(z) = R_0(z) + Q(z)B(z)$  et  $S(z) = S_0(z) - Q(z)A(z)$ , où  $Q(z)$  est un polynôme quelconque, constitue aussi une solution :

$$\begin{aligned} A(z)(R_0(z) + Q(z)B(z)) + B(z)(S_0(z) - Q(z)A(z)) \\ = A(z)R_0(z) + B(z)S_0(z) = C(z) \end{aligned}$$

En d'autres termes, s'il existe une solution  $R_0(z)$  et  $S_0(z)$ , une infinité d'autres solutions peuvent être trouvées en lui additionnant et soustrayant des multiples de  $B(z)$  et  $A(z)$ . Parmi toutes ces solutions, il est toujours possible d'en trouver une, dite à **degré minimal**, telle que le degré  $\delta S$  de  $S(z)$  soit inférieur au degré  $\delta A$  de  $A(z)$  :

$$\delta S < \delta A \quad (10.24)$$

En effet, si  $\delta S_0 \geq \delta A$ , divisons  $S_0(z)$  par  $A(z)$  :

$$S_0(z) = Q(z)A(z) + S(z) \quad (10.25)$$

$Q(z)$  est le quotient de cette division et  $S(z)$  son reste, qui satisfait  $\delta S < \delta A$ . L'égalité (10.25) fournit :

$$S(z) = S_0(z) - Q(z)A(z) \quad (10.26)$$

On définit :

$$R(z) = R_0(z) + Q(z)B(z) \quad (10.27)$$

Les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  constituent une solution de l'équation diophantine vérifiant  $\delta S < \delta A$ . Les égalités (10.26) et (10.27) forment une **paramétrisation de Youla** de la solution.

En suivant la même démarche, il est facile de constater que, dans l'ensemble des solutions, l'une d'entre elles vérifie  $\delta R < \delta B$ . Toutefois,  $\delta S$  ne satisfait généralement plus (10.24).

Dès que les degrés des polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  ont été sélectionnés, une façon de résoudre l'équation diophantine consiste à égaler les coefficients des termes de même degré des polynômes  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  et  $C(z)$ . Il en résulte un système d'équations algébriques linéaires donnant les coefficients inconnus des polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$ .

#### EXEMPLE 10.4

Soient les polynômes :

$$A(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$$

$$B(z) = b_0z + b_1$$

$$C(z) = c_0z^5 + c_1z^4 + c_2z^3 + c_3z^2 + c_4z + c_5$$

Une solution à degré minimal caractérisée par  $\delta S < \delta A$  est recherchée. En fait, sous certaines conditions détaillées dans le paragraphe 10.3.4, une et une seule solution vérifiant  $\delta R = \delta S = \delta A - 1$  existe :

$$R(z) = r_0 z^2 + r_1 z + r_2$$

$$S(z) = s_0 z^2 + s_1 z + s_2$$

$A(z)$ ,  $B(z)$  et  $C(z)$  sont connus ; il faut trouver  $R(z)$  et  $S(z)$  solution de l'équation de Diophante :

$$\begin{aligned} (a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)(r_0 z^2 + r_1 z + r_2) + (b_0 z + b_1)(s_0 z^2 + s_1 z + s_2) \\ = c_0 z^5 + c_1 z^4 + c_2 z^3 + c_3 z^2 + c_4 z + c_5 \end{aligned}$$

En regroupant les termes de même degré :

$$\begin{aligned} a_0 r_0 z^5 + (a_0 r_1 + a_1 r_0) z^4 + (a_0 r_2 + a_1 r_1 + a_2 r_0 + b_0 s_0) z^3 \\ + (a_1 r_2 + a_2 r_1 + a_3 r_0 + b_0 s_1 + b_1 s_0) z^2 \\ + (a_2 r_2 + a_3 r_1 + b_0 s_2 + b_1 s_1) z + a_3 r_2 + b_1 s_2 \\ = c_0 z^5 + c_1 z^4 + c_2 z^3 + c_3 z^2 + c_4 z + c_5 \end{aligned}$$

D'où, en égalant les coefficients des termes de degré identique :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 r_0 = c_0 \\ a_1 r_0 + a_0 r_1 = c_1 \\ a_2 r_0 + a_1 r_1 + a_0 r_2 + b_0 s_0 = c_2 \\ a_3 r_0 + a_2 r_1 + a_1 r_2 + b_1 s_0 + b_0 s_1 = c_3 \\ a_3 r_1 + a_2 r_2 + b_1 s_1 + b_0 s_2 = c_4 \\ a_3 r_2 + b_1 s_2 = c_5 \end{array} \right.$$
■

Dans les applications relativement simples, le système d'équations algébriques linéaires issu de l'équation de Diophante peut être résolu symboliquement. Cette approche est facilitée quand les termes du membre de gauche de l'équation ont une forme factorisée, comme cela sera ultérieurement illustré dans des exemples. Une mise sous forme matricielle met en lumière une structure intéressante.

### EXEMPLE 10.5

Pour l'exemple précédent :

$$\left[ \begin{array}{cccccc} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & b_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & b_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{array} \right]$$

Nous remarquons dans la matrice ci-dessus que la première colonne inclut les coefficients du polynôme  $A(z)$ ; la deuxième s'obtient à partir de la première par décalage d'un cran vers le bas; la troisième découle de la deuxième à nouveau par décalage d'un cran. Les autres colonnes sont construites de la même manière avec les coefficients du polynôme  $B(z)$ . ■

Soient :

$$A(z) = a_0 z^{\delta A} + a_1 z^{\delta A - 1} + \cdots + a_{\delta A}$$

$$B(z) = b_0 z^{\delta B} + b_1 z^{\delta B - 1} + \cdots + b_{\delta B}$$

$$C(z) = c_0 z^{\delta R + \delta S + 1} + c_1 z^{\delta R + \delta S} + \cdots + c_{\delta R + \delta S + 1}$$

$$R(z) = r_0 z^{\delta R} + r_1 z^{\delta R - 1} + \cdots + r_{\delta R}$$

$$S(z) = s_0 z^{\delta S} + s_1 z^{\delta S - 1} + \cdots + s_{\delta S}$$

Le système linéaire associé à l'équation diophantine présente la structure générale suivante :

$$\left[ \begin{array}{ccccccccc|c|c} a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_0 & c_0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & r_1 & c_1 \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_1 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 & r_{\delta R} & c_{\delta R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_2 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 & s_0 & c_{\delta R + 1} \\ a_{\delta A} & \vdots & \ddots & \vdots & b_{\delta B} & \vdots & \ddots & b_1 & s_1 & \vdots \\ 0 & a_{\delta A} & \ddots & \vdots & 0 & b_{\delta B} & \ddots & b_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{\delta A} & 0 & 0 & \dots & b_{\delta B} & s_{\delta S} & c_{\delta R + \delta S + 1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{\delta R} \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{\delta S} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{\delta R} \\ c_{\delta R + 1} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{\delta R + \delta S + 1} \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\delta R + 1 \text{ colonnes}}$        $\underbrace{\hspace{10em}}_{\delta S + 1 \text{ colonnes}}$

(10.28)

La matrice carrée d'ordre  $\delta R + \delta S + 2$  de ce système est dite **matrice de Sylvester**. La sélection des degrés des polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$ , vitale pour fixer complètement la matrice de Sylvester, sera explorée avec un grand soin dans les paragraphes suivants. La résolution de (10.28) peut s'effectuer par élimination gaussienne ou via une factorisation standard de la matrice de Sylvester.

Une alternative séduisante, conceptuellement fort différente des précédentes, consiste à tirer parti de la démonstration constructive du théorème 10.2, dans laquelle une solution de l'équation diophantine est élaborée en mettant à profit l'algorithme d'Euclide.

**EXEMPLE 10.6**

Une solution de l'équation de Diophante (10.17) est recherchée, avec :

$$A(z) = z^3 - 2z^2 - z + 2$$

$$B(z) = z^2 - 2z$$

$$C(z) = z^5 - 4z^4 + 4z^3 + z - 2$$

L'algorithme d'Euclide débute par la division polynomiale de  $A_0(z) = A(z)$  par  $A_1(z) = B(z)$  :

$$\begin{array}{r} A_0(z) = z^3 - 2z^2 - z + 2 \\ \hline z^2 - 2z \\ \hline -z + 2 = A_2(z) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} A_1(z) = z^2 - 2z \\ z = Q_1(z) \end{array} \right.$$

Puis de  $A_1(z)$  par  $A_2(z)$  :

$$\begin{array}{r} A_1(z) = z^2 - 2z \\ \hline z^2 - 2z \\ \hline -z = Q_2(z) \\ 0 = A_3(z) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} A_2(z) = -z + 2 \\ -z = Q_2(z) \end{array} \right.$$

Nous en concluons que  $(A, B) = A_2(z) = -z + 2$ . L'algorithme d'Euclide est maintenant considéré à rebours :

$$\begin{aligned} A_2(z) &= A_0(z) - Q_1(z)A_1(z) \\ &= A(z) - Q_1(z)B(z) \\ &= A(z) - zB(z) \end{aligned}$$

$(A, B) = A_2(z)$  s'exprime bien comme une combinaison linéaire  $R'(z)A(z) + S'(z)B(z)$  des polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ , avec :

$$R'(z) = 1 \quad S'(z) = -z$$

Il s'agit encore de déterminer le facteur  $C'(z)$  inclus dans le polynôme  $C(z)$  ; pour ce faire,  $C(z)$  est divisé par  $A_2(z)$  :

$$\begin{array}{r} C(z) = z^5 - 4z^4 + 4z^3 \\ \hline z^2 - 2z \\ \hline -2z^4 + 4z^3 \\ -2z^4 + 4z^3 \\ \hline z - 2 \\ z - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} + z - 2 \\ \hline -z + 2 \\ -z + 2 \\ \hline -z^4 + 2z^3 - 1 = C'(z) \end{array} \right.$$

Le reste de la division est nul ; le plus grand commun diviseur de  $A(z)$  et  $B(z)$  est un facteur de  $C(z)$ , garantissant l'existence d'une solution à l'équation diophantine. Une solution est :

$$\begin{aligned}R_0(z) &= R'(z)C'(z) = -z^4 + 2z^3 - 1 \\S_0(z) &= S'(z)C'(z) = z^5 - 2z^4 + z\end{aligned}$$

Elle vérifie  $\delta S_0 \geq \delta A$  et n'est de ce fait pas à degré minimal. Une solution à degré minimal s'obtient simplement en divisant  $S_0(z)$  par  $A(z)$  :

$$\begin{array}{rcl}S_0(z) = & z^5 - 2z^4 & + z \\ & z^5 - 2z^4 - z^3 + 2z^2 & \\ \hline & z^3 - 2z^2 + z & \\ & z^3 - 2z^2 - z + 2 & \\ \hline & 2z - 2 = S(z) & \end{array} \quad \left| \begin{array}{l}A(z) = z^3 - 2z^2 - z + 2 \\ z^2 + 1 = Q(z)\end{array}\right.$$

Soit :

$$\begin{aligned}R(z) &= R_0(z) + Q(z)B(z) \\&= -z^4 + 2z^3 - 1 + (z^2 + 1)(z^2 - 2z) \\&= z^2 - 2z - 1\end{aligned}$$

La solution  $R(z) = z^2 - 2z - 1$  et  $S(z) = 2z - 2$  est à degré minimal. ■

Les opérations entrant en jeu dans la méthode fondée sur l'algorithme d'Euclide, dont un exemple vient d'être présenté, peuvent être rassemblées sous une forme matricielle, conduisant à l'**algorithme d'Euclide étendu** ; pour le surplus, cet algorithme génère une solution à degré minimal. Il est particulièrement rapide, car tirant pleinement bénéfice de la nature polynomiale du problème, et jouit d'un bon conditionnement numérique.

#### 10.3.4 Existence et unicité d'un régulateur RST causal à degré minimal

Le polynôme  $T(z)$  d'un régulateur RST découle de (10.14) ; les polynômes  $\bar{R}(z)$  et  $S(z)$  sont fournis par l'équation (10.15) de type diophantine, et  $R(z) = B^+(z)\bar{R}(z)$ . Les polynômes  $A_m(z)$ ,  $A_0(z)$ ,  $A(z)$  et  $B^+(z)$  sont choisis moniques. En outre,  $\delta A > \delta B$ . Les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  sont supposés n'avoir aucun facteur commun (autre que numérique) ; il en est donc de même pour  $A(z)$  et  $B^-(z)$  : le plus grand commun diviseur de  $A(z)$  et  $B^-(z)$  est un nombre et le théorème 10.2 permet d'affirmer qu'une solution  $\bar{R}(z)$  et  $S(z)$  existe. En présence d'un intégrateur, les polynômes  $\bar{R}'(z)$  et  $S(z)$  sont une solution de (10.16) et  $R(z) = (z-1)^\ell R'(z) = (z-1)^\ell B^+(z)\bar{R}'(z)$ . Il va de soi que, dans ce cas, les inconnues sont  $\bar{R}'(z)$  et  $S(z)$ , tandis que les polynômes connus sont  $A(z)(z-1)^\ell$  et  $B^-(z)$ , de même que le second membre  $A_m(z)A_0(z)$ . Par ailleurs, on présume que  $B^-(z)$  ne renferme pas de zéro  $z = 1$  afin qu'il n'y ait pas de facteur commun à  $A(z)(z-1)^\ell$  et  $B^-(z)$ . Cette hypothèse est pratiquement toujours vérifiée

car nous savons (ex. 4.28) qu'un zéro  $z = 1$  reflète un comportement déivateur rarissime dans les processus à commander.

Afin de ne pas se restreindre à des situations particulières, les polynômes  $A_m(z)$  et  $A_0(z)$  constituant le second membre de l'équation de Diophante peuvent être quelconques (sauf que, comme déjà mentionné, ils sont moniques et leurs zéros sont tous à l'intérieur du cercle unité).

On sait qu'il existe une infinité de solutions et que, pour l'une d'entre elles,  $\delta S < \delta A$  ou  $\delta S < \delta(A(z-1)^\ell) = \delta A + \ell$  en présence d'un intégrateur. Le théorème suivant révèle que cette solution particulière, à degré minimal, permet de construire un régulateur RST remplissant les conditions de causalité exprimées dans la section 10.2.

### Théorème 10.3

*Il existe un régulateur RST, à degré minimal, tel que  $\delta R \geq \delta T$  et  $\delta R \geq \delta S$  si les inégalités suivantes sont respectées :*

$$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B \quad (10.29)$$

$$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ - 1 \quad (10.30)$$

*Lorsqu'un intégrateur est inséré, il existe un régulateur RST, à degré minimal, tel que  $\delta R \geq \delta T$  et  $\delta R \geq \delta S$  si l'inégalité (10.29) et l'inégalité suivante sont satisfaites :*

$$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ + \ell - 1 \quad (10.31)$$

### Démonstration

En multipliant les deux membres de (10.15) par  $B^+(z)$ , nous obtenons :

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)B^+(z) \quad (10.32)$$

Ainsi :

$$\delta(AR + BS) = \delta(A_m A_0 B^+) = \delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+ \quad (10.33)$$

L'inégalité (10.30) est par hypothèse vérifiée, conduisant à :

$$\delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+ \geq 2\delta A - 1 \quad (10.34)$$

En combinant (10.33) et (10.34) :

$$\delta(AR + BS) \geq 2\delta A - 1 \quad (10.35)$$

La solution retenue remplit la condition  $\delta S < \delta A$ , équivalente à  $\delta S \leq \delta A - 1$ ; de surcroît,  $\delta B < \delta A$  ou  $\delta B \leq \delta A - 1$  car la fonction rationnelle  $H(z) = B(z)/A(z)$

est strictement propre ; donc  $\delta(BS) = \delta B + \delta S \leq 2\delta A - 2$  et, pour respecter l'inégalité (10.35) :

$$\delta(AR) > \delta(BS)$$

Alors :

$$\delta(AR + BS) = \delta(AR) \quad (10.36)$$

Les égalités (10.33) et (10.36) fournissent :

$$\delta(AR) = \delta A + \delta R = \delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+$$

On en déduit :

$$\delta R = \delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+ - \delta A \quad (10.37)$$

Par ailleurs, vu que  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$  :

$$\delta T = \delta B'_m + \delta A_0 \quad (10.38)$$

Partons maintenant de (10.29) ; en tenant compte de  $B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$  et  $B(z) = B^+(z)B^-(z)$ , (10.29) peut s'écrire :

$$\delta A_m - (\delta B^- + \delta B'_m) \geq \delta A - (\delta B^+ + \delta B^-)$$

Ou encore, en ajoutant  $\delta A_0$  aux deux membres de cette inégalité et après réorganisation :

$$\delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+ - \delta A \geq \delta B'_m + \delta A_0 \quad (10.39)$$

La première condition de causalité  $\delta R \geq \delta T$  découle de (10.37), (10.38) et (10.39). En vertu de (10.35) et (10.36) :

$$\delta(AR) = \delta A + \delta R \geq 2\delta A - 1$$

Ou, de façon équivalente :

$$\delta R \geq \delta A - 1 \quad (10.40)$$

Comme  $\delta S \leq \delta A - 1$ , il découle de (10.40) que la condition de causalité  $\delta R \geq \delta S$  est satisfaite.

La première partie du théorème est ainsi démontrée. Quant à la seconde, traitant la situation où un intégrateur est incorporé, elle se démontre de la même manière. Les détails sont laissés aux soins du lecteur. ■

La condition (10.29), déjà rencontrée dans l'exemple 10.2, est particulièrement facile à interpréter physiquement : le surplus de pôles, autrement dit le retard, du modèle à poursuivre doit être supérieur ou égal au retard du système à commander ; par conséquent, un régulateur RST causal ne peut pas compenser un retard dans le processus à commander, ce qui est en parfait accord avec l'intuition.

Il a toujours été admis que le polynôme  $R(z)$  pouvait être choisi monique. Un examen de la démonstration du théorème 10.3 révèle que c'est effectivement le cas. En effet, le membre de droite de (10.32) est un polynôme monique puisque  $A_m(z)$ ,  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$  sont moniques. Comme  $\delta(AR + BS) = \delta(AR)$  (équation (10.36)) et vu que  $A(z)$  est monique, le polynôme  $R(z)$  est lui aussi monique.

Il résulte du paragraphe 10.3.3 que, outre la solution à degré minimal vérifiant  $\delta S < \delta A$ , une autre solution potentiellement intéressante est celle satisfaisant  $\delta \bar{R} < \delta B^-$ , inégalité équivalente à  $\delta R < \delta B$ . Sous les hypothèses du théorème 10.3, cette solution est néanmoins à rejeter car conduisant à un régulateur RST non causal. Pour le prouver, supposons  $\delta R < \delta B$  :

$$\delta A > \delta B > \delta R$$

L'inégalité (10.35) conduit à :

$$\delta(AR + BS) \geq 2\delta A - 1 > \delta A + \delta R - 1$$

Ou :

$$\delta(AR + BS) \geq \delta A + \delta R$$

Ceci n'est possible que si :

$$\delta(BS) \geq \delta(AR)$$

Or, comme  $\delta B < \delta A$ , cette dernière inégalité ne peut être satisfaite que lorsque  $\delta S > \delta R$ , excluant la causalité du régulateur.

La démonstration du théorème 10.3 fixe le degré du polynôme  $R(z)$  selon la formule (10.37); vu que  $R(z) = B^+(z)\bar{R}(z)$ , on a  $\delta R = \delta B^+ + \delta \bar{R}$  et :

$$\delta \bar{R} = \delta R - \delta B^+ = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A$$

En présence d'un intégrateur, nous avons  $R(z) = (z-1)^\ell B^+(z)\bar{R}'(z)$ ; donc  $\delta R = \delta B^+ + \delta \bar{R}'(z) + \ell$  et :

$$\delta \bar{R}' = \delta R - \delta B^+ - \ell = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A - \ell$$

La solution retenue, à degré minimal, vérifie  $\delta S \leq \delta A - 1$ ; ainsi, le degré de  $S(z)$  est dans l'intervalle  $[0, \delta A - 1]$ . Toutefois, le théorème suivant montre que  $\delta S = \delta A - 1$ ; de surcroît, les polynômes  $\bar{R}(z)$  et  $S(z)$  sont uniques.

#### Théorème 10.4

*Le degré du polynôme  $S(z)$  vaut  $\delta A - 1$ ; en outre, les polynômes  $\bar{R}(z)$  et  $S(z)$  sont uniques. En présence d'un intégrateur,  $\delta S = \delta A + \ell - 1$ ;  $\bar{R}'(z)$  et  $S(z)$  sont uniques.*

#### Démonstration

Le régulateur RST est causal, impliquant  $\delta R \geq \delta S$ ; de plus,  $\delta A > \delta B$  car la fonction de transfert  $H(z)$  est strictement propre. D'où  $\delta(AR) > \delta(BS)$  et

$\delta(A\bar{R}) > \delta(B^-S)$ . Le système linéaire (10.28), que nous écrivons sous la forme compacte  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ , comprend dès lors  $\delta A + \delta\bar{R} + 1$  équations. Les inconnues, regroupées dans le vecteur  $\mathbf{x}$ , sont les coefficients des polynômes  $\bar{R}(z)$  et  $S(z)$ , au nombre de  $\delta\bar{R} + 1$  plus  $\delta S + 1$ . Supposons qu'il y ait plus d'équations que d'inconnues :

$$\delta A + \delta\bar{R} + 1 > \delta\bar{R} + 1 + \delta S + 1 = \delta\bar{R} + \delta S + 2$$

Comme l'équation diophantine possède au moins une solution (théorème 10.1), cette hypothèse est absurde ; en effet, le second membre  $\mathbf{c}$  étant quelconque puisque  $A_m(z)$  et  $A_0(z)$  peuvent être sélectionnés librement, le rang de la matrice  $\mathbf{M}$  ne pourrait pas être égal au rang de la matrice augmentée  $[ \mathbf{M} \quad \mathbf{c} ]$  (sect. IV.1). Alors  $\delta A + \delta\bar{R} + 1 \leq \delta\bar{R} + \delta S + 2$ , ou  $\delta S \geq \delta A - 1$ . Vu que  $\delta S \in [0, \delta A - 1]$ , on en conclut :

$$\delta S = \delta A - 1 \tag{10.41}$$

Par ailleurs, l'égalité (10.41) est équivalente à  $\delta A + \delta\bar{R} + 1 = \delta\bar{R} + \delta S + 2$  : le système d'équations  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{c}$  comprend le même nombre d'équations et d'inconnues ; la matrice  $\mathbf{M}$  est donc carrée. L'existence d'au moins une solution garantit que le rang de la matrice  $\mathbf{M}$  soit égal à celui de  $[ \mathbf{M} \quad \mathbf{c} ]$ . Le vecteur  $\mathbf{c}$  étant quelconque, le rang de  $\mathbf{M}$  vaut  $\delta\bar{R} + \delta S + 2$ , égal au nombre d'inconnues, démontrant l'unicité de la solution de  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ .

En présence d'un intégrateur, nous avons  $\delta S \leq \delta A + \ell - 1$  ; de la même façon que ci-dessus, il est facile de constater qu'en fait :

$$\delta S = \delta A + \ell - 1$$

Les polynômes  $\bar{R}'(z)$  et  $S(z)$  sont en outre uniques. ■

Le système linéaire (10.28) ou, sous la forme compacte  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{c}$  adoptée dans la démonstration ci-dessus, exhibe une structure quelque peu particulière. Le polynôme  $A(z)$  est monique, se traduisant par  $a_0 = 1$ , de même que le second membre  $A_m(z)A_0(z)$  de l'équation diophantine (10.15), de sorte que  $c_0 = 1$ . La première équation du système (10.28) produit toujours  $r_0 = 1$  et le polynôme  $\bar{R}(z)$  est monique comme il se doit.

Comme cela est expliqué dans la section 10.2, il existe essentiellement deux techniques de réalisation du régulateur RST. Dans la première (implantation standard), le temps de calcul et de conversion est négligeable vis-à-vis de la période d'échantillonnage et  $\delta R = \delta S = \delta T$ . On impose ce cas en échangeant, dans l'énoncé du théorème 10.3, les inégalités (10.29) et (10.30) avec des égalités. En effet, il suffit de reprendre point par point la démonstration de ce théorème pour constater que la première condition de causalité  $\delta R \geq \delta T$  se transforme en  $\delta R = \delta T$ . La démarche donne aussi  $\delta R = \delta A - 1$  ; comme le degré du polynôme  $S(z)$  vérifie (10.41), la seconde condition de causalité  $\delta R \geq \delta S$  devient  $\delta R = \delta S$ . La modification supplémentaire à apporter en présence d'un intégrateur est évidente : il faut remplacer l'inégalité (10.31) par une égalité.

La seconde alternative est adoptée quand le temps de calcul et de conversion est égal à la période d'échantillonnage, se reflétant par  $\delta R - 1 = \delta S = \delta T$  ou  $\delta R' + \ell - 1 = \delta S = \delta T$  avec un intégrateur. Un raisonnement identique à celui des lignes précédentes fait ressortir que, pour se placer dans cette situation, les inégalités (10.29), (10.30) et (10.31) doivent respectivement être échangées avec les égalités :

$$\begin{aligned}\delta A_m - \delta B_m &= \delta A - \delta B + 1 \\ \delta A_0 &= 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ \\ \delta A_0 &= 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ + \ell\end{aligned}$$

### 10.3.5 Choix du modèle à poursuivre

Le modèle à poursuivre  $H_m(z)$  est généralement simple, garantissant globalement les caractéristiques souhaitées en boucle fermée. Le paragraphe 10.3 contient déjà quelques informations à ce sujet. La sélection précise dépend de l'application, raison pour laquelle nous ne détaillons ici que quelques exemples parmi d'autres. Toutefois, le numérateur  $B_m(z)$  du modèle à poursuivre vérifie  $B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$ , indiquant qu'il doit toujours contenir les zéros du système à commander qui ne sont pas simplifiés. Typiquement, les zéros de  $B^-(z)$  sont les zéros de  $B(z)$  à l'extérieur de la région en tramé de la figure 10.7. Il est certainement utile de rappeler l'absolue nécessité que tous les zéros de  $B(z)$  sur ou à l'extérieur du cercle unité soient des zéros de  $B^-(z)$  afin d'éviter l'instabilité.

Un choix rudimentaire est le suivant :

$$H_m(z) = \frac{B^-(z) \frac{P(1)}{B^-(1)}}{z^d P(z)}$$

Dans ce cas :

$$B_m(z) = B^-(z) \frac{P(1)}{B^-(1)} \quad B'_m(z) = \frac{P(1)}{B^-(1)} \in \mathbb{R} \quad A_m(z) = z^d P(z)$$

Le facteur  $z^d$  dans  $A_m(z)$ , dit **polynôme auxiliaire**, est souvent requis afin de respecter (10.29); il introduit  $d$  pôles nuls, dits **pôles auxiliaires**. Le nombre  $P(1)/B^-(1)$  assure  $H_m(1) = 1$ , éliminant tout statisme d'asservissement (ex. 10.1). Le polynôme  $P(z)$  fixe les modes principaux en boucle fermée ; il est monique et de degré 1 ou 2 selon que des oscillations de la grandeur à commander sont bannies ou tolérées, respectivement :

$$\begin{aligned}P(z) &= z + c \\ P(z) &= z^2 + c_1 z + c_2\end{aligned}$$

Dans ces expressions, les coefficients  $c$  ou  $c_1$  et  $c_2$  sont sélectionnés de manière à ce que des conditions absolue et relative d'amortissement soient remplies, ou encore afin d'obtenir une bande passante et un gain à la résonance fixés. Les zéros de  $P(z)$  sont appelés **pôles dominants** en boucle fermée. Typiquement,  $-c \in$

[0,5, 0,9] (§ 9.4.2) ; les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  sont choisis de telle sorte que les zéros de  $z^2 + c_1z + c_2$  soient à l'intersection du cercle centré à l'origine dont le rayon est entre 0,5 et 0,9, et des spirales logarithmiques associées à une condition relative d'amortissement d'un facteur  $a = 535$  en  $N = 1$  oscillation (§ 9.4.3). Un exemple apparaît dans la figure 10.9.



### EXEMPLE 10.7

Soit le processus à commander :

$$H(z) = \frac{b}{z^d(z+a)}$$

Dans cet exemple :

$$A(z) = z^d(z+a) \quad B(z) = b \quad B^+(z) = 1 \quad B^-(z) = b$$

Un polynôme  $P(z)$  de premier degré est choisi :

$$P(z) = z + c$$

Le numérateur du modèle à poursuivre s'écrit :

$$B_m(z) = B^-(z) \frac{P(1)}{B^-(1)} = 1 + c$$

Et :

$$B'_m(z) = \frac{P(1)}{B^-(1)} = \frac{1+c}{b}$$

Une implantation standard est souhaitée, imposant  $\delta A_m - \delta B_m = \delta A - \delta B = d+1$  ; d'où  $\delta A_m = d+1$  et, comme  $\delta P = 1$ , il faut insérer un facteur  $z^d$  dans le polynôme  $A_m(z)$ , lequel prend la forme  $A_m(z) = z^d(z+c)$ . Finalement :

$$H_m(z) = \frac{1+c}{z^d(z+c)}$$

Avec  $|c| < |a|$ , la dynamique en boucle fermée sera plus rapide que celle en boucle ouverte. Le degré du polynôme observateur est fixé par (10.30), où l'inégalité est remplacée par une égalité (implantation standard) :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m - 1 = 2(d+1) - (d+1) - 1 = d$$

Un polynôme observateur à réponse pile est sélectionné :

$$A_0(z) = z^d$$

Les degrés des polynômes  $R(z)$  ( $= \overline{R}(z)$  puisque  $B^+(z) = 1$ ) et  $S(z)$  se calculent aisément :

$$\delta R = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A = d+1 + d - (d+1) = d$$

$$\delta S = \delta A - 1 = d+1 - 1 = d$$

D'où :

$$\begin{aligned} R(z) &= r_0 z^d + r_1 z^{d-1} + \cdots + r_d \\ S(z) &= s_0 z^d + s_1 z^{d-1} + \cdots + s_d \end{aligned}$$

L'équation de Diophante s'écrit :

$$\begin{aligned} z^d(z+a)(r_0 z^d + r_1 z^{d-1} + \cdots + r_d) + b(s_0 z^d + s_1 z^{d-1} + \cdots + s_d) \\ = z^d(z+c)z^d \end{aligned}$$

Ou, en regroupant les termes de même degré :

$$\begin{aligned} r_0 z^{2d+1} + (ar_0 + r_1)z^{2d} + (ar_1 + r_2)z^{2d-1} + \cdots \\ + (ar_{d-1} + r_d)z^{d+1} + (ar_d + bs_0)z^d + bs_1 z^{d-1} + \cdots + bs_d \\ = z^{2d+1} + cz^{2d} \end{aligned}$$

Les coefficients des termes de degré identique peuvent être égalés :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = 1 \\ ar_0 + r_1 = c \\ ar_1 + r_2 = 0 \\ \vdots \\ ar_{d-1} + r_d = 0 \\ ar_d + bs_0 = 0 \\ bs_1 = 0 \\ \vdots \\ bs_d = 0 \end{array} \right.$$

Il est facile de résoudre ce système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = 1 \\ r_1 = c - a \\ r_2 = -a(c - a) \\ \vdots \\ r_d = (-a)^{d-1}(c - a) \\ s_0 = -\frac{a}{b}(-a)^{d-1}(c - a) = \frac{1}{b}(-a)^d(c - a) \\ s_1 = 0 \\ \vdots \\ s_d = 0 \end{array} \right.$$

La synthèse du régulateur RST s'achève avec le calcul du polynôme  $T(z)$  :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) = \frac{1+c}{b}z^d$$

Dans le cas particulier des exemples 9.3 et 9.9, où  $a = -0,985$ ,  $b = 0,015$  et  $d = 3$ , et avec  $c = -0,8$ , ces résultats produisent les polynômes  $R(z) = z^3 + 0,185 z^2 + 0,182 z + 0,179$ ,  $S(z) = 11,787 z^3$  et  $T(z) = 13,333 z^3$ . ■

Plutôt que d'imposer  $d$  pôles à l'origine, par le biais du polynôme auxiliaire  $z^d$  incorporé dans  $A_m(z)$ , il est généralement préférable d'introduire des pôles auxiliaires non nuls engendrant des modes s'amortissant plus en douceur et exigeant de plus faibles amplitudes du signal de commande ; ces pôles sont les zéros du polynôme auxiliaire monique  $P_A(z)$ , placé au dénominateur du modèle à poursuivre, qui prend la forme :

$$H_m(z) = \frac{B^-(z) \frac{P_A(1)P(1)}{B^-(1)}}{P_A(z)P(z)}$$

Et :

$$\begin{aligned} B_m(z) &= B^-(z) \frac{P_A(1)P(1)}{B^-(1)} & B'_m(z) &= \frac{P_A(1)P(1)}{B^-(1)} \in \mathbb{R} \\ A_m(z) &= P_A(z)P(z) \end{aligned}$$

Le degré de  $P_A(z)$  est déterminé à l'aide de (10.29). Typiquement, les modules des zéros de  $P_A(z)$  sont deux à trois fois plus petits que ceux de  $P(z)$ . Au surplus, le polynôme auxiliaire  $P_A(z)$  autorise, en y introduisant à la fois des zéros nuls et non nuls, une fusion des deux philosophies ci-dessus. Les zéros non nuls peuvent être les pôles en boucle ouverte rapidement amortis, par exemple les pôles du filtre de garde.

Certaines applications exigent des modifications dans les modèles à poursuivre qui viennent d'être proposés. Par exemple, dans les systèmes mécatroniques à hautes performances, il importe d'annuler non seulement le statisme, mais aussi la traînée. On montre, dans les prochaines lignes, que le modèle à poursuivre doit contenir des zéros positionnés convenablement dans le plan complexe. Le potentiel de placement des zéros intrinsèque au régulateur RST est ici pleinement exploité.

La fonction de transfert  $H_m(z)$  du modèle à poursuivre est mise sous la forme factorisée suivante, mettant en évidence ses zéros  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , et ses pôles  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  :

$$H_m(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

Le statisme doit être nul, impliquant  $H_m(1) = 1$  (ex. 10.1). L'écart  $Y_c(z) - Y(z)$  entre la consigne  $Y_c(z)$  et la sortie  $Y(z)$  du modèle à poursuivre est, pour une consigne en forme de rampe :

$$\begin{aligned} Y_c(z) - Y(z) &= Y_c(z) - H_m(z)Y_c(z) \\ &= Y_c(z)(1 - H_m(z)) = \frac{hz}{(z-1)^2}(1 - H_m(z)) \end{aligned}$$

D'où, en faisant appel à la règle de Bernoulli-L'Hospital :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(Y_c(z) - Y(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{hz}{(z-1)^2}(1 - H_m(z)) \\ &= h \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - H_m(z)}{z-1} \\ &= h \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dz}(1 - H_m(z))}{\frac{d}{dz}(z-1)} \\ &= -h \lim_{z \rightarrow 1} \frac{dH_m(z)}{dz} \end{aligned}$$

Notons que :

$$\frac{d}{dz} \ln H_m(z) = \frac{1}{H_m(z)} \cdot \frac{dH_m(z)}{dz}$$

D'où, en tenant compte de  $H_m(1) = 1$  :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) &= -h \lim_{z \rightarrow 1} H_m(z) \frac{d}{dz} \ln H_m(z) \\ &= -h \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \ln H_m(z) \\ &= -h \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \ln \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \\ &= -h \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \ln b_0 + \sum_{j=1}^m \ln(z - z_j) - \sum_{i=1}^n \ln(z - p_i) \right) \\ &= -h \lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - z_j} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - p_i} \right) \\ &= h \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 - z_j} \right) \end{aligned}$$

La condition  $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = 0$  est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 - z_j} \quad (10.42)$$

Les zéros  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , du modèle à poursuivre  $H_m(z)$  doivent être sélectionnés selon cette égalité si aucune traînée n'est tolérée ; la contrainte  $H_m(1) = 1$  doit bien sûr elle aussi être vérifiée.

La relation (10.42) est très pratique pour déterminer un seul zéro de  $B'_m(z)$ . Soit, sans perte de généralité,  $z_1$  ce zéro et  $z_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$ , les autres zéros de  $B_m(z)$  ; (10.42) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-p_i} = \frac{1}{1-z_1} + \sum_{j=2}^m \frac{1}{1-z_j}$$

D'où

$$z_1 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-p_i}}{\sum_{j=2}^m \frac{1}{1-z_j}} \quad (10.43)$$

#### EXEMPLE 10.8

L'exemple 10.7 est repris avec la spécification supplémentaire d'une traînée nulle. Un zéro  $z_1$  est inclus dans le polynôme  $B'_m(z)$ , qui n'est dès lors plus un nombre. Le modèle à poursuivre est maintenant :

$$H_m(z) = \frac{(z-z_1) \frac{1+c}{1-z_1}}{z^{d+1}(z+c)}$$

Ici :

$$B_m(z) = (z-z_1) \frac{1+c}{1-z_1} \quad B'_m(z) = (z-z_1) \frac{1+c}{b(1-z_1)} \quad A_m(z) = z^{d+1}(z+c)$$

La contrainte  $H_m(1) = 1$  est respectée ; afin d'annuler la traînée, le zéro  $z_1$  est déterminé à l'aide de (10.43) :

$$z_1 = 1 - \frac{1}{(d+1) \frac{1}{1} + \frac{1}{1+c}} = \frac{d + \frac{1}{1+c}}{1 + d + \frac{1}{1+c}}$$

L'implantation est standard puisque  $\delta A_m - \delta B_m = \delta A - \delta B = d+1$ . Le degré du polynôme observateur vaut :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m - 1 = 2(d+1) - (d+2) - 1 = d-1$$

D'où le polynôme observateur à réponse pile :

$$A_0(z) = z^{d-1}$$

Il est facile de vérifier que les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  obtenus dans l'exemple 10.7 ne sont pas modifiés. Par contre, le polynôme  $T(z)$  devient :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) = z^{d-1}(z-z_1) \frac{1+c}{b(1-z_1)} \quad \blacksquare$$

Ces résultats peuvent être généralisés à des consignes quelconques, mais connues à l'avance. En fait, le théorème suivant révèle que le polynôme  $B'_m(z)$  fixant, en sus de l'incontournable polynôme  $B^-(z)$ , les zéros du modèle à poursuivre peut être calculé en résolvant une seconde équation diophantine.

### Théorème 10.5

*Soit  $Y_c(z) = B_c(z)/A_c(z)$  la transformée en  $z$  rationnelle propre d'une consigne connue. Son dénominateur est factorisé sous la forme  $A_c(z) = A_c^+(z)A_c^-(z)$ , où  $A_c^+(z)$  est un polynôme monique dont les zéros sont à l'intérieur du cercle unité et  $A_c^-(z)$  un polynôme dont les zéros sont sur ou à l'extérieur du cercle unité. Les polynômes  $A_c(z)$  et  $B_c(z)$  n'ont aucun facteur commun (autre que numérique), de même que les polynômes  $A_c^-(z)$  et  $B^-(z)$ . Soit  $B'_m(z)$  un polynôme satisfaisant l'équation diophantine :*

$$A_c^-(z)X(z) + B^-(z)B'_m(z) = A_m(z) \quad (10.44)$$

*Sous ces hypothèses :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = 0$$

### Démonstration

En tenant compte de  $Y(z)/Y_c(z) = B_m(z)/A_m(z)$  :

$$\begin{aligned} Y_c(z) - Y(z) &= \left(1 - \frac{B_m(z)}{A_m(z)}\right) Y_c(z) \\ &= \frac{A_m(z) - B_m(z)}{A_m(z)} \cdot \frac{B_c(z)}{A_c(z)} \\ &= \frac{(A_m(z) - B_m(z))B_c(z)}{A_m(z)A_c^+(z)A_c^-(z)} \end{aligned}$$

Afin de mettre à profit le théorème 4.7 sur la valeur finale, il faut s'assurer que les pôles de cette expression possèdent des modules strictement plus petits que 1 (à l'éventuelle exception d'un pôle simple égal à 1). Tous les zéros de  $A_m(z)$  et de  $A_c^+(z)$  sont à l'intérieur du cercle unité. Comme tous les zéros de  $A_c^-(z)$  sont sur ou à l'extérieur du cercle unité, ces zéros doivent être des zéros de  $A_m(z) - B_m(z)$  pour disparaître ( $A_c(z)$  et  $B_c(z)$ , et par là  $A_c^-(z)$  et  $B_c(z)$ , n'ont aucun facteur commun ; par ailleurs, un éventuel zéro simple  $z = 1$  dans  $A_c^-(z)$  n'est pas conservé car cela impliquerait  $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) \neq 0$ ). Autrement dit,  $A_m(z) - B_m(z)$  doit être égal à un polynôme  $A_c^-(z)X(z)$ . Vu que  $B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$  :

$$A_m(z) - B^-(z)B'_m(z) = A_c^-(z)X(z)$$

Ou, les polynômes  $X(z)$  et  $B'_m(z)$  jouant le rôle des inconnues :

$$A_c^-(z)X(z) + B^-(z)B'_m(z) = A_m(z)$$

Afin d'assurer une solution à cette équation diophantine, le plus grand commun diviseur de  $A_c^-(z)$  et  $B^-(z)$  doit être un facteur de  $A_m(z)$  (théorème 10.1), condition vérifiée puisque  $A_c^-(z)$  et  $B^-(z)$  n'ont aucun facteur commun autre que numérique.

Le théorème 4.7 conduit à :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{(A_m(z) - B_m(z))B_c(z)}{A_m(z)A_c^+(z)A_c^-(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{A_c^-(z)X(z)B_c(z)}{A_m(z)A_c^+(z)A_c^-(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{X(z)B_c(z)}{A_m(z)A_c^+(z)} \\ &= 0 \end{aligned}$$
■

Parmi toutes les solutions de l'équation diophantine (10.44), il en est une, à degré minimal, vérifiant  $\delta B'_m < \delta A_c^-$  (§ 10.3.3). C'est la solution retenue par la suite. Le théorème suivant constitue alors une condition suffisante permettant de respecter l'inégalité (10.29). Les inégalités (10.30) et (10.31) du théorème 10.3 ne mettent pas en jeu  $B_m(z)$  et ne requièrent de ce fait aucune retouche ; mais elles doivent bien sûr aussi être satisfaites afin de garantir la causalité du régulateur RST.

### Théorème 10.6

*Si  $\delta A_m \geq \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^- - 1$ , alors le polynôme de degré minimal  $B'_m(z)$  solution de l'équation diophantine (10.44) est tel que  $\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$ , assurant la causalité du régulateur RST.*

### Démonstration

La solution adoptée obéit à  $\delta B'_m < \delta A_c^-$ , ou  $\delta B'_m \leq \delta A_c^- - 1$ . En tirant parti de cette inégalité, l'hypothèse du théorème peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta A_m &\geq \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^- - 1 \\ &\geq \delta A - \delta B^+ + \delta B'_m \\ &= \delta A - (\delta B^+ + \delta B^-) + \delta B'_m + \delta B^- \end{aligned}$$

Comme  $B(z) = B^+(z)B^-(z)$  et  $B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$  :

$$\delta A_m \geq \delta A - \delta B + \delta B_m$$

Ou :

$$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$$
■

La solution à degré minimal vérifie  $\delta B'_m \leq \delta A_c^- - 1$ . Le théorème ci-après fournit des informations plus précises.

**Théorème 10.7**

*Le polynôme  $B'_m(z)$  est de degré  $\delta A_c^- - 1$  et unique.*

**Démonstration**

La seconde équation diophantine (10.44) implique, en tenant compte de  $B^-(z)B'_m(z) = B_m(z)$  :

$$\delta(A_c^- X + B_m) = \delta A_m \quad (10.45)$$

En outre, comme  $\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$  (théorème 10.6) et  $\delta A > \delta B$  ( $H(z) = B(z)/A(z)$  est strictement propre) :

$$\delta A_m > \delta B_m$$

L'égalité (10.45) ne peut être satisfaite que si :

$$\delta(A_c^- X) > \delta B_m \quad (10.46)$$

Le système linéaire (10.28), écrit sous la forme compacte  $Mx = c$ , comprend dès lors  $\delta A_c^- + \delta X + 1$  équations. Les inconnues, rassemblées dans le vecteur  $x$ , sont les coefficients des polynômes  $X(z)$  et  $B'_m(z)$ , au nombre de  $\delta X + 1$  plus  $\delta B'_m + 1$ . Supposons qu'il y ait plus d'équations que d'inconnues :

$$\delta A_c^- + \delta X + 1 > \delta X + 1 + \delta B'_m + 1 = \delta X + \delta B'_m + 2$$

Comme la seconde équation diophantine possède au moins une solution (théorème 10.1), cette hypothèse est absurde ; en effet, le second membre  $c$  étant quelconque puisque  $A_m(z)$  peut être sélectionné librement, le rang de la matrice  $M$  ne pourrait pas être égal au rang de la matrice augmentée  $[ M \ c ]$  (sect. IV.1). Donc  $\delta A_c^- + \delta X + 1 \leq \delta X + \delta B'_m + 2$ , ou  $\delta B'_m \geq \delta A_c^- - 1$ . Vu que  $\delta B'_m \in [0, \delta A_c^- - 1]$ , on en conclut :

$$\delta B'_m = \delta A_c^- - 1 \quad (10.47)$$

Par ailleurs, l'égalité (10.47) est équivalente à  $\delta A_c^- + \delta X + 1 = \delta X + \delta B'_m + 2$  : le système d'équations  $Mx = c$  comprend le même nombre d'équations et d'inconnues ; la matrice  $M$  est ainsi carrée. L'existence d'au moins une solution garantit que le rang de la matrice  $M$  soit égal à celui de  $[ M \ c ]$ . Le vecteur  $c$  étant quelconque, le rang de  $M$  vaut  $\delta X + \delta B'_m + 2$ , égal au nombre d'inconnues, démontrant l'unicité de la solution de  $Mx = c$ . ■

Les relations (10.45) et (10.46) donnent  $\delta(A_c^- X + B_m) = \delta(A_c^- X) = \delta A_m$ , d'où  $\delta A_c^- + \delta X = \delta A_m$  et, finalement :

$$\delta X = \delta A_m - \delta A_c^- \quad (10.48)$$

Lorsqu'une implantation standard du régulateur RST est souhaitée, il suffit de remplacer l'inégalité formant l'hypothèse du théorème 10.6 par une égalité :

$$\delta A_m = \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^- - 1$$

En effet, en reprenant la démonstration du théorème 10.6, tout en sachant que  $\delta B'_m = \delta A_c^- - 1$ , nous aboutissons à  $\delta A_m - \delta B_m = \delta A - \delta B$ . Par contre, afin de se placer dans la situation où l'intégralité de la période d'échantillonnage est consacrée aux calculs et aux conversions, il s'agit, dans le théorème 10.6, d'échanger son hypothèse avec l'égalité :

$$\delta A_m = \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^-$$

Ce choix produit l'égalité désirée  $\delta A_m - \delta B_m = \delta A - \delta B + 1$  (§ 10.3.4).

#### EXEMPLE 10.9

Soit une consigne en forme de saut unité :

$$Y_c(z) = \frac{z}{z-1} \quad A_c(z) = A_c^-(z) = z-1 \quad B_c(z) = z$$

Le polynôme  $B'_m(z)$  est de degré  $\delta A_c^- - 1 = 1 - 1 = 0$ ; c'est par conséquent un nombre, solution de l'équation de Diophante :

$$(z-1)X(z) + B^-(z)B'_m = A_m(z)$$

Avec  $z = 1$ , cette égalité fournit :

$$B'_m = \frac{A_m(1)}{B^-(1)} \in \mathbb{R}$$

Comme  $B^-(1)B'_m = B_m(1)$ , on a  $B_m(1)/A_m(1) = H_m(1) = 1$ , résultat déjà trouvé dans l'exemple 10.1 et exploité à plusieurs reprises depuis lors.

#### EXEMPLE 10.10

Examinons à nouveau l'exemple 10.8, dans lequel :

$$Y_c(z) = \frac{hz}{(z-1)^2} \quad A_c(z) = A_c^-(z) = (z-1)^2 \quad B_c(z) = hz$$

Une implantation standard est recherchée, si bien que :

$$\delta A_m = \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^- - 1 = d+1 - 0 + 2 - 1 = d+2$$

Le polynôme  $A_m(z)$  de l'exemple 10.8 est retenu :

$$A_m(z) = z^{d+1}(z+c)$$

Les degrés des polynômes  $X(z)$  et  $B'_m(z)$  sont fixés par (10.48) et (10.47), respectivement :

$$\delta X = \delta A_m - \delta A_c^- = d+2-2=d$$

$$\delta B'_m = \delta A_c^- - 1 = 2-1=1$$

D'où :

$$X(z) = x_0 z^d + x_1 z^{d-1} + \cdots + x_d$$

$$B'_m(z) = b_{m_0} z + b_{m_1}$$

La seconde équation diophantine s'écrit, en se rappelant que  $B^-(z) = b$  :

$$(z - 1)^2 X(z) + b(b_{m_0} z + b_{m_1}) = z^{d+1}(z + c)$$

Quand  $z = 1$ , cette égalité polynomiale donne :

$$b(b_{m_0} + b_{m_1}) = 1 + c \quad (10.49)$$

De surcroît, en dérivant ses deux membres :

$$2(z - 1)X(z) + (z - 1)^2 \frac{dX}{dz}(z) + bb_{m_0} = (d + 1)z^d(z + c) + z^{d+1}$$

En posant à nouveau  $z = 1$  :

$$bb_{m_0} = (d + 1)(1 + c) + 1$$

D'où :

$$b_{m_0} = \frac{(1 + c)(1 + d) + 1}{b}$$

Par substitution dans (10.49) :

$$b_{m_1} = \frac{1 + c - bb_{m_0}}{b} = \frac{1 + c - (1 + c)(1 + d) - 1}{b} = -\frac{d(1 + c) + 1}{b}$$

Finalement :

$$B'_m(z) = \frac{(1 + c)(1 + d) + 1}{b}z - \frac{d(1 + c) + 1}{b}$$

Un rapide examen révèle qu'il s'agit du polynôme  $B'_m(z)$  obtenu dans l'exemple 10.8 ; le régulateur RST déjà dimensionné n'est pas altéré. ■

Notons que le polynôme  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$  dépend de la consigne puisque  $B'_m(z)$  est solution de l'équation diophantine (10.44), laquelle met en jeu le polynôme  $A_c^-(z)$  au dénominateur de ce signal. Un changement de consigne requiert une adaptation du polynôme  $T(z)$ . Ce problème sera repris dans la section 12.4 consacrée aux régulateurs à gains programmés.

Une application relativement sophistiquée a été mentionnée dans l'exemple 1.41. C'est le moment de signaler que les résultats reportés dans la partie droite de la figure 1.85 ont été obtenus avec des régulateurs RST mettant à profit les méthodologies du présent paragraphe.

Quelques informations sur un régulateur très particulier concluent le paragraphe. Avant d'en parler, il est certainement utile de rappeler que les pôles en boucle fermée sont les zéros du polynôme caractéristique  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)B^+(z)$ . Dans la fonction de transfert  $Y(z)/Y_c(z)$  en asservissement et après simplification par les polynômes  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$ , ces pôles sont les zéros de  $A_m(z)$  ; en rejet de perturbation, il y a simplification de la fonction de transfert  $Y(z)/W(z)$  par  $B^+(z)$  et les pôles en boucle fermée sont les zéros de

$A_m(z)A_0(z)$ ; quant à la fonction de transfert  $U(z)/Y_c(z)$  entre la consigne et la commande, son dénominateur vaut, après simplification par  $A_0(z)$ ,  $A_m(z)B^+(z)$  (§ 10.3.2). Afin d'assurer un amortissement du régime transitoire le plus rapide possible, ceci non seulement dans les trois fonctions de transfert qui viennent d'être rappelées, mais dans toutes les fonctions de transfert en boucle fermée, il peut venir à l'esprit de sélectionner des polynômes  $A_m(z)$ ,  $A_0(z)$  et  $B^+(z)$  dont les zéros sont tous nuls. Le plus souvent,  $B^+(z) = 1$  car des zéros nuls dans le processus à commander ne se rencontrent que rarement. En asservissement, le régime transitoire de la grandeur commandée  $y(kh)$  est alors une somme pondérée et *finie* d'impulsions unités apparaissant aux instants d'échantillonnage  $0, h, \dots, \delta A_m h$  (§ 4.4.1); en rejet de perturbation, ces impulsions se manifestent jusqu'à  $(\delta A_m + \delta A_0)h$  et, dans le signal de commande  $u(kh)$ , jusqu'à  $(\delta A_m + \delta B^+)h$ . Un régulateur RST caractérisé par  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)B^+(z) = z^{\delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+}$  est appelé **régulateur RST à réponse pile**. Signalons au passage qu'un tel comportement ne peut pas exister en analogique puisque les modes, qui sont des exponentielles, ne sont pas nuls après un temps fini. Par ailleurs, une situation spéciale se produit avec une consigne en forme de saut unité ( $\delta A_c^- = 1$ ) et sans simplification de zéros du système à commander ( $\delta B^+ = 0$ ); le théorème 10.6 fournit, pour une implantation standard :

$$\delta A_m = \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^- - 1 = \delta A - 0 + 1 - 1 = \delta A$$

En asservissement, les modes dans  $y(kh)$  sont donc nuls après l'instant  $\delta Ah$ , autrement dit après un nombre de coups d'horloge égal à l'ordre du processus à commander ! Ceci n'est pas le cas en rejet de perturbation, entre autres, car le polynôme observateur  $A_0(z)$ , de degré  $\delta A_0 = \delta A + \ell - 1$  selon le théorème 10.3, n'est pas simplifié dans la fonction de transfert  $Y(z)/W(z)$ . Pour en terminer avec les régulateurs à réponse pile, il est clair que les amplitudes de la grandeur de commande sont potentiellement très élevées étant donné que les modes sont violemment amortis. Dans cette situation, il est tentant d'augmenter la période d'échantillonnage  $h$  afin d'étendre les temps d'amortissement ; toutefois, le théorème de Shannon peut ne plus être respecté, provoquant lors de mesures bruitées de la grandeur à commander un repliement spectral (sect. 6.3). Au surplus, des perturbations analogiques affectant le système à commander sont mal rejetées car leur effet n'est plus observé entre deux coups d'horloge. Finalement, les régulateurs à réponse pile souffrent d'une mauvaise robustesse. Leur déploiement est dès lors envisageable quand d'importantes amplitudes de la commande sont tolérées, ou sans être soumis à des perturbations, et en disposant d'une fine modélisation du processus à commander. Ces circonstances se rencontrent notamment dans certains entraînements électriques.

### 10.3.6 Algorithmes de synthèse du régulateur RST

Un objectif du présent paragraphe est de résumer les résultats précédents sous la forme de tableaux, tout en les enrichissant d'exemples illustratifs. Ces tableaux montrent que la synthèse d'un régulateur RST peut être scindée en deux étapes principales : calcul des polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  intervenant dans la boucle de rétroaction, puis du polynôme  $T(z)$  extérieur à celle-ci.

On examine, pour commencer, le cas le plus simple où aucun zéro du processus à commander n'est simplifié et sans effet intégrateur. Par conséquent :

$$B^+(z) = 1 \quad B^-(z) = B(z)$$

$B(z)$  est donc un facteur de  $B_m(z)$  :

$$B_m(z) = B(z)B'_m(z)$$

En outre :

$$R(z) = \overline{R}(z)$$

L'équation de Diophante s'écrit alors :

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)$$

Le dimensionnement du régulateur RST est consigné dans le tableau 10.1.

**Tableau 10.1** Synthèse du régulateur RST sans intégrateur et sans simplification de zéros du système à commander.

<b>Données</b>
$A(z)$ et $B(z)$
<b>Spécifications</b>
$A_m(z)$ , $B_m(z)$ et $A_0(z)$
<b>Conditions</b>
$A(z)$ et $B(z)$ n'ont aucun facteur commun
$B^+(z) = 1$
$B_m(z) = B(z)B'_m(z)$
$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$
$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - 1$
$\delta R = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A$
$\delta S = \delta A - 1$
<b>Etape 1</b>
Résoudre $A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)$
<b>Etape 2</b>
Calculer $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$

Dans ce tableau, et également dans les suivants, les degrés des polynômes  $A_m(z)$ ,  $B_m(z)$  et  $A_0(z)$  dépendent des inégalités figurant dans la liste des conditions ; par spécifications, il faut comprendre la structure de ces polynômes. En guise d'exemple, c'est au stade des spécifications qu'un polynôme observateur  $A_0(z)$  à réponse pile peut être considéré. Au surplus, par souci de simplicité, le calcul du polynôme  $B'_m(z)$  à l'aide d'une seconde équation diophantine n'apparaît pas explicitement.


**EXEMPLE 10.11**

Revenons à la commande en vitesse d'un entraînement déjà abordé à plusieurs reprises. Avec  $h = 0,025$  s comme dans l'exemple 9.8, le processus à commander est représenté par la fonction de transfert échantillonnée :

$$H(z) = \frac{0,0975}{z - 0,95}$$

Il s'agit de dimensionner un régulateur RST, pour le moment sans intégrateur, et bien sûr sans simplification de zéro du système à commander puisque ce dernier n'en possède point.

On a :

$$A(z) = z - 0,95 \quad B(z) = 0,0975 \quad B^+(z) = 1 \quad B^-(z) = 0,0975$$

La fonction de transfert  $H(z)$  contient le pôle  $z = 0,95$  relativement proche de 1. En boucle ouverte, l'amortissement du régime transitoire est par conséquent de qualité moyenne.

Selectionnons un modèle à poursuivre selon les directives les plus simples du paragraphe 10.3.5. Le polynôme  $P(z)$  est de degré 1 :

$$P(z) = z + c$$

Une condition absolue d'amortissement d'un facteur  $a = 15$  en  $k_a = 5$  coups d'horloge est imposée (ex. 9.8) ; le zéro  $z = -c$  de  $P(z)$  doit ainsi être égal à :

$$e^{-\frac{\ln 15}{5}} = 0,58$$

Le numérateur du modèle à poursuivre est donc :

$$B_m(z) = B^-(z) \frac{P(1)}{B^-(1)} = 0,0975 \frac{1 - 0,58}{0,0975} = 0,42$$

Et :

$$B'_m(z) = \frac{P(1)}{B^-(1)} = 4,31$$

On souhaite une implantation standard ; alors  $\delta A_m - \delta B_m = \delta A - \delta B = 1$ , fournit  $\delta A_m = 1$  ; vu que  $\delta P = 1$ , il n'est pas nécessaire d'insérer un polynôme auxiliaire dans le modèle à poursuivre. Par conséquent,  $A_m(z) = z - 0,58$  et :

$$H_m(z) = \frac{0,42}{z - 0,58}$$

Qui plus est, avec ce type d'implantation :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

D'où :

$$A_0(z) = 1$$

Nous avons :

$$\delta R = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\delta S = \delta A - 1 = 1 - 1 = 0$$

Ainsi :

$$R(z) = 1 \quad S(z) = s_0$$

Il en découle l'équation diophantine :

$$(z - 0,95) \cdot 1 + 0,0975 s_0 = (z - 0,58) \cdot 1$$

Donc :

$$0,0975 s_0 - 0,95 = -0,58$$

Et :

$$s_0 = 3,79$$

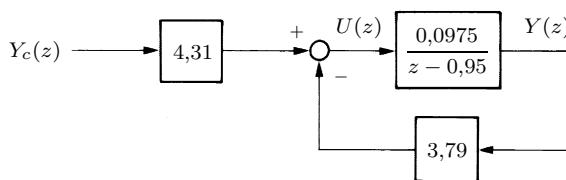
On calcule finalement  $T(z)$  :

$$T(z) = B'_m(z) A_0(z) = 4,31 \cdot 1$$

L'équation du régulateur RST, prête à être codée, s'écrit alors :

$$u(k) = 4,31 y_c(k) - 3,79 y(k)$$

Le système en boucle fermée est par conséquent décrit par le schéma fonctionnel à trois branches de la figure 10.8.



**Fig. 10.8** Commande RST de vitesse d'un entraînement.

Notons que la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = 4,31 \frac{\frac{0,0975}{z-0,95}}{1 + 3,79 \frac{0,0975}{z-0,95}} = \frac{0,42}{z-0,58}$$

Cette expression est égale à  $H_m(z)$ , comme il se doit.


**EXEMPLE 10.12**

L'entraînement de l'exemple précédent est maintenant commandé en position. Avec  $h = 0,025$  s, sa fonction de transfert échantillonnée est (ex. 5.1) :

$$H(z) = \frac{10^{-3}(1,23z + 1,21)}{z^2 - 1,95z + 0,95} = \frac{1,23 \cdot 10^{-3}(z + 0,98)}{(z - 1)(z - 0,95)}$$

Un régulateur RST sans intégrateur est synthétisé. Le zéro du système à commander vaut  $z = -0,98$ ; bien qu'à l'intérieur du cercle unité, il est trop proche de  $-1$  pour être simplifié.

Vu l'importance pratique de cet exemple, nous le traitons symboliquement en posant :

$$H(z) = \frac{b_0(z + b)}{(z - 1)(z - p)}$$

Le pôle  $p$  et le zéro  $-b$  vérifient  $0 < p < 1$  et  $-1 < -b < 0$ , respectivement ; en outre,  $b_0 > 0$ . On a :

$$A(z) = (z - 1)(z - p) \quad B(z) = b_0(z + b)$$

Aucune simplification de zéro n'est souhaitable ; ainsi :

$$B^+(z) = 1 \quad B^-(z) = b_0(z + b)$$

Le modèle à poursuivre le plus simple du paragraphe 10.3.5 est tout d'abord choisi, avec un polynôme  $P(z)$  de degré 2 :

$$P(z) = z^2 + c_1z + c_2$$

Le numérateur du modèle à poursuivre s'écrit :

$$B_m(z) = B^-(z) \frac{P(1)}{B^-(1)} = b_0(z + b) \frac{1 + c_1 + c_2}{b_0(1 + b)} = \frac{1 + c_1 + c_2}{1 + b} (z + b)$$

Et :

$$B'_m(z) = \frac{P(1)}{B^-(1)} = \frac{1 + c_1 + c_2}{b_0(1 + b)}$$

Une implantation standard est spécifiée ; donc  $\delta A_m - \delta B_m = \delta A - \delta B = 1$ , donnant  $\delta A_m = 2$ ; comme  $\delta P = 2$ , il n'est pas nécessaire d'incorporer un polynôme auxiliaire dans le modèle à poursuivre. Alors  $A_m(z) = z^2 + c_1z + c_2$  et :

$$H_m(z) = \frac{1 + c_1 + c_2}{1 + b} \cdot \frac{z + b}{z^2 + c_1z + c_2}$$

Avec cette façon de réaliser le régulateur :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$$

Un polynôme observateur pas forcément à réponse pile est considéré :

$$A_0(z) = z + a$$

De surcroît :

$$\delta R = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A = 2 + 1 - 2 = 1$$

$$\delta S = \delta A - 1 = 2 - 1 = 1$$

Par conséquent :

$$R(z) = z + r_1 \quad S(z) = s_0 z + s_1$$

D'où l'équation diophantine :

$$(z - 1)(z - p)(z + r_1) + b_0(z + b)(s_0 z + s_1) = (z^2 + c_1 z + c_2)(z + a)$$

Ou :

$$\begin{aligned} & (z^2 - (1 + p)z + p)(z + r_1) + (b_0 z + b b_0)(s_0 z + s_1) \\ &= z^3 + (a + c_1)z^2 + (ac_1 + c_2)z + ac_2 \end{aligned}$$

La matrice de Sylvester associée à cette équation est d'ordre  $\delta R + \delta S + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 + p) & 1 & b_0 & 0 \\ p & -(1 + p) & b b_0 & b_0 \\ 0 & p & 0 & b b_0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} r_0 \\ r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ a + c_1 \\ ac_1 + c_2 \\ ac_2 \end{array} \right] \quad (10.50)$$

La première équation fournit  $r_0 = 1$ , comme il se doit (§ 10.3.4). Finalement :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) = \frac{1 + c_1 + c_2}{b_0(1 + b)}(z + a)$$

En posant  $t_0 = \frac{1+c_1+c_2}{b_0(1+b)}$  et  $t_1 = t_0 a$ , on a l'équation du régulateur RST :

$$(z + r_1)U(z) = (t_0 z + t_1)Y_c(z) - (s_0 z + s_1)Y(z)$$

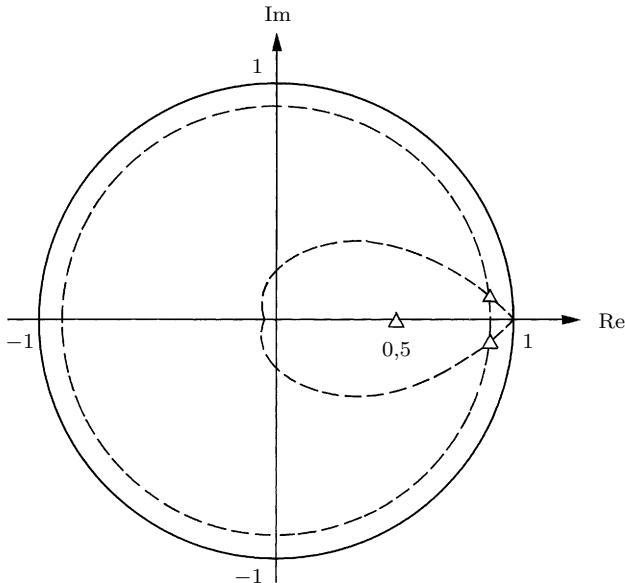
D'où :

$$(1 + r_1 q^{-1})u(k) = (t_0 + t_1 q^{-1})y_c(k) - (s_0 + s_1 q^{-1})y(k)$$

Il en résulte la relation suivante, prête à être codée :

$$u(k) = -r_1 u(k - 1) + t_0 y_c(k) + t_1 y_c(k - 1) - s_0 y(k) - s_1 y(k - 1)$$

Traitons l'application numérique  $p = 0,95$ ,  $b_0 = 1,23 \cdot 10^{-3}$  et  $b = 0,98$ . Par ailleurs,  $a = -0,5$  (fig. 10.9) : le polynôme observateur n'est pas à réponse pile. Tout en imposant une condition relative d'amortissement d'un facteur 535 en une



**Fig. 10.9** Zéros des polynômes  $A_m(z)$  et  $A_0(z)$ .

oscillation, le module des zéros de  $A_m(z)$  est pris égal à 0,9 ; cela conduit aux zéros (pôles en boucle fermée)  $0,89 \pm j0,09$  (fig. 10.9).

La résolution de (10.50) débouche sur le polynôme  $R(z) = z - 0,38$  : dans cet exemple, les fonctions de transfert  $S(z)/R(z)$  et  $T(z)/R(z)$  jouissent de la propriété de stabilité. La réponse indicielle en boucle fermée, ainsi que la grandeur de commande, sont reportées dans la figure 10.10. Une rapide analyse de la robustesse (§ 10.3.1) mène à la marge de gain 22,1 dB et à la marge de phase  $58^\circ$ .

Comme il ressort de la partie supérieure de la figure 10.11, le régulateur RST dimensionné dans les lignes précédentes ne parvient pas à éliminer la traînée. Le polynôme  $T(z)$  est maintenant modifié afin de corriger ce défaut.

La grandeur de consigne est :

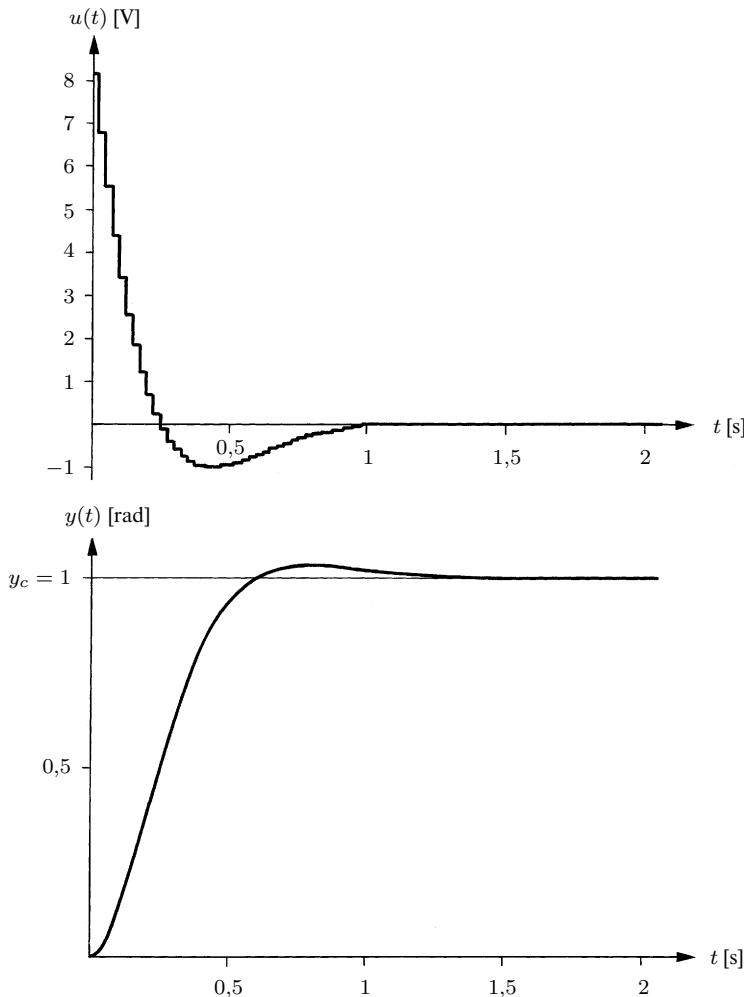
$$Y_c(z) = \frac{hz}{(z-1)^2} \quad A_c(z) = A_c^-(z) = (z-1)^2 \quad B_c(z) = hz$$

L'implantation est standard, de sorte que :

$$\delta A_m = \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^- - 1 = 2 - 0 + 2 - 1 = 3$$

Le polynôme  $A_m(z)$  est constitué du polynôme  $z^2 + c_1z + c_2$ , comme ci-dessus, auquel est adjoint le polynôme auxiliaire  $z + c$  :

$$A_m(z) = (z + c)(z^2 + c_1z + c_2)$$



**Fig. 10.10** Grandeur de commande et réponse indicelle en boucle fermée d'un entraînement commandé par un régulateur RST sans simplification du zéro du processus à commander.

Les degrés des polynômes  $X(z)$  et  $B'_m(z)$  découlent de (10.48) et (10.47), respectivement :

$$\delta X = \delta A_m - \delta A_c^- = 3 - 2 = 1$$

$$\delta B'_m = \delta A_c^- - 1 = 2 - 1 = 1$$

D'où :

$$X(z) = x_0 z + x_1$$

$$B'_m(z) = b_{m_0} z + b_{m_1}$$

La seconde équation diophantine s'écrit :

$$(z - 1)^2(x_0z + x_1) + b_0(z + b)(b_{m_0}z + b_{m_1}) = (z + c)(z^2 + c_1z + c_2)$$

Ou :

$$\begin{aligned} & (z^2 - 2z + 1)(x_0z + x_1) + (b_0z + bb_0)(b_{m_0}z + b_{m_1}) \\ &= z^3 + (c + c_1)z^2 + (cc_1 + c_2)z + cc_2 \end{aligned}$$

La matrice de Sylvester liée à cette équation est d'ordre  $\delta X + \delta B'_m + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & b_0 & 0 \\ 1 & -2 & bb_0 & b_0 \\ 0 & 1 & 0 & bb_0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ b_{m_0} \\ b_{m_1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ c + c_1 \\ cc_1 + c_2 \\ cc_2 \end{array} \right] \quad (10.51)$$

Le degré du polynôme observateur passe à zéro :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$$

Et :

$$A_0(z) = 1$$

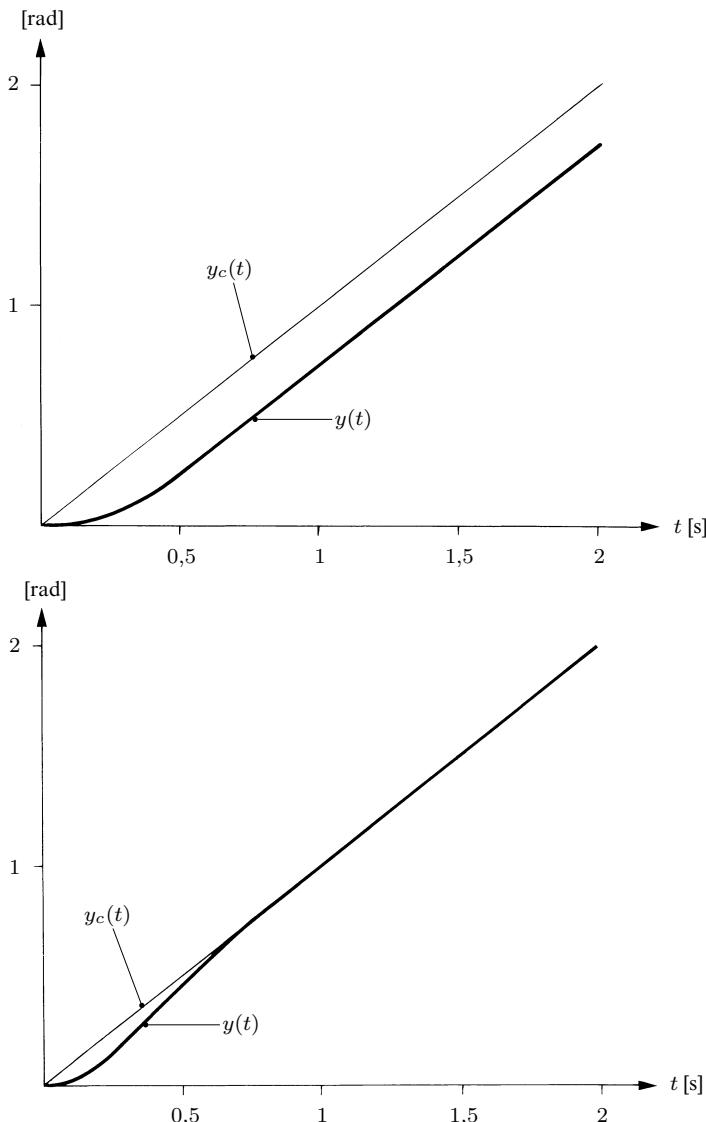
Les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  déjà obtenus demeurent les mêmes, pour autant que le polynôme auxiliaire  $z + c$  soit égal à l'ancien polynôme observateur  $z + a$ , autrement dit si  $a = c$ . Quant au polynôme  $T(z)$ , il devient :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) = B'_m(z) = b_{m_0}z + b_{m_1}$$

Soit le cas concret déjà considéré dans la première partie de l'exemple. Le zéro supplémentaire incorporé dans le modèle à poursuivre, découlant de (10.51) (ou de la formule (10.43)), vaut  $-b_{m_1}/b_{m_0} = 0,919$ , si bien que :

$$\begin{aligned} H_m(z) &= \frac{0,062(z + 0,98)(z - 0,919)}{(z - 0,5)(z - 0,89 - j0,09)(z - 0,89 + j0,09)} \\ &= \frac{0,062(z + 0,98)(z - 0,919)}{(z - 0,5)(z^2 - 1,78z + 0,8)} \end{aligned}$$

La partie inférieure de la figure 10.11 montre clairement que l'ajout de ce zéro annule la traînée. ■



**Fig. 10.11** Réponses à une rampe en boucle fermée d'un entraînement commandé par un régulateur RST sans et avec zéro supplémentaire dans le modèle à poursuivre.

Examinons maintenant la situation, toujours sans intégrateur, où il s'agit de provoquer une simplification de zéros du processus à commander, zéros appartenant à la région en tramé de la figure 10.7. C'est alors le polynôme  $\bar{R}(z)$  qui doit être déterminé à l'aide de l'équation de Diophante, et non pas  $R(z)$  comme dans l'algorithme précédent. Vu que  $R(z) = B^+(z)\bar{R}(z)$ , le degré de  $\bar{R}(z)$  vaut  $\delta R - \delta B^+$  : il est inférieur à celui de  $R$  et le nombre de coefficients à déterminer passe à  $\delta\bar{R} + \delta S + 2$ , inférieur à  $\delta R + \delta S + 2$ . La résolution de l'équation de Diophante est de la sorte moins gourmande en temps de calcul, ce qui est appréciable

notamment lors de la mise en œuvre en temps réel de la synthèse du régulateur dans un schéma de commande adaptative (chap. 12). Au surplus, il est possible de déterminer, en fonction de la position des zéros en boucle fermée, des bornes sur le nombre d'extrema de la grandeur commandée. Ces bornes peuvent dans certains cas être mises à profit pour garantir l'absence de dépassement de la valeur de consigne. Un moyen potentiel d'aboutir aux bornes souhaitées consiste à éliminer les zéros gênants en les incorporant dans le polynôme  $B^+(z)$ .

Le dimensionnement du régulateur RST avec simplification de zéros, sans intégrateur, est résumé dans le tableau 10.2.

**Tableau 10.2** Synthèse du régulateur RST sans intégrateur dans le cas où il y a simplification de zéros du système à commander.

<b>Données</b>
$A(z)$ et $B(z)$
<b>Spécifications</b>
$A_m(z)$ , $B_m(z)$ et $A_0(z)$
<b>Conditions</b>
$A(z)$ et $B(z)$ n'ont aucun facteur commun
Les zéros de $B^+(z)$ appartiennent à la région en tramé de la figure 10.7
$B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$
$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$
$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ - 1$
$\delta \bar{R} = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A$
$\delta S = \delta A - 1$
<b>Etape 1</b>
Effectuer la factorisation $B(z) = B^+(z)B^-(z)$
<b>Etape 2</b>
Résoudre $A(z)\bar{R}(z) + B^-(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)$
<b>Etape 3</b>
Calculer $R(z) = B^+(z)\bar{R}(z)$ et $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$



### EXEMPLE 10.13

On reprend ici l'entraînement de l'exemple précédent, mais en commettant la maladresse de simplifier le zéro  $z = -b = -0,98$  proche de  $-1$ , maladresse qui n'est pas fatale en soi puisque ce zéro est à l'intérieur du cercle unité. Maintenant :

$$B^+(z) = z + b \quad B^-(z) = b_0$$

Le modèle à poursuivre est sélectionné selon les directives du paragraphe 10.3.5, avec un polynôme  $P(z)$  de degré 1 :

$$P(z) = z + c$$

D'où le numérateur du modèle à poursuivre :

$$B_m(z) = B^-(z) \frac{P(1)}{B^-(1)} = b_0 \frac{1+c}{b_0} = 1+c$$

Et :

$$B'_m(z) = \frac{P(1)}{B^-(1)} = \frac{1+c}{b_0}$$

Dans une implantation standard, nous avons  $\delta A_m - \delta B_m = \delta A - \delta B = 1$ , d'où  $\delta A_m = 1$ ; avec  $\delta P = 1$ , il ne faut pas insérer un polynôme auxiliaire dans le modèle à poursuivre. Par conséquent,  $A_m(z) = z + c$  et :

$$H_m(z) = \frac{1+c}{z+c}$$

Avec cette manière d'implanter le régulateur :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ - 1 = 4 - 1 - 1 - 1 = 1$$

Soit le polynôme observateur :

$$A_0(z) = z + a$$

En outre :

$$\delta \bar{R} = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\delta S = \delta A - 1 = 2 - 1 = 1$$

Ainsi :

$$\bar{R}(z) = 1 \quad S(z) = s_0 z + s_1$$

L'équation diophantine s'écrit :

$$(z-1)(z-p) \cdot 1 + b_0(s_0 z + s_1) = (z+c)(z+a) \quad (10.52)$$

Cette équation donne, en posant successivement  $z = 1$  et  $z = p$  :

$$\begin{cases} b_0(s_0 + s_1) = (1+c)(1+a) \\ b_0(s_0 p + s_1) = (p+c)(p+a) \end{cases}$$

On en déduit facilement :

$$s_0 = \frac{1+a+c+p}{b_0} \quad s_1 = \frac{ac-p}{b_0}$$

Finalement :

$$R(z) = B^+(z)\bar{R}(z) = z + b$$

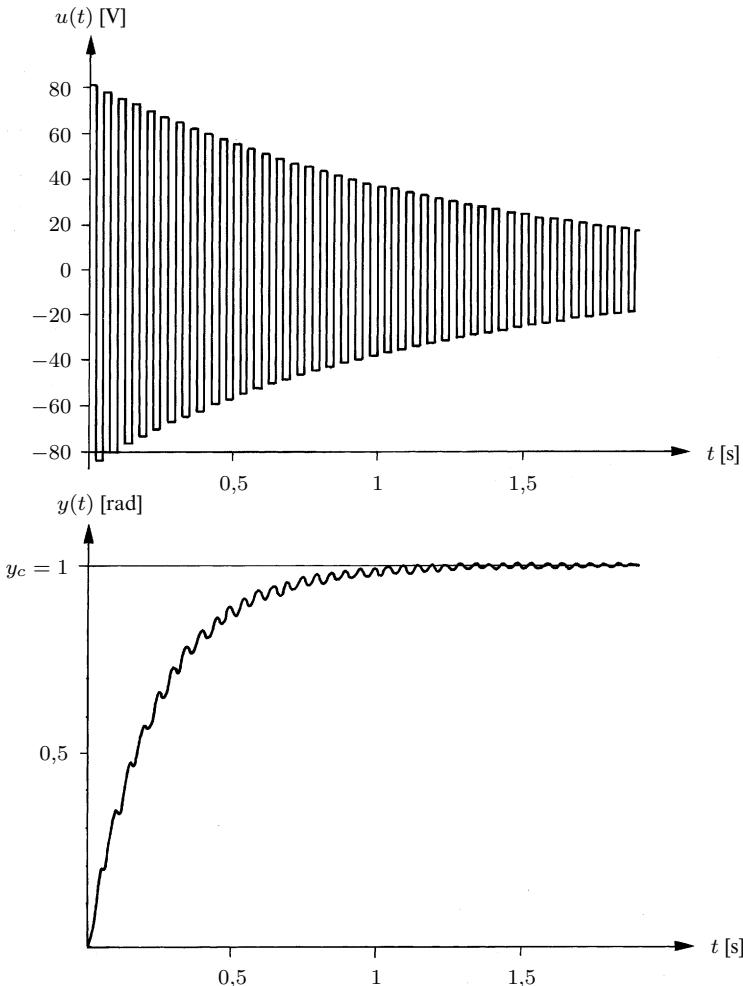
$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) = \frac{1+c}{b_0} (z + a)$$

Avec  $t_0 = \frac{1+c}{b_0}$  et  $t_1 = t_0a$ , nous aboutissons au régulateur RST :

$$(z + b)U(z) = (t_0z + t_1)Y_c(z) - (s_0z + s_1)Y(z)$$

Alors :

$$(1 + b q^{-1})u(k) = (t_0 + t_1 q^{-1})y_c(k) - (s_0 + s_1 q^{-1})y(k)$$



**Fig. 10.12** Grandeur de commande et réponse indicelle en boucle fermée d'un entraînement commandé par un régulateur RST avec simplification du zéro du processus à commander.

L'équation à coder est donc :

$$u(k) = -bu(k-1) + t_0y_c(k) + t_1y_c(k-1) - s_0y(k) - s_1y(k-1)$$

La réponse indicielle en boucle fermée et la grandeur de commande sont tracées dans la figure 10.12, dans le cas  $p = 0,95$ ,  $b_0 = 1,23 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 0,98$ ,  $a = -0,5$  et  $c = -0,9$ . Comme cela est précisé dans le paragraphe 10.3.2, le polynôme  $B^+(z) = z + 0,98$  se retrouve intact au dénominateur de la fonction de transfert  $U(z)/Y_c(z)$  : le mode sonnette  $(-0,98)^k$ ,  $k \geq 0$ , qui en résulte provoque une forte agitation de la grandeur de commande ; qui plus est, ce mode sonnette est mal amorti puisque  $-0,98$  est proche de  $-1$  ; après filtrage par le processus à commander, l'agitation due au mode sonnette se retrouve sous la forme de légères oscillations affectant la grandeur commandée *entre* les instants d'échantillonnage (§ 10.3.2). ■

Un cas extrême de l'algorithme précédent se produit quand *tous* les zéros du système à commander sont simplifiés. Ceci n'est possible qu'à la condition expresse qu'ils soient à l'intérieur du cercle unité, ou mieux qu'ils appartiennent à la région en tramé de la figure 10.7. Donc :

$$B^+(z) = \frac{1}{b_0} B(z) \quad B^-(z) = b_0$$

Le nombre  $b_0$  est le coefficient dans le terme de plus grand degré dans le polynôme  $B(z)$ . Par conséquent :

$$B_m(z) = b_0 B'_m(z)$$

L'équation de Diophante à résoudre est ainsi :

$$A(z)\bar{R}(z) + b_0 S(z) = A_m(z)A_0(z)$$

Comme  $\delta B^- = 0$ , nous constatons que la matrice de Sylvester du système d'équations algébriques linéaires (10.28) est *triangulaire* :

$$\left[ \begin{array}{ccccccccc} a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ a_{\delta A} & \vdots & \ddots & a_1 & b_0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & a_{\delta A} & \ddots & a_2 & 0 & b_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{\delta A} & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{array} \right]$$

La solution de l'équation diophantine est alors immédiate. Cette situation est consignée dans le tableau 10.3.

**Tableau 10.3** Synthèse du régulateur RST sans intégrateur dans le cas où tous les zéros du système à commander sont simplifiés.

<b>Données</b>
$A(z)$ et $B(z)$
<b>Spécifications</b>
$A_m(z)$ , $B_m(z)$ et $A_0(z)$
<b>Conditions</b>
$A(z)$ et $B(z)$ n'ont aucun facteur commun
Les zéros de $B(z)$ appartiennent à la région en tramé de la figure 10.7
$B_m(z) = b_0 B'_m(z)$
$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$
$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B - 1$
$\delta \bar{R} = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A$
$\delta S = \delta A - 1$
<b>Etape 1</b>
Résoudre $A(z)\bar{R}(z) + b_0 S(z) = A_m(z)A_0(z)$
<b>Etape 2</b>
Calculer $R(z) = \frac{1}{b_0} B(z)\bar{R}(z)$ et $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$

#### EXEMPLE 10.14

Dans l'exemple précédent, le seul zéro du système à commander est simplifié. L'équation diophantine (10.52) peut être mise sous la forme suivante :

$$(z^2 - (1+p)z + p) + b_0(s_0z + s_1) = z^2 + (a+c)z + ac$$

La matrice de Sylvester qui lui est attachée est triangulaire et d'ordre  $\delta \bar{R} + \delta S + 2 = 0 + 1 + 2 = 3$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(1+p) & b_0 & 0 \\ p & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a+c \\ ac \end{bmatrix}$$

La première équation fournit évidemment  $r_0 = 1$  ; les deux dernières donnent :

$$s_0 = \frac{1+a+c+p}{b_0} \quad s_1 = \frac{ac-p}{b_0}$$

■

On traite finalement le cas où un intégrateur est incorporé dans le régulateur RST ; une simplification de zéros du processus à commander est admise, couvrant de la sorte les situations extrêmes où il n'y a aucune simplification et où tous ces zéros sont simplifiés. Le dimensionnement est résumé dans le tableau 10.4.

**Tableau 10.4** Synthèse du régulateur RST avec intégrateur dans le cas où il y a simplification de zéros du système à commander.

<b>Données</b>
$A(z)$ et $B(z)$
<b>Spécifications</b>
$A_m(z)$ , $B_m(z)$ et $A_0(z)$
<b>Conditions</b>
$A(z)$ et $B(z)$ n'ont aucun facteur commun
Les zéros de $B^+(z)$ appartiennent à la région en tramé de la figure 10.7
$B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)$
$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B$
$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ + \ell - 1$
$\delta \bar{R}' = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A - \ell$
$\delta S = \delta A + \ell - 1$
<b>Etape 1</b>
Effectuer la factorisation $B(z) = B^+(z)B^-(z)$
<b>Etape 2</b>
Résoudre $A(z)(z-1)^\ell \bar{R}'(z) + B^-(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)$
<b>Etape 3</b>
Calculer $R(z) = (z-1)^\ell B^+(z)\bar{R}'(z)$ et $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$

### EXEMPLE 10.15

Revenons à la commande de la vitesse d'un entraînement (ex. 10.11), perturbé maintenant par un couple résistant constant. Cette perturbation agit de façon additive en amont du système à commander, comme cela est représenté dans figure 10.4 (voir aussi à ce sujet l'exemple 7.18). Afin de la rejeter, on insère un intégrateur de type  $\ell = 1$ . Donc :

$$\delta A_0 = 2\delta A - \delta A_m + \ell - 1 = 2 - 1 + 1 - 1 = 1$$

Avec un polynôme observateur à réponse pile :

$$A_0(z) = z$$

Par ailleurs, en tenant compte du fait qu'ici  $\bar{R}'(z) = R'(z)$  puisque  $B^+(z) = 1$  :

$$\begin{aligned}\delta R' &= \delta A_m + \delta A_0 - \delta A - \ell = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \\ \delta S &= \delta A + \ell - 1 = 1 + 1 - 1 = 1\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$R'(z) = 1 \quad S(z) = s_0 z + s_1$$

L'équation diophantine s'écrit :

$$(z - 0,95)(z - 1) \cdot 1 + 0,0975(s_0 z + s_1) = (z - 0,58)z$$

Ainsi :

$$z^2 + (-1 - 0,95 + 0,0975 s_0)z + 0,95 + 0,0975 s_1 = z^2 - 0,58 z$$

Ou :

$$\begin{cases} 0,0975 s_0 = -0,58 - (-1,95) \\ 0,0975 s_1 = -0,95 \end{cases}$$

Alors :

$$s_0 = 14,05 \quad s_1 = -9,74$$

Et :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) = 4,31 z$$

Il en résulte l'équation du régulateur RST :

$$(z - 1) \cdot 1 \cdot U(z) = 4,31 z Y_c(z) - (14,05 z - 9,74)Y(z)$$

Donc :

$$(1 - q^{-1})u(k) = 4,31 y_c(k) - (14,05 - 9,74 q^{-1})y(k)$$

Le code se fonde directement sur l'équation :

$$u(k) = u(k - 1) + 4,31 y_c(k) - 14,05 y(k) + 9,74 y(k - 1)$$

## 10.4 Commentaires

### 10.4.1 Influence d'un intégrateur

Comme nous l'avons vu dans la section 10.2, l'effet majeur d'un intégrateur est de rejeter des perturbations ; la sensibilité à basse fréquence est de surcroît amoindrie (§ 10.3.1).

Il existe deux différences importantes entre un intégrateur incorporé dans un régulateur RST et le terme intégral placé dans une architecture classique, par exemple un régulateur PID numérique.

La première réside dans le fait qu'un intégrateur dans un régulateur RST n'élimine pas forcément des écarts permanents d'asservissement. En effet, si le modèle à poursuivre n'est pas choisi de sorte que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = 0$ , cet écart permanent se transmet tel quel sur le système en boucle fermée, comme on l'a relevé dans le paragraphe 10.3.1.

En outre, l'introduction d'un terme intégral dans un régulateur classique affecte généralement le montage en asservissement. Ce n'est *théoriquement* pas le cas en insérant un intégrateur dans un régulateur RST puisque seul le modèle à poursuivre fige le comportement en asservissement.

### EXEMPLE 10.16

L'introduction, dans l'exemple 10.15, d'un intégrateur dans le régulateur RST de l'exemple 10.11 ne modifie théoriquement pas le comportement en asservissement, complètement fixé par le modèle à poursuivre  $H_m(z) = \frac{0,42}{z-0,58}$ . ■

Toutefois, il découle du critère de Nyquist que les marges de stabilité s'amenuisent avec l'ajout d'intégrateurs. Par ailleurs, quand le modèle nominal  $H(z) = B(z)/A(z)$  du processus à commander employé dans la synthèse du régulateur RST diffère du système à commander réel  $H^0(z) = B^0(z)/A^0(z)$ , le théorème 10.1 montre que, avec  $R(z) = (z-1)^\ell R'(z)$ , la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$H_m(z) = \frac{1}{1 + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_m(z)A_0(z)}}$$

Il est clair que, si  $\ell > 0$ , la différence  $\frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)}$  provenant des erreurs de modélisation est en quelque sorte gommée quand  $z$  tend vers 1 : le facteur multipliant le modèle à poursuivre  $H_m(z)$  devient égal à l'unité. Ce résultat est couramment mis à profit pour éliminer de petits écarts permanents dus aux erreurs de modélisation. Nous en concluons que des effets intégrateurs peuvent agir favorablement sur le montage en asservissement.

Dans le détail, lorsque  $H^0(z) \neq H(z)$ , un calcul de l'écart entre la consigne  $Y_c(z) = B_c(z)/A_c(z)$  et la grandeur à commander  $Y(z)$  fournit (voir à ce sujet le théorème 10.5 et sa démonstration) :

$$\begin{aligned} Y_c(z) - Y(z) \\ = \left( 1 - \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot \frac{1}{1 + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_m(z)A_0(z)}} \right) Y_c(z) \end{aligned}$$

$$= \frac{A_m(z) - B_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}}{A_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}} \cdot \frac{B_c(z)}{A_c(z)}$$

En tirant parti du théorème 10.5, on sait que le polynôme  $B_m(z)$  est tel que  $A_m(z) - B_m(z)$  est égal à un polynôme  $A_c^-(z)X(z)$ , où  $A_c^-(z)$  apparaît dans la factorisation spectrale  $A_c(z) = A_c^+(z)A_c^-(z)$  :

$$\begin{aligned} & Y_c(z) - Y(z) \\ &= \frac{A_c^-(z)X(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}}{A_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}} \cdot \frac{B_c(z)}{A_c^+(z)A_c^-(z)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{A_c^-(z)X(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}}{A_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}} \\ &\quad \cdot \frac{B_c(z)}{A_c^+(z)A_c^-(z)} \end{aligned}$$

### EXEMPLE 10.17

Soit une consigne en forme de saut unité :

$$Y_c(z) = \frac{z}{z-1} \quad A_c(z) = A_c^-(z) = z-1 \quad B_c(z) = z$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{(z-1)X(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}}{A_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}} \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)X(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}}{A_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}} \end{aligned}$$

Si le processus à commander renferme un intégrateur, mais que le régulateur RST n'en possède point ( $\ell = 0$ ), cette limite est manifestement nulle. Par contre, si le système à commander ne contient aucun intégrateur, il est nécessaire d'avoir  $\ell \geq 1$  afin d'éliminer le statisme d'asservissement.

### EXEMPLE 10.18

Considérons maintenant une consigne en forme de rampe discrète :

$$Y_c(z) = \frac{hz}{(z-1)^2} \quad A_c(z) = A_c^-(z) = (z-1)^2 \quad B_c(z) = hz$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{(z-1)^2 X(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}}{A_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}} \cdot \frac{hz}{(z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2 X(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}}{A_m(z) + (z-1)^\ell R'(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_0(z)}} \cdot \frac{h}{z-1} \end{aligned}$$

Un rapide examen de cette expression fait ressortir qu'une traînée existe quand la boucle n'inclut qu'un intégrateur, à savoir un intégrateur dans le processus à commander et  $\ell = 0$  ou aucun intégrateur dans le système à commander et  $\ell = 1$ . On note aussi que la traînée disparaît avec deux intégrateurs dans la boucle. ■

Le problème de l'emballage discuté dans le contexte de l'algorithme PID est toujours d'actualité lorsque le régulateur RST inclut un ou plusieurs intégrateurs ( $\ell > 0$ ). Des mesures drastiques s'imposent pour en atténuer les conséquences. Pour ce faire, nous pouvons nous inspirer des techniques développées dans le paragraphe 8.3.5. Seule la mesure anti-emballage illustrée sous forme de schéma fonctionnel dans la figure 8.22 est maintenant reprise.

Pour une meilleure lisibilité, on considère un régulateur RST incluant  $\ell = 1$  effet intégrateur et dont ses polynômes sont exprimés en puissances négatives de  $z$  :

$$(1 - z^{-1})R'(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z)$$

Ou :

$$U(z) = \frac{T(z)}{(1 - z^{-1})R'(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{(1 - z^{-1})R'(z)} Y(z)$$

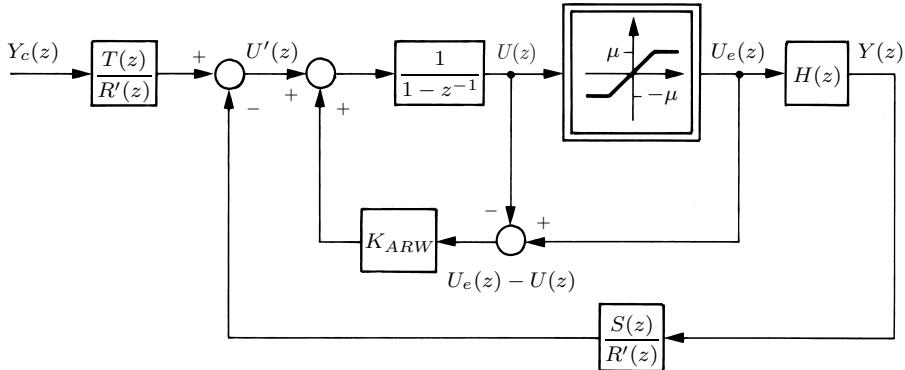
Posons :

$$U'(z) = \frac{T(z)}{R'(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R'(z)} Y(z)$$

Donc :

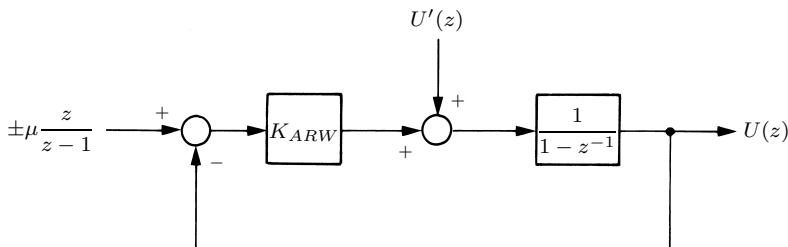
$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} U'(z)$$

Comme cela est mis en évidence dans la figure 10.13, un élément non linéaire de type saturation délivre la grandeur de commande effective  $u_e(kh)$  au processus à commander  $H(z)$ .



**Fig. 10.13** Mesure anti-emballlement du régulateur RST.

Le degré d'incursion dans la saturation est quantifié par le signal  $\mu - u(kh)$  si  $u(kh) > \mu$  et  $-\mu - u(kh)$  si  $u(kh) < -\mu$ ; ce signal, amplifié par le gain  $K_{ARW}$ , est adjoint à l'entrée de l'intégrateur afin, en quelque sorte, de le « vider » quand il y a saturation. Tout se passe alors comme si une consigne  $\pm\mu$  constante était assignée à  $u(kh)$  (fig. 10.14).



**Fig. 10.14** Mesure anti-emballlement vue comme un montage à rétroaction.

La fonction de transfert en boucle fermée (asservissement) est :

$$\frac{K_{ARW}z}{z(1 + K_{ARW}) - 1}$$

Son pôle vaut :

$$\frac{1}{1 + K_{ARW}} \in ]0, 1[$$

On peut aisément régler ce pôle à l'aide du paramètre  $K_{ARW}$ .

Le code du régulateur RST équipé de la mesure anti-emballement consiste à évaluer  $u'(kh)$  sur la base de l'équation  $R'(z)U'(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z)$ , puis, comme  $(1 - z^{-1})U(z) = U'(z)$ , à calculer  $u(kh) = u(kh - h) + u'(kh)$ ; ensuite, avant la conversion digital-analogique, il s'agit d'insérer les instructions suivantes recalculant un nouvel échantillon  $u(kh)$  s'il y a saturation :

$$u(kh) = \begin{cases} u(kh - h) + u'(kh) + K_{ARW}(\mu - u(kh)) & \text{si } u(kh) > \mu \\ u(kh - h) + u'(kh) + K_{ARW}(-\mu - u(kh)) & \text{si } u(kh) < -\mu \end{cases}$$

La valeur  $\mu$  de la saturation doit être connue, contrairement au signal  $u_e(kh)$ .

#### 10.4.2 Amplitudes de la grandeur de commande

L'intuition suggère que les amplitudes de la grandeur de commande sont d'autant plus importantes que la bande passante en boucle fermée est grande. Une analyse quantitative s'effectue en relevant que :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = H_m(z)$$

Qui plus est :

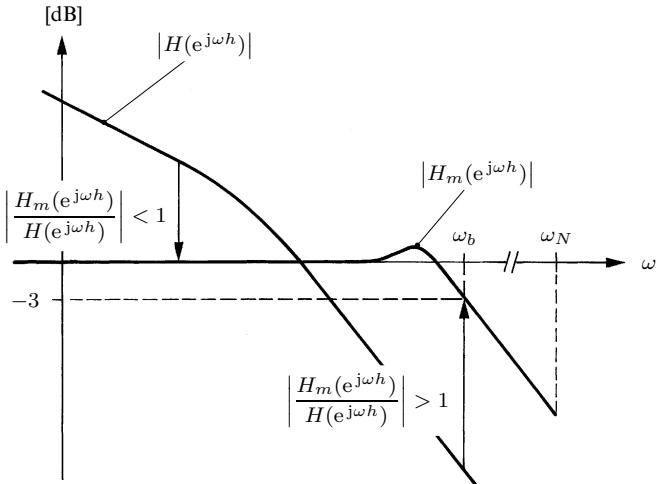
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z)$$

L'élimination de  $Y(z)$  conduit à :

$$\frac{U(z)}{Y_c(z)} = \frac{H_m(z)}{H(z)}$$

La fonction de transfert liant la consigne  $Y_c(z)$  à la grandeur de commande  $U(z)$  est ainsi  $H_m(z)/H(z)$ . Posons  $z = e^{j\omega h}$  pour se placer en régime harmonique. Le module  $|H_m(e^{j\omega h})/H(e^{j\omega h})|$  est égal au quotient des amplitudes de la grandeur de commande et de la grandeur de consigne. Ce quotient est particulièrement bien mis en évidence dans un diagramme de Bode, comme cela est illustré dans la figure 10.15.

Soit  $\omega_b$  la pulsation de coupure en boucle fermée, qui fixe la bande passante  $[0, \omega_b]$ . Pour des consignes dont la pulsation se rapproche de  $\omega_b$ , l'amplification  $|H_m(e^{j\omega h})/H(e^{j\omega h})|$  peut être significative, provoquant de larges amplitudes de la grandeur de commande. Cette amplification augmente nettement avec la pulsation de coupure  $\omega_b$ .



**Fig. 10.15** Fonctions de transfert harmoniques  $|H(e^{j\omega h})|$  du processus à commander et du modèle à poursuivre  $|H_m(e^{j\omega h})|$ ; en décibels, le quotient  $|H_m(e^{j\omega h})/H(e^{j\omega h})|$  est la différence entre  $|H_m(e^{j\omega h})|$  et  $|H(e^{j\omega h})|$ .

## 10.5 Variantes du régulateur RST

### 10.5.1 Mise en évidence de la commande a priori

Le régulateur RST peut être mis sous une forme intéressante mettant clairement en évidence une commande a priori. Pour ce faire, on démontre le résultat suivant.

#### Théorème 10.8

Soit  $Y_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} Y_c(z)$  la sortie du modèle à poursuivre. La grandeur de commande délivrée par un régulateur RST s'écrit alors :

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)} Y_m(z) + \frac{S(z)}{R(z)} (Y_m(z) - Y(z))$$

#### Démonstration

En exploitant (10.10), (10.12), (10.13), (10.14) et (10.15) :

$$\begin{aligned} \frac{T(z)}{R(z)} &= \frac{B'_m(z)A_0(z)}{B^+(z)\bar{R}(z)} = \frac{A_m(z)A_0(z)B'_m(z)}{A_m(z)B^+(z)\bar{R}(z)} \\ &= \frac{(A(z)\bar{R}(z) + B^-(z)S(z))B'_m(z)}{A_m(z)B^+(z)\bar{R}(z)} \end{aligned}$$

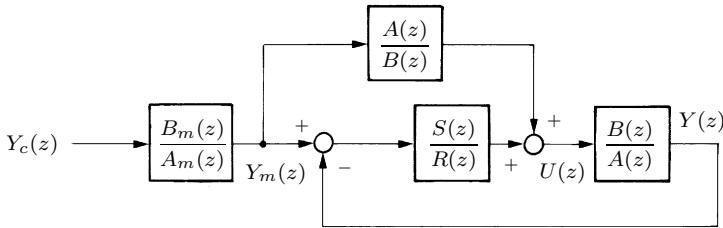
$$\begin{aligned}
&= \frac{A(z)B'_m(z)}{B^+(z)A_m(z)} + \frac{S(z)B^-(z)B'_m(z)}{B^+(z)\bar{R}(z)A_m(z)} \\
&= \frac{A(z)B^-(z)B'_m(z)}{B^+(z)B^-(z)A_m(z)} + \frac{S(z)B^-(z)B'_m(z)}{B^+(z)\bar{R}(z)A_m(z)} \\
&= \frac{A(z)B_m(z)}{B(z)A_m(z)} + \frac{S(z)B_m(z)}{R(z)A_m(z)}
\end{aligned}$$

La grandeur de commande (10.4) générée par le régulateur RST devient donc :

$$\begin{aligned}
U(z) &= \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \\
&= \frac{A(z)}{B(z)} \cdot \frac{B_m(z)}{A_m(z)} Y_c(z) + \frac{S(z)}{R(z)} \left( \frac{B_m(z)}{A_m(z)} Y_c(z) - Y(z) \right)
\end{aligned}$$

Vu que  $Y_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} Y_c(z)$ , le théorème est démontré. ■

Avec un intégrateur, il s'agit de poser  $R(z) = (z - 1)^\ell R'(z)$ . Le résultat est illustré dans la figure 10.16.

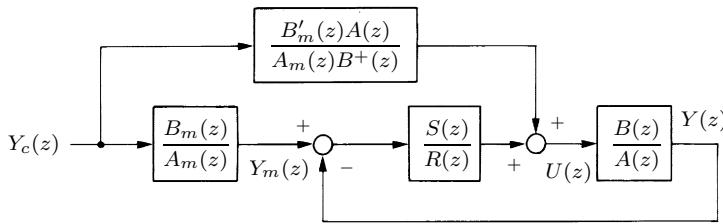


**Fig. 10.16** Régulateur RST faisant ressortir la commande a priori  $\frac{A(z)}{B(z)} Y_m(z)$ .

Le régulateur RST renferme par conséquent une commande a priori telle que définie dans la section 9.10 (voir entre autres la figure 9.65). Le filtre  $H_m(z)$  a maintenant une signification limpide : c'est le modèle à poursuivre. La sélection de  $H_m(z)$ , par exemple ses zéros, est dictée par les développements du paragraphe 10.3.5. Afin d'assurer d'une part la causalité et d'autre part la stabilité BIBO de la fonction de transfert engendrant la commande a priori, le schéma fonctionnel de la figure 10.16 est bien évidemment mis sous la forme équivalente apparaissant dans la figure 10.17 (sect. 9.10).

Le régulateur RST peut être codé suivant la variante illustrée dans la figure 10.17, plutôt que directement à partir de l'équation  $R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z)$  (sect. 10.2). Il est clair que, dans cette dernière équation, la commande a priori existe, mais n'apparaît pas sous une forme explicite. Au surplus, la fonction de transfert fournissant la commande a priori peut être exprimée en fonction du polynôme  $T(z)$  ; en effet, comme  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$  :

$$\frac{B'_m(z)A(z)}{A_m(z)B^+(z)} = \frac{T(z)A(z)}{A_m(z)A_0(z)B^+(z)}$$



**Fig. 10.17** Régulateur RST réalisable faisant ressortir la commande a priori  $\frac{B'_m(z)A(z)}{A_m(z)B^+(z)} Y_c(z)$ .

### 10.5.2 Simplification de pôles et de zéros

Dans le paragraphe 10.3.2 consacré à l'imposition d'un modèle à poursuivre, le polynôme  $B(z)$  constituant le numérateur du système à commander  $H(z) = B(z)/A(z)$  est factorisé sous la forme  $B(z) = B^+(z)B^-(z)$ ; le polynôme  $B^+(z)$  est un facteur du polynôme caractéristique en boucle fermée  $A(z)R(z)+B(z)S(z)$  afin de se simplifier. En sus, il est parfois souhaitable d'éliminer des zéros inclus dans le dénominateur  $A(z)$ , autrement dit des pôles de  $H(z)$ . Pour ce faire, le polynôme  $A(z)$  est lui aussi soumis à une factorisation spectrale :

$$A(z) = A^+(z)A^-(z)$$

Le polynôme  $A^+(z)$  est monique et ses zéros sont impérativement à l'intérieur du cercle unité, ou mieux dans une région telle que celle en tramé dans la figure 10.7. Reprenons sur cette base le raisonnement du paragraphe 10.3.2, en partant de l'équation (10.11) :

$$\frac{B^+(z)B^-(z)T(z)}{A^+(z)A^-(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (10.53)$$

Les zéros de  $A^+(z)$  doivent tous être des zéros de  $A^+(z)A^-(z)R(z) + B(z)S(z)$  afin de provoquer la simplification désirée. Comme aucun zéro de  $A^+(z)$  n'est zéro de  $B(z)$  puisque  $A(z) = A^+(z)A^-(z)$  et  $B(z)$  n'ont pas de facteur commun, tous les zéros de  $A^+(z)$  sont des zéros de  $S(z)$ . Le polynôme  $A^+(z)$  est alors un facteur de  $S(z)$  :

$$S(z) = A^+(z)\bar{S}(z) \quad (10.54)$$

Par ailleurs, tous les zéros de  $A^+(z)$  doivent également être des zéros du numérateur  $B^+(z)B^-(z)T(z)$ , à nouveau dans le but de réaliser la simplification voulue. Pour la même raison qu'avant, il faut que  $A^+(z)$  soit un facteur de  $T(z)$  :

$$T(z) = A^+(z)\bar{T}(z) \quad (10.55)$$

La relation (10.53) devient, après substitution de (10.12), (10.13), (10.54) et (10.55) :

$$\frac{B^+(z)B^-(z)A^+(z)\bar{T}(z)}{B^+(z)A^+(z)(A^-(z)\bar{R}(z) + B^-(z)\bar{S}(z))} = \frac{B^-(z)B'_m(z)}{A_m(z)}$$

En simplifiant :

$$\frac{\overline{T}(z)}{A^-(z)\overline{R}(z) + B^-(z)\overline{S}(z)} = \frac{B'_m(z)}{A_m(z)}$$

D'où, en introduisant un polynôme observateur  $A_0(z)$  monique :

$$\begin{aligned} \overline{T}(z) &= B'_m(z)A_0(z) \\ A^-(z)\overline{R}(z) + B^-(z)\overline{S}(z) &= A_m(z)A_0(z) \end{aligned} \quad (10.56)$$

En présence d'un intégrateur, l'équation diophantine (10.56) prend la forme :

$$A^-(z)(z - 1)^\ell \overline{R}'(z) + B^-(z)\overline{S}(z) = A_m(z)A_0(z)$$

D'autre part, le polynôme caractéristique en boucle fermée comprend maintenant les pôles simplifiés :

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)A^+(z)B^+(z)$$

Les résultats des sections 10.3 à 10.4 s'étendent facilement à la nouvelle situation. Par exemple, la fonction de transfert du montage en régulation s'écrit :

$$\frac{B(z)R(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z)A^+(z)}$$

Quant à la fonction de transfert  $U(z)/Y_c(z)$ , elle n'est pas modifiée. Les théorèmes 10.1, 10.3 et 10.4 subissent de légères retouches détaillées ci-dessous. Les démonstrations sont identiques à celles déjà présentées, raison pour laquelle elles sont laissées aux soins du lecteur intéressé.

### Théorème 10.9

*Soit un régulateur RST dimensionné sur la base du modèle  $H(z) = B(z)/A(z)$  du système à commander. L'implantation de ce régulateur sur le processus à commander réel  $H^0(z) = B^0(z)/A^0(z)$  conduit, pour le montage en asservissement, à la fonction de transfert suivante :*

$$H_m(z) \frac{1}{1 + R(z) \left( \frac{1}{H^0(z)} - \frac{1}{H(z)} \right) \frac{B^-(z)}{A_m(z)A_0(z)A^+(z)}}$$

**Théorème 10.10**

*Il existe un régulateur RST à degré minimal tel que  $\delta R \geq \delta T$  et  $\delta R \geq \delta S$  si les inégalités suivantes sont respectées :*

$$\begin{aligned}\delta A_m - \delta B_m &\geq \delta A - \delta B \\ \delta A_0 &\geq 2\delta A - \delta A_m - \delta A^+ - \delta B^+ - 1\end{aligned}\tag{10.57}$$

*Lorsqu'un intégrateur est inséré, il existe un régulateur RST à degré minimal tel que  $\delta R \geq \delta T$  et  $\delta R \geq \delta S$  si l'inégalité (10.57) et l'inégalité suivante sont satisfaites :*

$$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta A^+ - \delta B^+ + \ell - 1$$

La démonstration de ce théorème fixe le degré du polynôme  $R(z)$  :

$$\delta R = \delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+ - \delta A^-$$

Vu que  $R(z) = B^+(z)\bar{R}(z)$ , on a  $\delta R = \delta B^+ + \delta \bar{R}$  et :

$$\delta \bar{R} = \delta R - \delta B^+ = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A^-$$

Avec un intégrateur, nous avons  $R(z) = (z - 1)^\ell B^+(z)\bar{R}'(z)$ ; donc  $\delta R = \delta B^+ + \delta \bar{R}' + \ell$  et :

$$\delta \bar{R}' = \delta R - \delta B^+ - \ell = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A^- - \ell$$

**Théorème 10.11**

*Le degré du polynôme  $\bar{S}(z)$  vaut  $\delta A^- - 1$ ; en outre, les polynômes  $\bar{R}(z)$  et  $\bar{S}(z)$  sont uniques. En présence d'un intégrateur,  $\delta \bar{S} = \delta A^- + \ell - 1$ ;  $\bar{R}'(z)$  et  $\bar{S}(z)$  sont uniques.*

**10.5.3 Poursuite et régulation à objectifs différents**

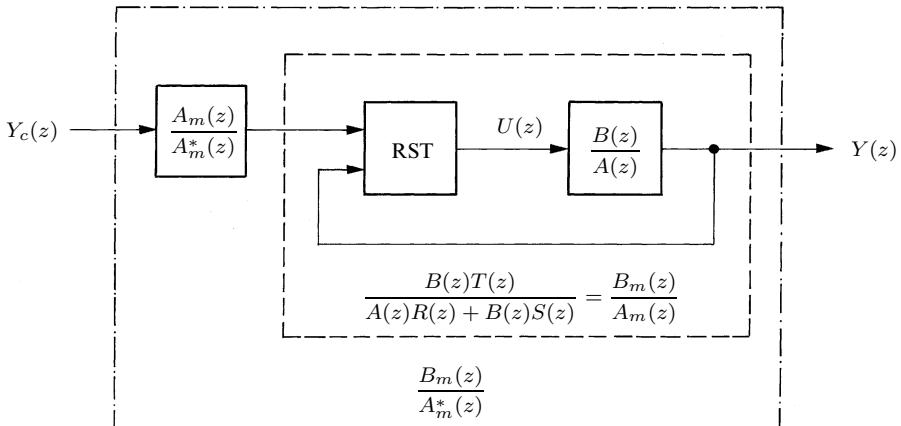
Dans certaines applications, on requiert que le comportement en poursuite soit indépendant de celui en régulation, par exemple quand le temps dépensé lors d'un changement de consigne peut être sensiblement supérieur à celui pris pour rejeter une perturbation (ou vice versa). Les modes, par conséquent les pôles, pour les montages en asservissement et en régulation doivent alors être différents. L'objectif du présent paragraphe est de montrer qu'il est facile d'exaucer ce vœu.

Rappelons que la fonction de transfert en régulation vaut (§ 10.3.2) :

$$\frac{B(z)R(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z)}\tag{10.58}$$

Après avoir sélectionné les polynômes  $A_m(z)$  et  $A_0(z)$  fixant les pôles en régulation, un régulateur RST est dimensionné en suivant pas à pas la démarche détaillée dans les sections précédentes. Il n'est pas nécessaire à ce stade de calculer le polynôme  $T(z)$ , lequel n'intervient pas dans la fonction de transfert en régulation (10.58). Bien évidemment, seuls les pôles en régulation sont de la sorte assignés à volonté. La relation (10.58) révèle que les zéros, quant à eux, sont des zéros du processus à commander auxquels s'adjoignent les zéros du polynôme  $R(z)$ , en d'autres termes les pôles du régulateur. Ainsi, en régulation, la synthèse ne permet structurellement pas d'imposer un modèle complet ; uniquement son dénominateur peut l'être.

On passe maintenant au montage en asservissement. La consigne  $Y_c(z)$  n'est pas injectée telle quelle, mais passe au préalable dans un filtre de fonction de transfert  $A_m(z)/A_m^*(z)$  (fig. 10.18).



**Fig. 10.18** Poursuite et régulation à objectifs différents.

La fonction de transfert globale en asservissement vaut donc :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot \frac{A_m(z)}{A_m^*(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m^*(z)} \quad (10.59)$$

Le polynôme  $A_m(z)$  disparaît par simplification et les pôles en asservissement (zéros de  $A_m^*(z)$ ) sont distincts des pôles en régulation (zéros de  $A_m(z)$  et de  $A_0(z)$ ), réalisant par conséquent le découplage des modes des deux montages. À noter que le découplage des dynamiques les caractérisant n'est pas parfait : le polynôme  $B^-(z)$ , inclus dans  $B_m(z)$ , est présent dans les numérateurs des deux fonctions de transfert (10.58) et (10.59).

Le polynôme  $A_m^*(z)$  est monique ; ses zéros sont à l'intérieur du cercle unité et son degré est pris égal à celui de  $A_m(z)$  :

$$\delta A_m^* = \delta A_m$$

Lors du choix du modèle à poursuivre pour le montage en asservissement (§ 10.3.5), il importe, afin de remplir scrupuleusement le cahier des charges ayant trait au suivi de la consigne, de faire jouer à  $A_m^*(z)$  le rôle de  $A_m(z)$ . Entre autres, la seconde équation diophantine (10.44) produisant  $B'_m(z)$  est maintenant :

$$A_c^-(z)X(z) + B^-(z)B'_m(z) = A_m^*(z)$$

De surcroît, pour autant que  $\delta A_m^* \geq \delta A - \delta B^+ + \delta A_c^- - 1$ , la causalité et l'unicité du régulateur RST, avec  $\delta B'_m = \delta A_c^- - 1$ , sont assurées (théorèmes 10.6 et 10.7). Le polynôme  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$  met en œuvre le polynôme  $B'_m(z)$  dimensionné sur cette base.

L'équation fournissant la grandeur de commande  $U(z)$ , remplaçant l'égalité (10.4), s'écrit :

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} \cdot \frac{A_m(z)}{A_m^*(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$$

Comme  $\delta A_m = \delta A_m^*$ , les contraintes de réalisation de la fonction de transfert  $\frac{T(z)}{R(z)} \cdot \frac{A_m(z)}{A_m^*(z)}$ , par exemple lors d'une implantation standard, sont celles régissant la fonction de transfert  $T(z)/R(z)$ . Le code de cette variante du régulateur RST se base sur l'égalité suivante, dans laquelle les polynômes sont exprimés en puissances négatives de  $z$  (sect. 10.2) :

$$R(z)A_m^*(z)U(z) = T(z)A_m(z)Y_c(z) - S(z)A_m^*(z)Y(z)$$

#### 10.5.4 Synthèse par calibrage fréquentiel

L'objectif d'une synthèse par calibrage fréquentiel est de façonneer dans le domaine fréquentiel la fonction de transfert en boucle ouverte ou les fonctions de sensibilité, ou encore d'autres fonctions de transfert, dans le but d'imposer des marges de robustesse, de rejeter des perturbations, de filtrer des bruits de mesure, etc. Le lecteur peut, à ce sujet, se référer à l'approche classique de la section 9.8. Dans le cas général, le problème se résout par une optimisation fondée sur le concept de norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Nous nous contentons, dans ce paragraphe, d'une approche itérative, intuitive et facile à mettre en œuvre.

Les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  sont contraints à inclure des parties préspécifiées  $P_R(z)$  et  $P_S(z)$ , respectivement :

$$R(z) = P_R(z)R'(z) \quad S(z) = P_S(z)S'(z)$$

En sus des pôles de la perturbation à rejeter (principe du modèle interne), le polynôme  $P_R(z)$  contient des zéros utiles au calibrage. Le polynôme  $P_S(z)$  incorporé dans  $S(z)$  est lui aussi un outil de calibrage. Comme dans le paragraphe 10.3.2, le polynôme  $B^+(z)$  est un facteur de  $R'(z)$ , si bien que  $R'(z) = B^+(z)\bar{R}'(z)$ . L'équation de Diophante à résoudre, au cœur de la synthèse du régulateur RST, est alors :

$$A(z)P_R(z)\bar{R}'(z) + B^-(z)P_S(z)S'(z) = A_m(z)A_0(z) \quad (10.60)$$

Il est certainement approprié de rappeler que le polynôme  $A_m(z)$  comprend souvent, en plus du polynôme  $P(z)$  fixant les modes dominants en boucle fermée, un polynôme auxiliaire  $P_A(z)$  (§ 10.3.5) :

$$A_m(z) = P_A(z)P(z)$$

Quelques retouches ayant trait aux degrés de certains polynômes sont requises dans le présent contexte. Pour les justifier, il suffit de reprendre les démonstrations des théorèmes 10.3 et 10.4 ; ces développements, laissés aux soins du lecteur, révèlent que, dans le théorème 10.3, l'inégalité (10.31) doit être remplacée par :

$$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ + \delta P_R + \delta P_S - 1 \quad (10.61)$$

Quant au degré du polynôme  $\bar{R}'$ , il vaut :

$$\delta \bar{R}' = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A - \delta P_R$$

Finalement, en ce qui concerne le théorème 10.4, la solution à degré minimal vérifie :

$$\delta S' = \delta A + \delta P_R - 1$$

La synthèse du régulateur RST est effectuée itérativement comme suit. Avec un choix initial des polynômes  $P_R(z)$ ,  $P_S(z)$ ,  $P_A(z)$  et  $A_0(z)$ , l'équation diophantine (10.60) est résolue pour donner les polynômes  $\bar{R}'(z)$  et  $S'(z)$ . Une analyse dans le domaine fréquentiel, basée sur la fonction de transfert en boucle ouverte, les fonctions de sensibilité ou d'autres fonctions de transfert en boucle fermée, permet ensuite de vérifier si les spécifications sont remplies. Si tel n'est pas le cas, les polynômes  $P_R(z)$  et  $P_S(z)$ , de même que le polynôme  $P_A(z)$ , voire le polynôme observateur  $A_0(z)$ , sont altérés afin d'obtenir les calibres désirés. Par altération, on entend modification de coefficients ou ajout de zéros. Avec les polynômes  $P_R(z)$ ,  $P_S(z)$ ,  $P_A(z)$  et  $A_0(z)$  ainsi mis à jour, l'équation diophantine (10.60) est à nouveau résolue et le processus répété. Cette approche revêt clairement un aspect intuitif : les révisions successives des polynômes  $P_R(z)$ ,  $P_S(z)$ ,  $P_A(z)$  et  $A_0(z)$  requièrent un riche savoir-faire. Au surplus, aucun résultat solide assurant la convergence des itérations n'est disponible. L'expérience montre néanmoins qu'elle est rapide : trois à quatre itérations fournissent souvent une solution tout à fait convenable.

La partie préspécifiée  $P_S(z)$  du polynôme  $S(z)$  inclut souvent un zéro  $z = -1$ , en d'autres termes le facteur  $z + 1$ . Afin de justifier cette pratique, rappelons que la fonction de transfert liant le bruit de mesure  $V(z)$  à la grandeur de commande  $U(z)$  s'écrit (§ 5.4.4) :

$$\frac{U(z)}{V(z)} = -\frac{K(z)}{1 + K(z)H(z)} = -\frac{A(z)S(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

En régime harmonique, cette fonction de transfert devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{A(e^{j\omega h})S(e^{j\omega h})}{A(e^{j\omega h})R(e^{j\omega h}) + B(e^{j\omega h})S(e^{j\omega h})} \\ & = -\frac{A(e^{j\omega h})P_S(e^{j\omega h})S'(e^{j\omega h})}{A(e^{j\omega h})R(e^{j\omega h}) + B(e^{j\omega h})P_S(e^{j\omega h})S'(e^{j\omega h})} \end{aligned}$$

Le spectre du bruit de mesure se situe à l'extérieur de la bande passante en boucle fermée, avec des pulsations se rapprochant de la pulsation de Nyquist  $\omega_N$ ; or :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_N} e^{j\omega h} = e^{j\omega_N h} = e^{j\frac{\pi}{h} h} = -1$$

Par conséquent, si le polynôme  $P_S(e^{j\omega h})$  comprend le facteur  $e^{j\omega h} + 1$  :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_N} P_S(e^{j\omega h}) = 0$$

Donc :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_N} \left( -\frac{A(e^{j\omega h})S(e^{j\omega h})}{A(e^{j\omega h})R(e^{j\omega h}) + B(e^{j\omega h})S(e^{j\omega h})} \right) = 0$$

Le bruit de mesure ne provoque ainsi pas une forte agitation du signal de commande.

Il découle du théorème 10.6 que le degré du polynôme  $A_m(z)$  augmente avec celui de  $A_c^-(z)$ . Sans parties préspécifiées  $P_R(z)$  et  $P_S(z)$ , l'inégalité (10.61) (ou 10.30) peut dès lors ne plus pouvoir être vérifiée. Dans ces circonstances, en plus d'être un outil de calibrage fréquentiel, des parties préspécifiées permettent de résoudre le problème.

## 10.6 Problèmes

**10.6.1** En présence de variations du processus à commander  $H(z)$ , démontrer que la sensibilité de la fonction de transfert en boucle fermée avec un régulateur RST est :

$$\mathcal{S}(z) = \frac{1}{1 + K(z)H(z)}$$

**10.6.2** Dans l'exemple 10.3, prouver que la causalité du régulateur RST est garantie quand le surplus de pôles de  $H_m(z)$  est plus grand ou égal à celui de  $H(z)$ .

**10.6.3** En admettant que le modèle  $H(z) = B(z)/A(z)$  du système à commander est distinct de la fonction de transfert  $H^0(z) = B^0(z)/A^0(z)$  du processus réel, calculer, dans l'exemple 10.3, la fonction de transfert en boucle fermée réelle.

**10.6.4** Détailler la démarche du paragraphe 10.3.2 en présence d'un intégrateur de type  $\ell$ , aboutissant à l'équation diophantine (10.16).

**10.6.5** Parmi toutes les solutions de l'équation diophantine, démontrer qu'il est toujours possible d'en trouver une telle que le degré  $\delta R$  de  $R(z)$  soit inférieur au degré  $\delta B$  de  $B(z)$  :

$$\delta R < \delta B$$

**10.6.6** Développer une méthode de synthèse du régulateur RST sans intégrateur dans laquelle aucune simplification de zéros avec des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée n'est provoquée. Comme dans la section 10.3, l'égalité suivante est recherchée :

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

Mais, ici,  $\delta A_0 = \delta B^+ = 0$ . Modifier en conséquence le tableau 10.1. Est-ce que le suivi parfait, quand le temps tend vers l'infini, d'une consigne quelconque  $Y_c(z) = B_c(z)/A_c(z)$  est possible dans ces conditions ?

**10.6.7** Démontrer le théorème 10.3 dans le cas où un intégrateur de type  $\ell$  est implanté.

**10.6.8** En présence d'un intégrateur, prouver que l'égalité (10.41) doit être remplacée par :

$$\delta S = \delta A + \ell - 1$$

**10.6.9** Quand le temps de calcul et de conversion est négligeable vis-à-vis de la période d'échantillonnage, démontrer que les inégalités (10.29) et (10.30) du théorème 10.3 deviennent des égalités. Modifier ce résultat en présence d'un intégrateur.

**10.6.10** Modifier les résultats du problème 10.6.9 lorsque le temps de calcul et de conversion est égal à la période d'échantillonnage.

**10.6.11** Répéter l'exemple 10.12 dans le cas où le temps de calcul et de conversion est égal à la période d'échantillonnage. Ecrire un pseudo-code du régulateur RST.

**10.6.12** Répéter l'exemple 10.12 en implantant dans le régulateur un intégrateur de type 1. Ecrire un pseudo-code du régulateur RST.

**10.6.13** Répéter l'exemple 10.12 en prenant  $P(z) = z + c$ .

**10.6.14** Répéter l'exemple 10.13 en sélectionnant le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{(1 + c_1 + c_2)z}{z^2 + c_1 z + c_2}$$

Ecrire un pseudo-code du régulateur RST.

**10.6.15** A l'aide d'un logiciel de simulation et de conception, reproduire les résultats de l'exemple 10.12 (fig. 10.10). Avec le polynôme  $P(z)$  du problème 10.6.13, déterminer ensuite la grandeur de commande et la réponse indicielle en boucle fermée dans les cas  $c = 0,8, 0,6, 0,4, 0,2, 0$  (régulateur à réponse pile),  $-0,2, -0,4, -0,6, -0,8$ . Reproduire ensuite les résultats de l'exemple 10.13 (fig. 10.12); dans

cette situation, tracer sur le même graphique la réponse indicielle en boucle fermée analogique  $y(t)$  et sa version échantillonnée  $\{y(k)\}$ ; interpréter les résultats obtenus. Un couple parasite constant  $M_r$  s'exerce maintenant sur la charge, se traduisant par une perturbation  $w = -\frac{R}{K\Phi}M_r$ ; dans les conditions de l'exemple 10.12 et avec  $w = -5$ , déterminer la grandeur de commande et la réponse indicielle en boucle fermée; éliminer le statisme en incorporant dans le régulateur un intégrateur de type 1 (problème 10.6.12).

**10.6.16** Soit un entraînement électrique de position par moteur *brushless* commandé en courant :

$$G(s) = \frac{\gamma}{s^2} \quad \gamma = 1$$

Echantillonner ce processus avec une période d'échantillonnage  $h = 0,025$  s. Soit le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{0,25(z+1)}{z(z-0,5)}$$

Est-ce que ce modèle est raisonnable? Synthétiser un régulateur RST sans intégrateur. Ecrire un pseudo-code réalisant le régulateur obtenu.

**10.6.17** La cuve de mélange de l'exemple 5.2, avec  $a = 0,015 \text{ s}^{-1}$  et  $T = 1$  s, est commandée par un régulateur RST. La période d'échantillonnage vaut  $h = 1$  s. Trouver la fonction de transfert échantillonnée  $H(z)$ . Concevoir un régulateur RST sans intégrateur, avec le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{0,5}{z(z-0,5)}$$

Est-ce que ce modèle à poursuivre est raisonnable? Ecrire un pseudo-code réalisant le régulateur obtenu.

**10.6.18** Soit l'installation thermique du problème 5.5.7. Une condition absolue d'amortissement d'un facteur  $a = 20$  en  $k_a = 5$  coups d'horloge est imposée. Après avoir sélectionné un modèle à poursuivre convenable, dimensionner un régulateur RST sans intégrateur.

**10.6.19** L'objectif du présent problème est de démontrer que le prédicteur de Smith examiné dans la section 9.9 est un cas particulier du régulateur RST. En adoptant les notations de la section 9.9, la relation (9.37) montre que, avec un prédicteur de Smith, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$z^{-d} \frac{K(z)H'(z)}{1 + K(z)H'(z)}$$

En prenant pour modèle à poursuivre cette fonction de transfert, prouver que le régulateur RST de l'exemple 10.3 est identique au prédicteur de Smith (9.36).

**10.6.20** Soit un entraînement électrique en position par moteur *brushless* commandé en courant :

$$G(s) = \frac{\gamma}{s^2} \quad \gamma = 1$$

La période d'échantillonnage  $h$  vaut 0,1 s et on considère le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{z^d(z - 0,5)}$$

Le temps dépensé pour l'exécution de l'algorithme de commande et les conversions est négligeable vis-à-vis de la période d'échantillonnage. Le régulateur RST qu'il s'agit de dimensionner ne comprend pas d'intégrateur. Le statisme et la traînée d'asservissement doivent être nuls. Fixer le modèle à poursuivre  $H_m(z)$  en choisissant  $B_m(z)$  et  $d$ . Synthétiser ensuite un régulateur RST. Ecrire un pseudo-code réalisant le régulateur ainsi obtenu.

**10.6.21** Vérifier que les polynômes  $B'_m(z)$  obtenus dans les exemples 10.8 et 10.10 sont bien les mêmes.

**10.6.22** Démontrer que, dans le paragraphe 10.3.2, on recherche des simplifications de zéros du système à commander  $B(z)/A(z)$  avec des pôles de la fonction de transfert  $S(z)/R(z)$ . Interpréter ces simplifications à l'aide du lieu des pôles (§ 9.7.2).

**10.6.23** Dans l'exemple 10.12, calculer le zéro additionnel  $z = 0,919$  à l'aide de la formule (10.43).

**10.6.24** Parmi les solutions de l'équation diophantine (10.44), il en est une vérifiant  $\delta X < \delta B^-$  (§ 10.3.5). Démontrer que cette solution n'est pas intéressante car conduisant à  $\delta A_m = \delta B_m$  alors que la fonction de transfert  $H_m(z) = B_m(z)/A_m(z)$  doit être strictement propre.

**10.6.25** Démontrer le théorème 10.9.

**10.6.26** Démontrer le théorème 10.10.

**10.6.27** Démontrer le théorème 10.11.

**10.6.28** A l'aide du tableau 10.1, vérifier que, pour l'équation de Diophante de l'exemple 10.4, il est possible de poser  $\delta R = \delta S = \delta A - 1$ .

**10.6.29** A l'aide d'un logiciel de simulation et de conception, traiter l'exemple 10.7 dans le cas particulier  $a = -0,985$ ,  $b = 0,015$  et  $d = 3$  (ex. 9.3 et ex. 9.9). Avec  $c = -0,8$ , tracer la grandeur de commande et la réponse indicielle en boucle fermée, et évaluer les marges de gain et de phase. Répéter le problème avec d'autres valeurs de  $c$ , en particulier  $c = 0$  et  $c = 0,5$ . Expliquer en détail les comportements ainsi obtenus.

**10.6.30** Dans l'exemple 10.7, un polynôme observateur qui n'est pas à réponse pile est sélectionné :

$$A_0(z) = (z + \alpha)^d \quad \alpha \neq 0$$

Proposer un choix pour  $\alpha$ . Démontrer ensuite que les coefficients  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , du polynôme  $S(z)$  sont nuls.

**10.6.31** Dans le cas d'une consigne sinusoïdale  $y_c(kh) = \sin(\omega kh)$ , donner le polynôme  $A_c^-(z)$  et le degré du polynôme  $B'_m(z)$  intervenant dans l'équation diofantine (10.44).

**10.6.32** Dans l'exemple 10.12, avec une consigne en forme de saut unité, poser  $a = c_1 = c_2 = 0$  afin d'obtenir un régulateur à réponse pile. Déterminer le temps nécessaire pour amortir complètement le régime transitoire de la grandeur à commander  $y(kh)$  en asservissement, puis en régulation et finalement de la grandeur de commande  $u(kh)$ . Valider ces résultats à l'aide d'un logiciel de simulation et de conception.

**10.6.33** Dans l'exemple 10.12, avec une consigne en forme de rampe, poser  $c = c_1 = c_2 = 0$  afin d'obtenir un régulateur à réponse pile. Déterminer le temps nécessaire pour amortir complètement le régime transitoire de la grandeur à commander  $y(kh)$  en asservissement, puis en régulation et finalement de la grandeur de commande  $u(kh)$ . Calculer le zéro permettant un suivi asymptotique de la consigne. Valider ces résultats à l'aide d'un logiciel de simulation et de conception.

**10.6.34** Soit le processus à commander suivant, échantillonné avec la période d'échantillonnage  $h = 1$  s :

$$H(z) = \frac{0,015}{z^2(z - 0,985)}$$

Concevoir un régulateur RST sans intégrateur, avec le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{1}{z^3}$$

Est-ce que ce modèle à poursuivre est raisonnable ? Calculer et tracer la réponse indicielle en boucle fermée.

**10.6.35** Soit le processus à commander :

$$H(z) = \frac{0,015}{z(z - 0,985)}$$

Concevoir un régulateur RST sans intégrateur, avec le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{0,4}{(z - 0,2)(z - 0,5)}$$

Est-ce que ce modèle à poursuivre est raisonnable ?

**10.6.36** Soit le processus à commander suivant, échantillonné avec la période d'échantillonnage  $h = 0,025$  s :

$$H(z) = \frac{1,23 \cdot 10^{-3}(z + 0,98)}{(z - 1)(z - 0,95)}$$

Ecrire, sous forme matricielle, le système d'équations algébriques fournissant un régulateur RST sans intégrateur, avec le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{z + 0,98}{1,98 z^2}$$

Est-ce que ce modèle à poursuivre est raisonnable ? Calculer et tracer la réponse indicielle en boucle fermée.

**10.6.37** Soit le processus à commander suivant, échantillonné avec la période d'échantillonnage  $h = 1$  s :

$$H(z) = \frac{0,015}{z(z - 0,985)}$$

Concevoir un régulateur RST sans intégrateur, avec le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{1}{z^2}$$

Est-ce que ce modèle à poursuivre est raisonnable ? Calculer et tracer la réponse indicielle en boucle fermée.

**10.6.38** Soit le processus à commander suivant, qu'il s'agit d'échantillonner avec la période d'échantillonnage  $h = 0,025$  s :

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Ecrire, sous forme matricielle, le système d'équations algébriques fournissant un régulateur RST sans intégrateur, avec le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{0,5(z + 1)}{z^2}$$

Est-ce que ce modèle à poursuivre est raisonnable ? Calculer et tracer la réponse indicielle en boucle fermée.

**10.6.39** Lorsque les polynômes  $R(z)$  et  $S(z)$  incluent des parties préspécifiées  $P_R(z)$  et  $P_S(z)$  (§ 10.5.4), prouver, en reprenant les démonstrations des théorèmes 10.3 et 10.4, que :

$$\delta A_0 \geq 2\delta A - \delta A_m - \delta B^+ + \delta P_R + \delta P_S - 1$$

$$\delta \overline{R}' = \delta A_m + \delta A_0 - \delta A - \delta P_R$$

$$\delta S' = \delta A + \delta P_R - 1$$



# Identification

## *OBJECTIFS*

- *Définir la notion de régression linéaire.*
- *Structurer le problème de l'identification des systèmes dynamiques en une régression linéaire.*
- *Développer les algorithmes des moindres carrés simples, pondérés, récurrents et pondérés récurrents.*

### 11.1 Introduction

Le concept de modèle mathématique d'un processus est vital dans les disciplines scientifiques et techniques. C'est une abstraction résumant l'information disponible. Par exemple, dans les chapitres précédents, le système à commander est supposé être décrit par une fonction de transfert. Un seul et unique modèle ne permet qu'exceptionnellement de résoudre tous les problèmes, allant de la conception du processus à sa commande, en passant par la simulation. En fait, une *hiérarchie* de modèles doit généralement être élaborée. Un modèle détaillé, non linéaire, d'ordre important et faisant intervenir des variables d'état internes est requis pour simuler un système dynamique, afin d'en extraire les finesse et de reproduire un comportement fidèle à la réalité. Un tel modèle de simulation est notamment exploité pour analyser les performances du processus en boucle fermée (§ 1.4.4). Un modèle de commande nettement plus grossier, linéarisé autour d'un point ou d'une trajectoire de fonctionnement, d'ordre réduit et souvent externe, s'impose par contre pour la synthèse du régulateur.

Une façon de construire un modèle, qu'il soit de simulation ou de commande, consiste à se servir des lois physiques qui gouvernent le système. Cette approche donne un **modèle de connaissance** ou **modèle physique**. Les lois physiques régissant le comportement d'un processus sont parfois trop complexes pour en tirer pleinement bénéfice, ou même carrément inconnues. Certains paramètres du système peuvent s'altérer lentement au cours du temps et doivent alors être rafraîchis. Dans de telles circonstances, plutôt qu'une modélisation de connaissance, il apparaît souhaitable de créer et, si nécessaire, de mettre à jour un modèle du système

en profitant de mesures récoltées *in situ*. Il en découle un **modèle de représentation** ou **modèle expérimental**. La détermination d'un modèle de représentation est appelée **identification**.

Nous distinguons deux sortes de modèles de représentation. Tout d'abord, les **modèles de représentation non paramétriques** sont constitués de courbes (par exemple la réponse impulsionale ou la fonction de transfert harmonique dans des diagrammes de Bode) ne pouvant pas être décrites par un ensemble fini de nombres. Les **modèles de représentation paramétriques**, quant à eux, peuvent être caractérisés par un ensemble fini de nombres (par exemple les coefficients des polynômes au dénominateur et au numérateur d'une fonction de transfert).

Le présent chapitre constitue une introduction à l'identification. Ce domaine est riche et vaste, exigeant beaucoup de savoir-faire et de nombreuses compétences ; d'excellents ouvrages lui sont totalement dédiés. Souhaitant conserver le niveau élémentaire adopté dans ce texte, l'approche retenue est résolument déterministe (à l'exception d'une digression dans la section 11.4). D'importants aspects, qui ne peuvent être mis en évidence qu'au moyen d'outils stochastiques sophistiqués, sont donc laissés de côté. Au surplus, on se restreint à l'approche par moindres carrés pour établir prioritairement des modèles de représentation paramétriques.

Le chapitre débute par la définition, directement dans un format matriciel offrant une interprétation géométrique naturelle, d'une régression linéaire (sect. 11.2). Le problème de l'identification des processus dynamiques est ensuite structuré en une régression linéaire (sect. 11.3). La section 11.4 est dévolue à la version de base de l'algorithme des moindres carrés, qui est par essence une projection orthogonale. La méthode des moindres carrés pondérés est présentée dans la section 11.5, qui se termine par l'importante notion de facteur d'oubli. Des formes récurrentes, cruciales pour une mise en œuvre en temps réel, sont finalement étudiées, tout d'abord pour la version de base (sect. 11.6), puis pour celle avec pondération (sect. 11.7).

## 11.2 Régression linéaire

De nombreux problèmes d'estimation peuvent être mis sous la forme de l'équation suivante, portant le nom de **régression linéaire** :

$$\mathbf{y}(k) = \Phi(k)\vartheta + \varepsilon(k) \quad (11.1)$$

Dans ce modèle,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^N$  est le **vecteur de mesures**,  $\vartheta \in \mathbb{R}^p$  le **vecteur de paramètres** et  $\varepsilon(k) \in \mathbb{R}^N$  le **vecteur d'erreurs** ;  $\Phi(k) \in \mathbb{R}^{N \times p}$  est la **matrice d'observations**. Par convention, l'entier  $k$  apparaissant dans  $\mathbf{y}(k)$ ,  $\Phi(k)$  et  $\varepsilon(k)$  souligne le fait que le dernier instant d'échantillonnage entrant en jeu dans la construction de ces grandeurs est  $t_k = kh$  ; le vecteur  $\mathbf{y}(k)$  et parfois la matrice  $\Phi(k)$  contiennent des mesures. Le problème est de déterminer le vecteur inconnu  $\vartheta$  de manière à minimiser, dans un sens à préciser, le vecteur d'erreurs  $\varepsilon(k)$ .

Il est instructif de faire ressortir les lignes et les colonnes de la matrice d'observations  $\Phi(k)$ . Les  $N$  lignes sont dénotées  $\phi_1^T(k), \phi_2^T(k), \dots, \phi_N^T(k)$ , avec  $\phi_1(k), \phi_2(k), \dots, \phi_N(k) \in \mathbb{R}^p$ , et les  $p$  colonnes  $\phi^1(k), \phi^2(k), \dots, \phi^p(k) \in \mathbb{R}^N$ :

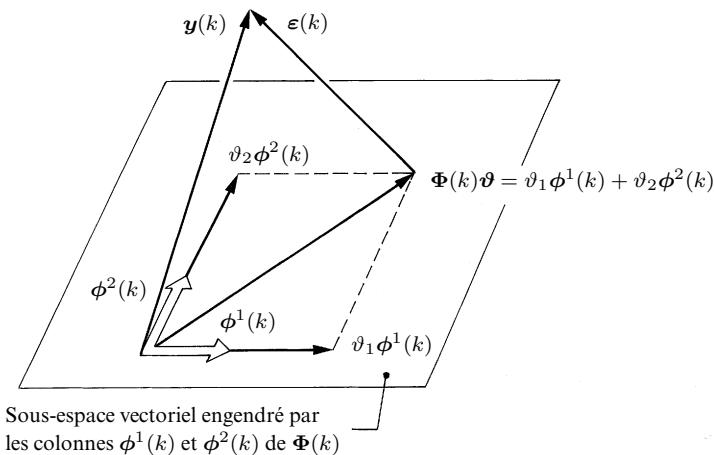
$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \phi_1^T(k) \\ \phi_2^T(k) \\ \vdots \\ \phi_N^T(k) \end{bmatrix} = [\phi^1(k) \quad \phi^2(k) \quad \dots \quad \phi^p(k)]$$

Ici encore, l'argument  $k$  indique que le dernier instant d'échantillonnage intervenant dans  $\phi_i^T(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , et  $\phi^j(k)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , est  $t_k = kh$ ; le symbole  $T$  signifie la transposition d'un vecteur ou, plus généralement, d'une matrice.

La régression linéaire (11.1) peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{y}(k) = \vartheta_1 \phi^1(k) + \vartheta_2 \phi^2(k) + \dots + \vartheta_p \phi^p(k) + \varepsilon(k)$$

Ainsi, au vecteur d'erreurs  $\varepsilon(k)$  près,  $\mathbf{y}(k)$  est une combinaison linéaire des colonnes  $\phi^1(k), \phi^2(k), \dots, \phi^p(k)$  de la matrice  $\Phi(k)$ , les coefficients de cette combinaison linéaire étant les composantes  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$  du vecteur de paramètres. La figure 11.1 illustre géométriquement la situation pour  $N = 3$  et  $p = 2$ .



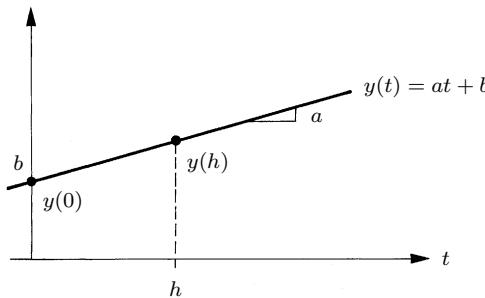
**Fig. 11.1** Interprétation géométrique d'une régression linéaire dans le cas  $N = 3$  et  $p = 2$ .

La fourchette des problèmes d'estimation pouvant être structurés comme une régression linéaire est extrêmement vaste. Les quelques exemples introduits dans les lignes suivantes ne constituent que des amuse-bouches. En outre, l'une des approches permettant d'identifier une fonction de transfert discrète fera l'objet d'une section séparée, vu le rôle central qu'elle joue actuellement en automatique.

### EXEMPLE 11.1

Nous avons tous été une fois ou l'autre confrontés au problème de tracer une droite de pente  $a$  et d'ordonnée à l'origine  $b$  passant au mieux par des échantillons  $y(0)$ ,  $y(h)$ , ...,  $y(kh)$  obtenus expérimentalement à des instants  $0, h, \dots, kh$ . Les paramètres à identifier sont les nombres  $a$  et  $b$ . Il s'agit par exemple d'estimer une vitesse au moyen de mesures de position prises à des temps différents, ou encore d'évaluer un débit via des échantillons de poids, de volume ou de niveau. Comme cela est illustré dans la figure 11.2, on pourrait se contenter de deux échantillons à des temps distincts, par exemple 0 et  $h$  :

$$\begin{cases} y(0) = b \\ y(h) = ah + b \end{cases}$$



**Fig. 11.2** Identification des paramètres  $a$  et  $b$  à partir des deux échantillons  $y(0)$  et  $y(h)$ .

Sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(h) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}(1)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}}$$

La régression linéaire est donc :

$$\boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{\vartheta} \quad (11.2)$$

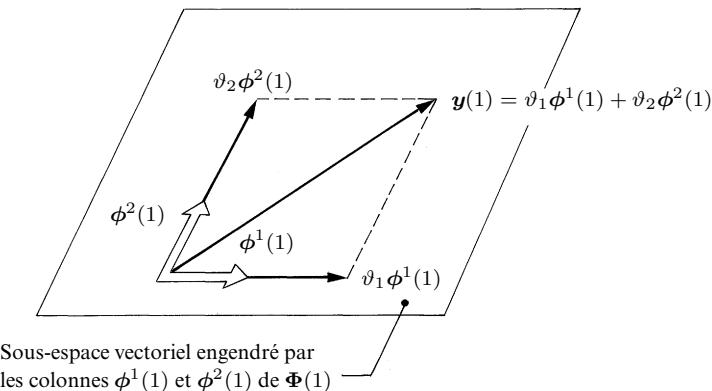
Ici,  $N = p = 2$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(1) = 0$  et, géométriquement, le vecteur de mesures  $\boldsymbol{y}(1)$  appartient au sous-espace vectoriel engendré par les colonnes linéairement indépendantes de la matrice  $\boldsymbol{\Phi}(1)$  (fig. 11.3).

La solution est évidente ; il suffit de résoudre le système d'équations algébriques linéaires (11.2) :

$$\begin{aligned} b &= y(0) \\ a &= \frac{y(h) - y(0)}{h} \end{aligned}$$

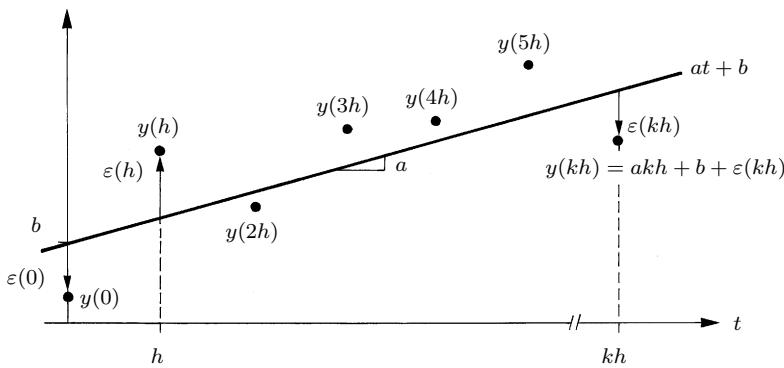
Cette approche n'est pas recommandée, car elle manque de fiabilité. En effet, les échantillons  $y(0)$  et  $y(h)$  sont entachés d'*erreurs de mesure* ; qui plus est, il existe

des *erreurs de modélisation* dans le sens que, en réalité, l'hypothèse d'une droite passant par les échantillons n'est pas forcément correcte. Toutes ces erreurs se



**Fig. 11.3** Interprétation géométrique d'une régression linéaire dans le cas  $N = p = 2$ .

répercutent alors sur les paramètres calculés. Afin de filtrer les erreurs, une redondance est introduite en fondant l'estimation de  $a$  et de  $b$  sur un nombre  $N$  d'échantillons plus grand que le nombre  $p = 2$  de ces paramètres. Dès que  $N > p$ , les échantillons  $y(0), y(h), \dots, y(kh)$  ne sont généralement plus alignés sur la droite  $at + b$ , à cause des erreurs de mesure et de modélisation (fig. 11.4).



**Fig. 11.4** Identification des paramètres  $a$  et  $b$  à partir de  $N = k + 1 > p = 2$  échantillons  $y(0), y(h), \dots, y(kh)$ .

Maintenant :

$$\begin{cases} y(0) = b + \varepsilon(0) \\ y(h) = ah + b + \varepsilon(h) \\ \vdots \\ y(kh) = akh + b + \varepsilon(kh) \end{cases}$$

Ou :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(h) \\ \vdots \\ y(kh) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h & 1 \\ \vdots & \vdots \\ kh & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(h) \\ \vdots \\ \varepsilon(kh) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}(k)}$$

La régression linéaire est par conséquent :

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\varepsilon}(k)$$

On a  $N = k + 1 > p = 2$ . Géométriquement, le vecteur de mesures  $\boldsymbol{y}(k)$  n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les colonnes linéairement indépendantes de la matrice  $\boldsymbol{\Phi}(k)$  (fig. 11.1).

En guise d'application, considérons l'identification, à partir de la réponse impulsionnelle, du gain statique  $\gamma$  et de la constante de temps  $\tau$  d'une fonction de transfert analogique du premier ordre (voir à ce sujet l'exemple 1.14) :

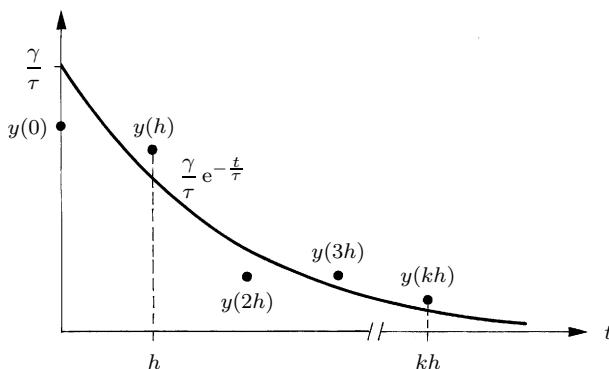
$$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1}$$

Pour une entrée en forme d'impulsion de Dirac, la sortie de ce modèle vaut (fig. 11.5) :

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \frac{\gamma}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

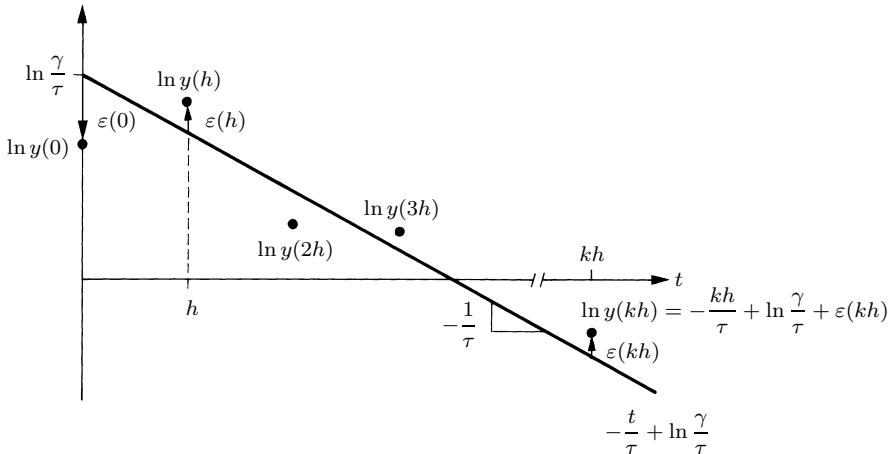
On a :

$$\ln\left(\frac{\gamma}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{t}{\tau} + \ln\frac{\gamma}{\tau}$$



**Fig. 11.5** Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

Grâce à cette propriété, il suffit de prendre le logarithme naturel des grandeurs en ordonnée dans la figure 11.5 pour aboutir à une forme linéaire, représentée dans la figure 11.6.



**Fig. 11.6** Identification de  $a = -1/\tau$  et  $b = \ln \frac{\gamma}{\tau}$  à partir des échantillons  $\ln y(0)$ ,  $\ln y(h)$ , ...,  $\ln y(kh)$ .

Le problème à résoudre est maintenant un cas particulier de celui traité dans les lignes précédentes avec  $a = -1/\tau$ ,  $b = \ln \frac{\gamma}{\tau}$  et les nombres  $\ln y(0)$ ,  $\ln y(h)$ , ...,  $\ln y(kh)$  obtenus à partir des mesures brutes  $y(0)$ ,  $y(h)$ , ...,  $y(kh)$  de la réponse impulsionnelle. Après estimation des paramètres  $a$  et  $b$ ,  $\gamma$  et  $\tau$  s'obtiennent directement :

$$\tau = -\frac{1}{a} \quad \gamma = -\frac{1}{a} e^b$$

Un essai consistant à injecter une impulsion de Dirac pour récolter la réponse impulsionnelle est délicat à mettre en œuvre. En effet, une entrée aussi violente peut être interdite ; qui plus est, des incursions dans le domaine non linéaire sont hautement probables, faussant les prévisions.

### EXEMPLE 11.2

L'approche présentée dans l'exemple précédent s'étend aisément au cas où il s'agit de faire passer au plus près d'échantillons mesurés une fonction qui est elle-même une somme pondérée de **fonctions de base** spécifiées, par exemple des polynômes orthogonaux, des fonctions trigonométriques ou encore des splines. Soient  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , ces fonctions de base. Le problème est d'estimer les coefficients  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , de manière à ce que la fonction  $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_p f_p$  passe au mieux par les mesures  $y(0)$ ,  $y(h)$ ,  $y(kh)$ . Alors, en

admettant qu'il y ait plus d'échantillons que de fonctions de base afin de disposer d'une certaine redondance :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) + \cdots + c_p f_p(0) + \varepsilon(0) \\ y(h) = c_1 f_1(h) + c_2 f_2(h) + \cdots + c_p f_p(h) + \varepsilon(h) \\ \vdots \\ y(ph) = c_1 f_1(ph) + c_2 f_2(ph) + \cdots + c_p f_p(ph) + \varepsilon(ph) \\ \vdots \\ y(kh) = c_1 f_1(kh) + c_2 f_2(kh) + \cdots + c_p f_p(kh) + \varepsilon(kh) \end{array} \right.$$

Ou :

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(h) \\ \vdots \\ y(ph) \\ \vdots \\ y(kh) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \cdots & f_p(0) \\ f_1(h) & f_2(h) & \cdots & f_p(h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(ph) & f_2(ph) & \cdots & f_p(ph) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(kh) & f_2(kh) & \cdots & f_p(kh) \end{bmatrix}}_{\Phi(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}}_{\vartheta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(h) \\ \vdots \\ \varepsilon(ph) \\ \vdots \\ \varepsilon(kh) \end{bmatrix}}_{\varepsilon(k)}$$

La régression linéaire s'écrit, avec  $N = k + 1 > p$  :

$$\mathbf{y}(k) = \Phi(k)\vartheta + \varepsilon(k)$$

Comme application, revenons au problème de la détermination expérimentale de la fonction de transfert harmonique  $G(e^{j\omega h})$  d'un processus BIBO stable (§ 6.2.1). Avec une excitation sinusoïdale  $\sin(\omega kh)$ ,  $k \geq 0$ , et après amortissement du régime transitoire, sa réponse est une sinusoïde de pulsation  $\omega$  atténue et déphasée, par rapport à l'entrée, par  $|G(e^{j\omega h})|$  et de  $\text{Arg } G(e^{j\omega h})$ , respectivement. En tirant bénéfice d'une identité trigonométrique élémentaire, cette réponse prend la forme :

$$\begin{aligned} & |G(e^{j\omega h})| \sin(\omega kh + \text{Arg } G(e^{j\omega h})) \\ &= |G(e^{j\omega h})| \cos(\text{Arg } G(e^{j\omega h})) \sin(\omega kh) + |G(e^{j\omega h})| \sin(\text{Arg } G(e^{j\omega h})) \cos(\omega kh) \end{aligned}$$

Ou, avec  $c_1 = |G(e^{j\omega h})| \cos(\text{Arg } G(e^{j\omega h}))$  et  $c_2 = |G(e^{j\omega h})| \sin(\text{Arg } G(e^{j\omega h}))$  :

$$|G(e^{j\omega h})| \sin(\omega kh + \text{Arg } G(e^{j\omega h})) = c_1 \sin(\omega kh) + c_2 \cos(\omega kh)$$

On a les deux fonctions de base  $\sin(\omega kh)$  et  $\cos(\omega kh)$  et il faut estimer les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  à partir d'échantillons  $y(0)$ ,  $y(h)$ ,  $y(2h)$ , ...,  $y(kh)$  récoltés à la sortie du système. Finalement, les quantités  $|G(e^{j\omega h})|$  et  $\text{Arg } G(e^{j\omega h})$  sont évaluées en notant que :

$$|G(e^{j\omega h})| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\text{Arg } G(e^{j\omega h}) = \text{Arctg } \frac{c_2}{c_1}$$

**EXEMPLE 11.3**

La sortie  $y(k)$  d'un processus discret au repos, linéaire, causal et stationnaire est fournie par le produit de convolution entre l'entrée  $u(k)$  qui lui est appliquée et sa réponse impulsionnelle  $g(k)$  (théorème 3.1) :

$$y(k) = \sum_{\ell=0}^k u(\ell)g(k-\ell) \quad (11.3)$$

Ce produit de convolution est commutatif (théorème 3.2) :

$$y(k) = \sum_{\ell=0}^k g(\ell)u(k-\ell) \quad (11.4)$$

Nous désirons ici identifier la réponse impulsionnelle  $g(k)$  à partir de mesures, recueillies à différents instants d'échantillonnage, de l'entrée  $u(k)$  et de la sortie  $y(k)$ . C'est typiquement un problème d'identification d'un modèle de représentation non paramétrique. Il s'agit en quelque sorte de défaire la convolution, d'où l'appellation, pour cette opération inverse, de **déconvolution numérique**. En mettant à profit l'équation (11.3) à différents coups d'horloge :

$$\begin{cases} y(0) = u(0)g(0) \\ y(1) = u(0)g(1) + u(1)g(0) \\ y(2) = u(0)g(2) + u(1)g(1) + u(2)g(0) \\ \vdots \\ y(k) = u(0)g(k) + u(1)g(k-1) + \cdots + u(k)g(0) \end{cases}$$

Ou, sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u(1) & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ u(2) & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(k) & u(k-1) & u(k-2) & \dots & u(0) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ \vdots \\ g(k) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}}$$

C'est une régression linéaire avec  $N = k + 1 = p$  :

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{\vartheta} \quad (11.5)$$

La matrice  $\boldsymbol{\Phi}(k)$  étant triangulaire, sa résolution est immédiate ; en admettant que  $u(0) \neq 0$ , on obtient la récurrence :

$$g(0) = \frac{1}{u(0)} y(0)$$

$$g(1) = \frac{1}{u(0)} (y(1) - g(0)u(1))$$

$$g(2) = \frac{1}{u(0)} (y(2) - g(0)u(2) - g(1)u(1))$$

⋮

$$g(k) = \frac{1}{u(0)} \left( y(k) - \sum_{\ell=0}^{k-1} g(\ell)u(k-\ell) \right)$$

L'évaluation de la réponse impulsionale est particulièrement simple si l'entrée est le saut unité  $\{\dots, 0, 1, 1, 1, \dots\}$  :

$$g(k) = y(k) - \sum_{\ell=0}^{k-1} g(\ell) \quad (11.6)$$

Par ailleurs, (11.4) donne :

$$y(k-1) = \sum_{\ell=0}^{k-1} g(\ell) \quad (11.7)$$

D'où, en combinant (11.6) et (11.7) :

$$g(k) = y(k) - y(k-1) \quad (11.8)$$

Ainsi, la réponse impulsionale est la différence des échantillons, pris à deux instants d'échantillonnage successifs, constituant la réponse indicelle. Ce résultat découle aussi d'un calcul par la transformée en  $z$ . En effet, pour une entrée en forme de saut unité,  $U(z) = \frac{z}{z-1}$  et la réponse indicelle est :

$$Y(z) = G(z) \frac{z}{z-1}$$

D'où la transformée en  $z$  de la réponse impulsionale :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Y(z) = (1-z^{-1})Y(z)$$

C'est, dans le domaine temporel, l'équation (11.8).

La régression linéaire (11.5) n'offre aucune redondance puisque le nombre  $N$  de mesures est égal au nombre  $p$  de paramètres. Admettons que le système soit à **réponse impulsionale finie**, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $K$  tel que  $g(k) = 0$  si  $k > K$ . Pour un processus BIBO stable, la série  $\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|$  est convergente (théorème 7.1) et, nécessairement,  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = 0$ . En pratique, les échantillons

composant la réponse impulsionnelle peuvent être considérés comme nuls après amortissement du régime transitoire. Dès que  $k > K$ , on doit introduire dans la régression linéaire un vecteur d'erreurs de mesure et de modélisation :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(K) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u(1) & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ u(2) & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(K) & u(K-1) & u(K-2) & \dots & u(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k) & u(k-1) & u(k-2) & \dots & u(k-K) \end{bmatrix}}_{\Phi(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(K) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(K) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}(k)}$$

Nous sommes en présence d'une régression linéaire avec  $N = k + 1 > p = K + 1$ .

Comment calculer les coefficients du dénominateur et du numérateur d'une fonction de transfert  $G(z)$  à partir de la réponse impulsionnelle  $g(k)$ ? Ce problème d'identification paramétrique peut lui aussi être modélisé à l'aide du concept de régression linéaire. On considère la fonction de transfert suivante, dans laquelle, sans perte de généralité (§ 4.4.3), le degré du dénominateur est égal à celui du numérateur :

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Le théorème 4.12 fournit, avec  $a_i = b_i = 0$  lorsque  $i > n$  :

$$g(k) = b_k - \sum_{\ell=0}^{k-1} g(\ell) a_{k-\ell} \quad k \geq 0$$

Ou :

$$b_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} g(\ell) a_{k-\ell} + g(k) \tag{11.9}$$

Donc, en posant  $k = 0, 1, \dots, n$  :

$$\begin{cases} b_0 = g(0) \\ b_1 = g(0)a_1 + g(1) \\ \vdots \\ b_n = g(0)a_n + g(1)a_{n-1} + \dots + g(n-1)a_1 + g(n) \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{bmatrix} \tag{11.10}$$

Avec  $k = n + 1, n + 2, \dots, 2n$ , la relation (11.9) donne, en tenant compte du fait que  $a_i = b_i = 0$  dès que  $i > n$  :

$$\begin{aligned} 0 &= g(1)a_n + g(2)a_{n-1} + \cdots + g(n)a_1 + g(n+1) \\ 0 &= g(2)a_n + g(3)a_{n-1} + \cdots + g(n+1)a_1 + g(n+2) \\ &\vdots \\ 0 &= g(n)a_n + g(n+1)a_{n-1} + \cdots + g(2n-1)a_1 + g(2n) \end{aligned}$$

De façon équivalente :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -g(n+1) \\ -g(n+2) \\ \vdots \\ -g(2n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(2n)} = \underbrace{\begin{bmatrix} g(n) & g(n-1) & \dots & g(1) \\ g(n+1) & g(n) & \dots & g(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(2n-1) & g(2n-2) & \dots & g(n) \end{bmatrix}}_{\Phi(2n-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}}$$

C'est une régression linéaire sans redondance, avec  $N = n = p$ , autrement dit un système de  $n$  équations algébriques linéaires renfermant les  $n$  inconnues  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , lequel peut être résolu pour autant que le rang de la matrice d'observations  $\Phi(2n-1)$  soit égal à  $n$ . Un filtrage est judicieusement introduit en adjoignant des échantillons supplémentaires et un vecteur d'erreurs :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -g(n+1) \\ -g(n+2) \\ \vdots \\ -g(2n) \\ \vdots \\ -g(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} g(n) & g(n-1) & \dots & g(1) \\ g(n+1) & g(n) & \dots & g(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(2n-1) & g(2n-2) & \dots & g(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(k-1) & g(k-2) & \dots & g(k-n) \end{bmatrix}}_{\Phi(k-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(n+1) \\ \varepsilon(n+2) \\ \vdots \\ \varepsilon(2n) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}(k)}$$

Il s'agit à nouveau d'une régression linéaire, avec  $N = k - n > p = n$  :

$$\mathbf{y}(k) = \Phi(k-1)\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\varepsilon}(k)$$

Après l'avoir résolue (sect. 11.4), les coefficients  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sont disponibles pour calculer les coefficients  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , à l'aide de la transformation linéaire (11.10).

#### EXEMPLE 11.4

Cet exemple est dévolu à l'identification paramétrique d'une fonction de transfert harmonique. Considérons, par souci de transparence, le cas d'un système analogue du second ordre :

$$\frac{b_0 j\omega + b_1}{(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_2} \tag{11.11}$$

L'approche décrite dans les lignes qui suivent, dite **méthode de Levy**, s'étend sans autre à des fonctions de transfert analogiques et discrètes d'ordre quelconque. On suppose que des essais harmoniques analogiques effectués aux pulsations  $\omega_i$  ont fourni des mesures  $x_i + jy_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ , de cette fonction de transfert. Il s'agit alors de caler, en ajustant les coefficients  $a_1, a_2, b_0$  et  $b_1$ , le modèle (11.11) sur les mesures expérimentales  $x_i + jy_i$ ; autrement dit, en supposant qu'il y ait redondance :

$$x_i + jy_i = \frac{b_0 j\omega_i + b_1}{(j\omega_i)^2 + a_1 j\omega_i + a_2} + e_i \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (11.12)$$

Les paramètres à estimer apparaissent ici de manière non linéaire. Afin de contourner le problème, l'équation (11.12) est écrite comme suit :

$$\begin{aligned} & (x_i + jy_i)((j\omega_i)^2 + a_1 j\omega_i + a_2) \\ &= b_0 j\omega_i + b_1 + e_i((j\omega_i)^2 + a_1 j\omega_i + a_2) \end{aligned} \quad (11.13)$$

Posons :

$$e_i((j\omega_i)^2 + a_1 j\omega_i + a_2) = \varepsilon_i = u_i + jv_i \in \mathbb{C} \quad (11.14)$$

(11.13) devient :

$$(x_i + jy_i)((j\omega_i)^2 + a_1 j\omega_i + a_2) = b_0 j\omega_i + b_1 + \varepsilon_i$$

Ou, en égalant les parties réelles entre elles et en faisant de même pour les parties imaginaires :

$$\begin{cases} -\omega_i^2 x_i = \omega_i y_i a_1 - x_i a_2 + b_1 + u_i \\ -\omega_i^2 y_i = -\omega_i x_i a_1 - y_i a_2 + \omega_i b_0 + v_i \end{cases}$$

Chaque mesure de la fonction de transfert harmonique conduit à deux équations. En admettant que le nombre  $K$  de mesures soit supérieur à deux afin d'être redondant, on aboutit à la régression linéaire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega_1^2 x_1 \\ -\omega_1^2 y_1 \\ \vdots \\ -\omega_K^2 x_K \\ -\omega_K^2 y_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(K)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1 y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ -\omega_1 x_1 & -y_1 & \omega_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_K y_K & -x_K & 0 & 1 \\ -\omega_K x_K & -y_K & \omega_K & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi(K)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_K \\ v_K \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}(K)} \quad (11.15)$$

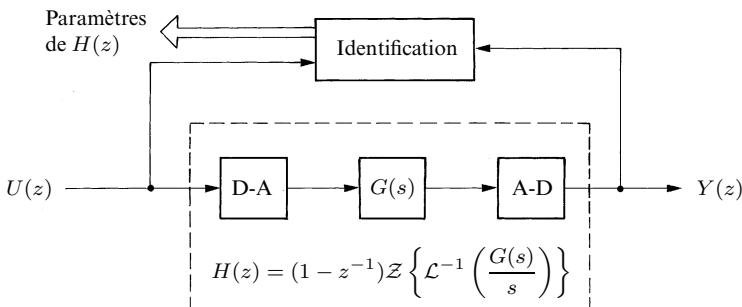
Dans cet exemple,  $N = 2K > p = 4$ .

Nous reviendrons sur la méthode de Levy, en particulier sur un inconvénient de la formulation qui vient d'être présentée, dans l'exemple 11.11. Par ailleurs, cette méthode ne peut pas directement être mise à profit en présence d'un retard pur, vu le caractère non linéaire qu'il introduit. ■

C'est principalement la situation  $N > p$ , c'est-à-dire quand le nombre de mesures excède celui des paramètres, provoquant un filtrage des erreurs, que nous détaillerons par la suite.

### 11.3 Application à l'identification des systèmes dynamiques

Les lois physiques étant le plus souvent de nature différentielle, un modèle de connaissance, le cas échéant après linéarisation autour d'un point (ou d'une trajectoire) de fonctionnement et introduction de variables écarts, consiste en une fonction de transfert analogique  $G(s)$ . Son échantillonnage par la formule  $H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}(G(s)/s)\}$  conduit à la fonction de transfert discrète  $H(z)$  (fig. 11.7).



**Fig. 11.7** Modélisations de connaissance et de représentation ; la ligne double indique la présence de plusieurs quantités, à savoir les coefficients du dénominateur et du numérateur de  $H(z)$ .

Afin d'établir un modèle de représentation, un algorithme d'identification analyse les signaux d'entrée  $\{u(k)\}$  et de sortie  $\{y(k)\}$  pour estimer, puis mettre à jour si nécessaire, les paramètres de  $H(z)$ ; ces paramètres sont les coefficients des polynômes au dénominateur et au numérateur de l'expression rationnelle  $H(z)$ .

On peut remarquer que l'identification conduit directement à la fonction de transfert  $H(z)$  du système échantillonné. Une alternative est de construire un modèle de représentation du processus *analogique*  $G(s)$ , en analysant son entrée et sa sortie analogiques, comme dans l'exemple 11.4. Cette approche offre l'avantage de conserver une signification physique aux paramètres à identifier, lesquels ne dépendent bien entendu pas de la période d'échantillonnage. Elle n'est cependant

pas poursuivie ici parce que, visant des implantations numériques, nous souhaitons franchir la frontière séparant le monde analogique du monde discret le plus tôt possible (sect. 8.1).

Il découle du paragraphe 5.2.1 que  $H(z)$  est une fonction de transfert, à ce titre indépendante de l'entrée, rationnelle et strictement propre :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \quad n > m$$

Il n'y a aucune perte de généralité en prenant un surplus de pôles  $d = n - m = 1$  :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

En effet, si l'on sait que le surplus de pôles réels  $d$  est strictement plus grand que 1, physiquement que le retard est supérieur à une période d'échantillonnage, il suffit de poser  $b_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, d-2$ , dans les développements qui suivent. En puissances négatives de  $z$  :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Dans le domaine temporel :

$$(1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n})y(k) = (b_0 q^{-1} + b_1 q^{-2} + \cdots + b_{n-1} q^{-n})u(k)$$

Et, finalement :

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2) + \cdots + b_{n-1} u(k-n) \end{aligned} \quad (11.16)$$

En admettant que l'ordre  $n$  du système soit connu, la procédure d'identification doit fournir une estimation des coefficients  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , et  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , à partir des échantillons  $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$  et  $y(0), y(1), \dots, y(k)$  récoltés aux instants d'échantillonnage  $0, h, \dots, kh$ . Comment transposer ce problème sous la forme d'une régression linéaire ? Ecrivons l'équation aux différences (11.16) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \cdots - a_n y(k-n) \\ + b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2) + \cdots + b_{n-1} u(k-n) \end{aligned}$$

Ou :

$$y(k) = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ \dots \ -y(k-n) \ u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n)] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

Pour  $k = 1, 2, \dots, 2n$  et avec des nombres  $u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$  et des conditions initiales  $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$  tous nuls, cette équation donne, sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \\ \vdots \\ y(2n) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}(2n)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(0) & 0 & \dots & 0 & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ -y(1) & -y(0) & \dots & 0 & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(n-1) & -y(n-2) & \dots & -y(0) & u(n-1) & u(n-2) & \dots & u(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(2n-1) & -y(2n-2) & \dots & -y(n) & u(2n-1) & u(2n-2) & \dots & u(n) \end{bmatrix}}_{\Phi(2n-1)}$$

.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}}$$

D'où la régression linéaire :

$$\boldsymbol{y}(2n) = \Phi(2n-1)\boldsymbol{\vartheta}$$

C'est un système de  $N = 2n$  équations algébriques linéaires renfermant les  $p = 2n$  inconnues  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ . Si le rang de la matrice carrée  $\Phi(2n-1)$  vaut  $2n$ , il possède une solution unique. Géométriquement, le vecteur de mesures  $\boldsymbol{y}(2n)$  appartient au sous-espace vectoriel engendré par les colonnes linéairement indépendantes de la matrice  $\Phi(2n-1)$ .

Cette approche souffre d'un manque de fiabilité. Les échantillons  $u(0), u(1), \dots, u(2n-1)$  et  $y(0), y(1), \dots, y(2n)$  sont entachés d'*erreurs de mesure* : perturbations pénétrant dans le processus, bruits de mesure sur la grandeur de sortie, etc. Il existe en outre des *erreurs de modélisation*, par exemple des modes négligés (l'ordre réel du système est alors supérieur à  $n$ ) ou des non-linéarités pas prises en compte. Un filtrage de ces erreurs est mis en place avec un nombre  $N$  d'échantillons plus élevé. Dès que  $N > p$ , les échantillons ne peuvent généralement plus, à cause des erreurs de mesure et de modélisation, satisfaire l'égalité (11.17). En rassemblant toutes les erreurs dans  $\varepsilon(k)$ , (11.17) devient :

$$\mathbf{y}(k) = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ \dots \ -y(k-n) \ u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n)]$$

$$\cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} + \varepsilon(k) \quad (11.18)$$

D'où, toujours avec des nombres  $u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$  et des conditions initiales  $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$  nuls :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \\ \vdots \\ y(2n) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(0) & 0 & \dots & 0 & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ -y(1) & -y(0) & \dots & 0 & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(n-1) & -y(n-2) & \dots & -y(0) & u(n-1) & u(n-2) & \dots & u(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(2n-1) & -y(2n-2) & \dots & -y(n) & u(2n-1) & u(2n-2) & \dots & u(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(k-1) & -y(k-2) & \dots & -y(k-n) & u(k-1) & u(k-2) & \dots & u(k-n) \end{bmatrix}}_{\Phi(k-1)}$$

$$\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\vartheta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(n) \\ \vdots \\ \varepsilon(2n) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}}_{\varepsilon(k)}$$

Il en résulte la régression linéaire :

$$\mathbf{y}(k) = \Phi(k-1)\boldsymbol{\vartheta} + \varepsilon(k) \quad (11.19)$$

Nous avons maintenant  $N = k > p = 2n$ . Géométriquement, le vecteur de mesures  $\mathbf{y}(k)$  n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice  $\Phi(k-1)$ . Il importe de noter qu'ici la matrice d'observations  $\Phi(k-1)$  renferme des mesures.

**EXEMPLE 11.5**

Soit l'entraînement en vitesse déjà traité au moyen du modèle de connaissance suivant, où la période d'échantillonnage  $h$  vaut 0,025 s :

$$H(z) = \frac{0,0975}{z - 0,95}$$

Une modélisation de représentation est maintenant effectuée ; il s'agit d'identifier, en partant des échantillons  $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$  et  $y(0), y(1), \dots, y(k)$  obtenus aux instants d'échantillonnage  $0, h, \dots, kh$ , les paramètres  $a$  et  $b$  de l'expression :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{z + a} \quad (11.20)$$

En puissances négatives de  $z$  :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

Dans le domaine temporel :

$$(1 + aq^{-1})y(k) = bq^{-1}u(k)$$

D'où l'équation aux différences :

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1)$$

Ainsi, en incorporant l'erreur  $\varepsilon(k)$  :

$$y(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \varepsilon(k)$$

On en déduit la régression linéaire :

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & u(0) \\ -y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}$$

Généralement, à partir de la fonction de transfert échantillonnée  $H(z)$ , il n'est pas possible de calculer directement les paramètres physiques du modèle analogique  $G(s)$ . Cela est néanmoins faisable dans le présent exemple.

En effet, pour un entraînement en vitesse (ex. 1.14) :

$$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1}$$

$\gamma$  désigne le gain statique et  $\tau$  la constante de temps. Sa fonction de transfert échantillonnée est :

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\gamma}{s(\tau s + 1)} \right) \right\} = \frac{\gamma(1 - e^{-\frac{h}{\tau}})}{z - e^{-\frac{h}{\tau}}} \quad (11.21)$$

En comparant (11.20) et (11.21) :

$$\begin{aligned} b &= \gamma \left( 1 - e^{-\frac{h}{\tau}} \right) \\ a &= -e^{-\frac{h}{\tau}} \end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{b}{1 + a} \\ \tau &= -\frac{h}{\ln(-a)} \end{aligned}$$

Dès lors, après avoir estimé les paramètres  $a$  et  $b$ , il est facile d'évaluer  $\gamma$  et  $\tau$ , constituant une alternative aux approches des exemples 1.14 et 11.1, de même qu'à la méthode de Levy. ■

Il est très utile d'exploiter d'éventuelles connaissances a priori dans l'identification d'un processus dynamique. Ceci permet de diminuer appréciablement l'erreur d'estimation. L'approche fusionnant modélisation de connaissance et modélisation de représentation est malheureusement fort complexe, parce qu'elle conduit généralement à un problème intrinsèquement non linéaire. Quelques situations simples sont néanmoins recensées ; les plus importantes sont abordées dans les lignes qui suivent.

La fonction de transfert  $H(z)$  à identifier possède un surplus de pôles égal à 1, comme cela est mentionné au début de la présente section. Si le surplus de pôles  $d$  est connu et strictement plus grand que 1, on peut directement inclure cette connaissance a priori en construisant la régression linéaire avec  $b_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, d-2$ . La même approche permet de traiter le cas où certains coefficients du numérateur et du dénominateur de  $H(z)$  sont nuls (ou connus).

Il arrive que  $H(z)$  possède l'allure suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B'(z)B(z)}{A'(z)A(z)} \quad (11.22)$$

Les polynômes  $A'(z)$  et  $B'(z)$  sont connus, contrairement aux polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ . Tous ces polynômes sont exprimés en puissances négatives de  $z$ . La relation (11.22) fournit :

$$\frac{A'(z)Y(z)}{B'(z)U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Définissons la sortie et l'entrée artificielles :

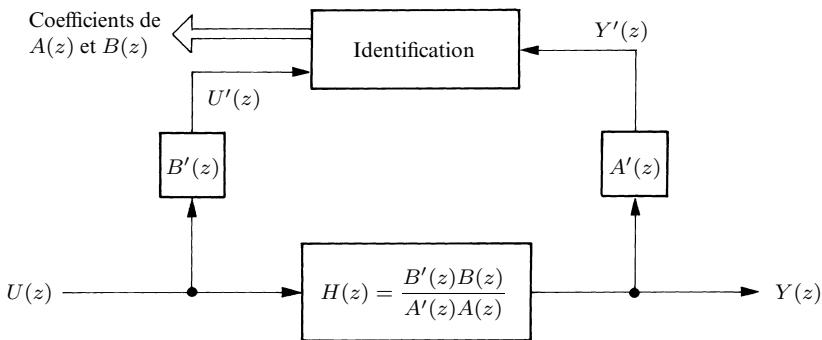
$$Y'(z) = A'(z)Y(z)$$

$$U'(z) = B'(z)U(z)$$

Par conséquent :

$$\frac{Y'(z)}{U'(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

La méthode du paragraphe précédent est tout simplement appliquée à la fonction de transfert  $B(z)/A(z)$ , qui décrit la partie inconnue de la fonction de transfert complète (11.22). Les signaux mis en jeu dans cette phase sont  $Y'(z)$  et  $U'(z)$ , égaux aux signaux réels  $Y(z)$  et  $U(z)$  filtrés par les polynômes  $A'(z)$  et  $B'(z)$ , respectivement. Cette approche, rencontrée sous le nom de **méthode de Clary**, est illustrée dans la figure 11.8.



**Fig. 11.8** Méthode de Clary.

Un cas abondamment rencontré dans les systèmes mécatroniques et relevant de ce formalisme est un effet intégrateur :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{(1 - z^{-1})A(z)}$$

On a alors  $A'(z) = 1 - z^{-1}$  et  $B'(z) = 1$ . L'identification portera sur la fonction de transfert ci-après, où  $Y'(z) = (1 - z^{-1})Y(z)$  est le signal  $Y(z)$  filtré par  $1 - z^{-1}$  :

$$\frac{Y'(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

**EXEMPLE 11.6**

Un entraînement en position a déjà été, dans ce texte, examiné à maintes reprises. Son modèle de connaissance est, avec une période d'échantillonnage  $h = 0,025$  s :

$$H(z) = \frac{1,23 \cdot 10^{-3} z + 1,21 \cdot 10^{-3}}{(z - 1)(z - 0,95)}$$

Il existe un effet intégrateur reflétant le passage d'une vitesse à une position.

Conscients de l'existence de cette intégration, nous élaborons maintenant une modélisation de représentation. A l'aide des mesures  $u(0), u(1), \dots, u(k - 1)$  et  $y(0), y(1), \dots, y(k)$ , l'identification porte sur les paramètres  $a, b_0$  et  $b_1$  de la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{(z - 1)(z + a)}$$

En puissances négatives de  $z$  :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + az^{-1})}$$

Soit :

$$Y'(z) = (1 - z^{-1})Y(z)$$

Donc :

$$\frac{Y'(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{1 + az^{-1}}$$

Dans le domaine temporel, ces deux dernières équations donnent :

$$\begin{aligned} y'(k) &= (1 - q^{-1})y(k) \\ (1 + aq^{-1})y'(k) &= (b_0 q^{-1} + b_1 q^{-2})u(k) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} y'(k) &= y(k) - y(k - 1) \\ y'(k) + ay'(k - 1) &= b_0 u(k - 1) + b_1 u(k - 2) \end{aligned}$$

La seconde égalité devient, après introduction de l'erreur  $\varepsilon(k)$  :

$$y'(k) = \begin{bmatrix} -y'(k - 1) & u(k - 1) & u(k - 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \varepsilon(k)$$

On en déduit la régression linéaire :

$$\begin{bmatrix} y'(1) \\ y'(2) \\ \vdots \\ y'(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y'(0) & u(0) & 0 \\ -y'(1) & u(1) & u(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y'(k - 1) & u(k - 1) & u(k - 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}$$

Les nombres  $y'(0), y'(1), \dots, y'(k)$  sont déterminés à partir des échantillons réels  $y(0), y(1), \dots, y(k)$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} y'(0) \\ y'(1) \\ \vdots \\ y'(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y(1) - y(0) \\ \vdots \\ y(k) - y(k-1) \end{bmatrix}$$

■

Revenons un instant à l'équation (11.18) :

$$\begin{aligned} y(k) &= -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \cdots - a_ny(k-n) \\ &\quad + b_0u(k-1) + b_1u(k-2) + \cdots + b_{n-1}u(k-n) + \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (11.23)$$

Par définition :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \cdots - a_ny(k-n) \\ &\quad + b_0u(k-1) + b_1u(k-2) + \cdots + b_{n-1}u(k-n) \end{aligned}$$

Cette expression peut être interprétée comme la prédition de la sortie  $y(k)$  au temps  $kh$  obtenue à partir de (11.23) en négligeant l'erreur inconnue  $\varepsilon(k)$ , mais en disposant du modèle, à savoir les coefficients  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , et  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , et des entrées et sorties mesurées  $u(k-1), \dots, u(k-n)$  et  $y(k-1), \dots, y(k-n)$ . Tout naturellement, la quantité  $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$  est appelée **erreur de prédition**. En théorie de l'estimation, ce signal se rencontre plutôt sous le nom d'**innovations** puisque, dans  $y(k) = \hat{y}(k) + \varepsilon(k)$ ,  $\varepsilon(k)$  renferme l'information nécessaire pour passer de la prédition  $\hat{y}(k)$  à la valeur mesurée  $y(k)$ . Le vecteur  $\varepsilon(k) \in \mathbb{R}^N$  dans la régression linéaire (11.19) est le **vecteur d'erreurs de prédition**. Dans le contexte de l'équation (11.23),  $\varepsilon(k)$  est aussi une **erreur d'équation**, car c'est elle qui quantifie le degré de transgression de l'équation aux différences originales (11.16);  $\varepsilon(k)$  est par conséquent un **vecteur d'erreurs d'équation**.

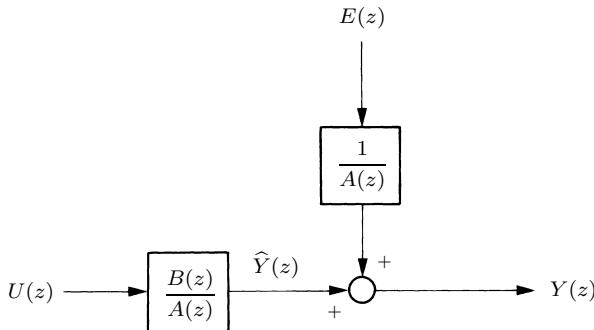
Il est instructif de représenter (11.23) à l'aide d'un schéma fonctionnel. En suivant à rebours, erreur d'équation incluse, la démarche ayant permis d'aboutir à (11.16) :

$$(1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n})y(k) = (b_0q^{-1} + b_1q^{-2} + \cdots + b_{n-1}q^{-n})u(k) + \varepsilon(k)$$

D'où, avec  $1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n} = A(z)$ ,  $b_0z^{-1} + b_1z^{-2} + \cdots + b_{n-1}z^{-n} = B(z)$  et  $E(z) = \mathcal{Z}\{\varepsilon(k)\}$  :

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{1}{A(z)} E(z)$$

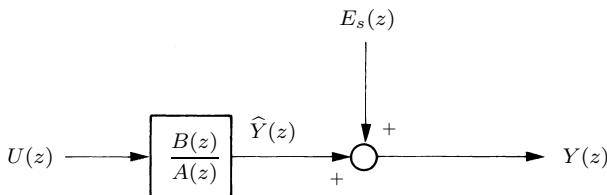
Il en découle le schéma fonctionnel de la figure 11.9, dit **modèle auto-régressif avec entrée exogène** ou, plus simplement, **modèle ARX**.



**Fig. 11.9** Modèle ARX.

Il importe de bien noter qu'ici  $U(z)$  et  $Y(z)$  sont les transformées en  $z$  des signaux mesurés à l'entrée et à la sortie du processus réel. Le modèle  $B(z)/A(z)$ , excité par  $U(z)$ , n'est capable de reproduire  $Y(z)$  qu'en commettant l'erreur  $E(z)/A(z)$ . Une autre façon de voir le problème est de se remémorer l'image géométrique de la figure 11.1 parce que, fondamentalement, le modèle ARX est équivalent à la régression linéaire (11.19).

Le schéma fonctionnel de la figure 11.9 révèle que la structure ARX est quelque peu artificielle d'un point de vue physique car l'erreur d'équation  $\varepsilon(k)$  est filtrée par la fonction de transfert  $1/A(z)$  impliquant le dénominateur du modèle  $B(z)/A(z)$ . Il semble plus raisonnable de considérer la structure représentée dans la figure 11.10 où l'erreur perturbant la sortie du modèle  $B(z)/A(z)$  est indépendante de ce dernier.



**Fig. 11.10** Modèle avec erreur de sortie.

Le signal  $E_s(z)$  est l'écart entre la sortie mesurée sur le processus réel et la sortie  $\widehat{Y}(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z)$  du modèle, justifiant pour  $\varepsilon_s(k) = \mathcal{Z}^{-1}(E_s(z))$  la dénomination **erreur de sortie**. Cette sortie n'étant pas accessible à la mesure, une idée consiste à la calculer en faisant entrer en jeu l'entrée connue  $U(z)$  et les paramètres du modèle  $B(z)/A(z)$  qu'il s'agit d'estimer. Cela nous conduit malheureusement à une difficulté de taille : les calculs font intervenir les paramètres de façon non linéaire, excluant toute structuration du problème dans le format d'une régression linéaire. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner un exemple très simple.

**EXEMPLE 11.7**

Par souci de transparence, on traite le cas d'une fonction de transfert  $B(z)/A(z)$  du premier ordre :

$$\frac{\hat{Y}(z)}{U(z)} = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

D'où l'équation aux différences :

$$\hat{y}(k) = -a\hat{y}(k-1) + bu(k-1)$$

Par récurrence, en supposant comme d'habitude que  $\hat{y}(-1) = u(-1) = 0$  :

$$\hat{y}(0) = 0$$

$$\hat{y}(1) = -a\hat{y}(0) + bu(0) = bu(0)$$

$$\hat{y}(2) = -a\hat{y}(1) + bu(1) = -abu(0) + bu(1)$$

$$\hat{y}(3) = -a\hat{y}(2) + bu(2) = a^2bu(0) - abu(1) + bu(2)$$

⋮

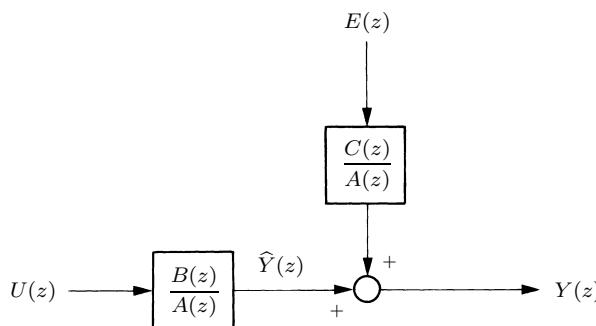
$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^k (-a)^{k-i} bu(i-1)$$

Et, comme  $y(k) = \hat{y}(k) + \varepsilon_s(k)$  :

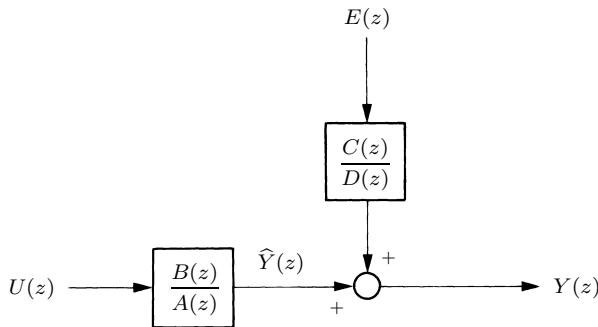
$$y(k) = \sum_{i=1}^k (-a)^{k-i} bu(i-1) + \varepsilon_s(k)$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  n'apparaissent pas linéairement dans le second membre de cette égalité, excluant la construction d'une régression linéaire. ■

D'autres structures sont documentées dans les textes dévolus à l'identification. On peut citer le **modèle auto-régressif à moyenne ajustée avec entrée exogène**, ou **modèle ARMAX** (fig. 11.11), et le **modèle de Box-Jenkins** (fig. 11.12), conduisant eux aussi à des régressions non linéaires.



**Fig. 11.11** Modèle ARMAX.



**Fig. 11.12** Modèle de Box-Jenkins.

## 11.4 Méthode des moindres carrés

Retournons à la régression linéaire générale (11.1). Le vecteur de paramètres est maintenant déterminé de manière à minimiser le vecteur d'erreurs  $\varepsilon(k)$ . Quel critère adopter pour procéder à cette minimisation ? La **méthode des moindres carrés** consiste à minimiser le carré de la norme euclidienne du vecteur d'erreurs. La fonction  $J : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  à minimiser est ainsi :

$$J(\vartheta) = \|\varepsilon(k)\|^2 = \varepsilon^T(k) \varepsilon(k) = (\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\vartheta)^T (\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\vartheta) \quad (11.24)$$

Le vecteur de paramètres qui minimise le critère  $J(\vartheta)$ , dénoté  $\widehat{\vartheta}(k)$ , est appelé **vecteur de paramètres estimé**; l'entier  $k$  indique que le dernier instant d'échantillonnage pris en compte est  $t_k = kh$ . La solution est résumée dans le théorème suivant.

### Théorème 11.1

*En supposant que la matrice d'observations  $\Phi(k)$  soit de rang  $p$ , le vecteur de paramètres estimé est unique et donné par :*

$$\widehat{\vartheta}(k) = (\Phi^T(k) \Phi(k))^{-1} \Phi^T(k) \mathbf{y}(k) \quad (11.25)$$

### Démonstration

Tout au long de cette démonstration, l'argument  $k$  est omis pour simplifier l'écriture. On a :

$$\begin{aligned} J(\vartheta) &= (\mathbf{y} - \Phi\vartheta)^T (\mathbf{y} - \Phi\vartheta) \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi \vartheta - \vartheta^T \Phi^T \mathbf{y} + \vartheta^T \Phi^T \Phi \vartheta \end{aligned} \quad (11.26)$$

Le rang de la matrice d'observations  $\Phi$  est égal à  $p$  par hypothèse ; l'algèbre linéaire, comme cela est rappelé dans la section IV.2, nous enseigne que le rang de

la matrice carrée  $\Phi^T \Phi$  d'ordre  $p$  vaut aussi  $p$ ; elle est par conséquent inversible. L'égalité (11.26) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} J(\vartheta) &= \left( \vartheta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \right)^T \Phi^T \Phi \left( \vartheta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \right) \\ &\quad + \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

Seul le premier terme de  $J(\vartheta)$ , qui peut être mis sous la forme suivante, dépend de  $\vartheta$  :

$$\left( \Phi \left( \vartheta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \right) \right)^T \left( \Phi \left( \vartheta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \right) \right)$$

Ce terme est toujours strictement plus grand que 0, sauf quand  $\Phi(\vartheta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ ; il est alors nul et la fonction  $J(\vartheta)$  atteint son minimum. Le rang de  $\Phi$  étant  $p$ , le système d'équations algébriques linéaires  $\Phi(\vartheta - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  possède une et une seule solution nulle :

$$\hat{\vartheta} - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

D'où :

$$\hat{\vartheta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}$$
■

Les lignes de la matrice d'observation  $\Phi(k)$  sont dénotées  $\phi_1^T(k), \phi_2^T, \dots, \phi_N^T(k)$ , avec  $\phi_1(k), \phi_2(k), \dots, \phi_N(k) \in \mathbb{R}^p$ . L'équation (11.25) peut donc être écrite :

$$\hat{\vartheta}(k) = \left( \sum_{i=1}^N \phi_i(k) \phi_i^T(k) \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N \phi_i(k) y_i(k) \right) \quad (11.27)$$

Les formules (11.25) et (11.27) peuvent être interprétées comme un filtre qui, à partir du vecteur de mesure  $\mathbf{y}(k)$ , élabore une estimation optimale  $\hat{\vartheta}(k)$  du vecteur de paramètres  $\vartheta$ . Ces formules ne sont correctes que si le rang de la matrice  $\Phi(k)$  vaut  $p$ . En d'autres termes, les  $p$  colonnes de  $\Phi(k)$  doivent être linéairement indépendantes. Dans le contexte de l'identification des processus dynamiques (sect. 11.3), il est intuitivement évident que l'excitation doit être *suffisamment riche* ou *persistante* pour influencer convenablement tous les modes. Les échantillons de l'entrée et de la sortie, disposés dans la matrice d'observations, sont dès lors suffisamment différents les uns des autres, se traduisant mathématiquement par des colonnes linéairement indépendantes.

La relation (11.25) peut être mise sous la forme suivante, rencontrée sous le nom d'***équation normale*** :

$$(\Phi^T(k) \Phi(k)) \hat{\vartheta}(k) = \Phi^T(k) \mathbf{y}(k) \quad (11.28)$$

Il s'agit d'un système d'équations algébriques linéaires, pouvant être résolu par une élimination gaussienne ou une factorisation standard de la matrice  $\Phi^T(k) \Phi(k)$ .

Ces approches se révèlent parfois périlleuses. En effet, si la matrice  $\Phi(k)$  renferme de petits et de grands nombres, le calcul du produit  $\Phi^T(k)\Phi(k)$  accentue encore la dispersion ; des manipulations sur  $\Phi^T(k)\Phi(k)$  dont le bon conditionnement numérique n'est pas garanti, par exemple une élimination gaussienne, deviennent délicates. Il existe des algorithmes d'algèbre linéaire numérique permettant d'éviter efficacement ces embûches.

L'équation normale (11.28) est équivalente à :

$$\Phi^T(k)(\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\hat{\vartheta}(k)) = \mathbf{0}$$

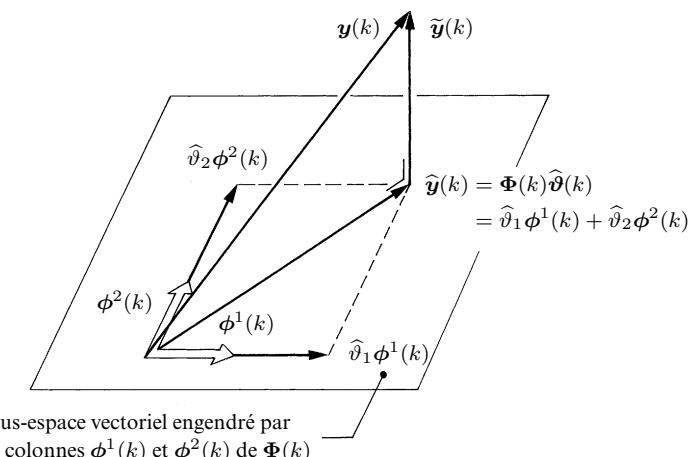
Ou, en faisant intervenir les colonnes  $\phi^1(k), \phi^2(k), \dots, \phi^p(k) \in \mathbb{R}^N$  de  $\Phi(k)$  :

$$\begin{bmatrix} \phi^{1T}(k) \\ \phi^{2T}(k) \\ \vdots \\ \phi^{pT}(k) \end{bmatrix} (\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\hat{\vartheta}(k)) = \mathbf{0}$$

Donc :

$$\phi^{iT}(k)(\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\hat{\vartheta}(k)) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Ainsi, les colonnes de la matrice  $\Phi(k)$  sont toutes orthogonales au vecteur  $\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\hat{\vartheta}(k)$  : ce vecteur est orthogonal au sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice  $\Phi(k)$ . Le vecteur  $\Phi(k)\hat{\vartheta}(k)$  est par conséquent la *projection orthogonale* de  $\mathbf{y}(k)$  sur ce sous-espace (fig. 11.13).



**Fig. 11.13** Interprétation géométrique de la méthode des moindres carrés dans le cas  $N = 3$  et  $p = 2$ .

On retrouve un résultat bien connu en algèbre linéaire, qui se généralise aux espaces de Hilbert et joue un rôle central dans une large palette de problèmes d'approximation.

La différence  $\tilde{\vartheta}(k) = \vartheta - \hat{\vartheta}(k) \in \mathbb{R}^p$  entre le vecteur de paramètres et son estimation est dite **erreur d'estimation**. La projection orthogonale  $\Phi(k)\hat{\vartheta}(k)$  de  $\vartheta(k)$  est dénotée  $\tilde{y}(k)$ . Le vecteur  $\tilde{y}(k) = y(k) - \hat{y}(k)$  est le vecteur d'erreurs qui minimise le critère  $J(\vartheta)$ . Notons que :

$$\begin{aligned}\tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k) = \Phi(k)\vartheta + \varepsilon(k) - \Phi(k)\hat{\vartheta}(k) \\ &= \Phi(k)(\vartheta - \hat{\vartheta}(k)) + \varepsilon(k) = \Phi(k)\tilde{\vartheta}(k) + \varepsilon(k)\end{aligned}$$

En tenant compte de (11.25), le vecteur  $\hat{y}(k) = \Phi(k)\hat{\vartheta}(k)$  devient :

$$\hat{y}(k) = \Phi(k)(\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)y(k)$$

Pour des raisons géométriques évidentes, la matrice  $\Phi(k)(\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)$  est appelée **matrice de projection**; il est facile de vérifier qu'elle est idempotente, c'est-à-dire que son carré est égal à elle-même, traduisant le fait que la projection de  $\hat{y}(k)$  sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice  $\Phi(k)$  est  $\hat{y}(k)$ .

### EXEMPLE 11.8

Supposons que  $N$  mesures dénotées  $y(1), y(2), \dots, y(N)$  d'une quantité constante  $\vartheta$  soient disponibles. Comment estimer  $\vartheta$ ? C'est une situation spéciale de l'exemple 11.1, avec  $a = 0$  et  $b = \vartheta$ . Les échantillons récoltés satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = \vartheta + \varepsilon(1) \\ y(2) = \vartheta + \varepsilon(2) \\ \vdots \\ y(N) = \vartheta + \varepsilon(N) \end{array} \right.$$

Ou :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(N)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \vartheta + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix}}_{\varepsilon(N)}$$

La régression linéaire s'écrit :

$$\mathbf{y}(N) = \Phi\vartheta + \varepsilon(N)$$

Le paramètre estimé  $\hat{\vartheta}(N)$  est fourni par (11.25) :

$$\hat{\vartheta}(N) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)$$

$\widehat{\vartheta}(N)$  est simplement la valeur moyenne des mesures, ce qui est intuitivement correct. ■

Dans le contexte de l'identification des processus dynamiques (sect. 11.3), le vecteur de mesures  $\mathbf{y}(k)$  est structuré comme suit :

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad N = k > p = 2n$$

En calculant  $\widehat{\vartheta}(k)$  selon l'équation (11.25), on note que *tous* les échantillons amassés aux instants d'échantillonnage  $h, 2h, \dots, kh$  (et au temps 0 puisque les nombres  $y(0)$  et  $u(0)$  entrent en jeu dans la matrice d'observations) sont exploités. Quand  $k$  augmente, il en est de même pour  $N$ . Comme les mesures du passé sont dans leur intégralité prises en compte, on dit que l'estimateur (11.25) générant  $\widehat{\vartheta}(k)$  constitue un **filtre à mémoire croissante**. Lorsque le système à identifier est légèrement non stationnaire, il apparaît raisonnable de rejeter les anciens échantillons ayant perdu leur fraîcheur. Il est bien évident que l'approche par fonction de transfert ne conserve un sens que si les paramètres varient beaucoup plus lentement que les autres variables. Dans cette situation,  $N$  peut être gardé constant et le vecteur de mesures est une fenêtre fixe de  $N > p$  mesures :

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y(k - N + 1) \\ y(k - N + 2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad N > p = 2n$$

L'estimateur (11.25) est alors appelé **filtre à mémoire fixe** ou **filtre à mémoire limitée**. Une alternative plus douce, élaborée dans la prochaine section, consiste à placer un poids plus important sur les mesures les plus actuelles.

Le présent chapitre privilégie une vision déterministe des moindres carrés, comme cela a été mentionné dans l'introduction (sect. 11.1). Une entorse à cette philosophie est maintenant perpétrée, constituant une digression exigeant a priori certaines connaissances en variables aléatoires. Son omission ne nuit pas à la compréhension de l'ensemble.

Dans ce qui suit, les vecteurs de mesures  $\mathbf{y}(k)$  et d'erreurs  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  sont des processus stochastiques vectoriels à temps discret. Les éléments de la matrice d'observation  $\Phi(k)$  sont eux aussi des processus stochastiques. Par contre, le vecteur de paramètres  $\vartheta$  est déterministe. Le vecteur de paramètres estimé  $\widehat{\vartheta}(k)$ , donné par l'estimateur (11.25), est mathématiquement une fonction  $\mathbf{y}(k) \mapsto \widehat{\vartheta}(k)$  du vecteur de mesures ; c'est donc un processus stochastique. Une étude approfondie du vecteur aléatoire  $\widehat{\vartheta}(k)$  exigerait la connaissance de sa densité de probabilité, ce qui relève dans le cas général d'une mission impossible. Une question moins am-

bitieuse est de savoir si, *stochastiquement*, le vecteur de paramètres estimé  $\hat{\vartheta}(k)$  est égal au vecteur de paramètres  $\vartheta$ . Une définition précise est proposée ci-dessous, dans laquelle  $\mathcal{E}$  dénote l'espérance mathématique.

### Définition 11.1

Un estimateur  $\hat{\vartheta}(k)$  est un **estimateur non biaisé** du vecteur de paramètre  $\vartheta$  si, quel que soit  $k$  :

$$\mathcal{E}\{\hat{\vartheta}(k)\} = \vartheta$$

Le **biais** d'un estimateur est la valeur moyenne de l'erreur d'estimation :

$$\mathcal{E}\{\tilde{\vartheta}(k)\} = \mathcal{E}\{\vartheta - \hat{\vartheta}(k)\} = \vartheta - \mathcal{E}\{\hat{\vartheta}(k)\}$$

Le résultat suivant se démontre aisément.

### Théorème 11.2

*L'estimation  $\hat{\vartheta}(k)$  par moindres carrés est non biaisée si la valeur moyenne du processus stochastique  $\varepsilon(k)$  est nulle et si  $\varepsilon(k)$  et  $\Phi(k)$  sont stochastiquement indépendants.*

### Démonstration

En combinant (11.1) et (11.25), tout en omettant l'argument  $k$  pour plus de clarté :

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi \vartheta + \varepsilon) \\ &= \vartheta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \varepsilon\end{aligned}$$

Et :

$$\mathcal{E}\{\hat{\vartheta}\} = \vartheta + \mathcal{E}\left\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \varepsilon\right\} \quad (11.29)$$

Les grandeurs  $\varepsilon$  et  $\Phi$  sont stochastiquement indépendantes. Nous savons que des fonctions de ces quantités sont elles aussi indépendantes, de sorte que :

$$\mathcal{E}\{\hat{\vartheta}\} = \vartheta + \mathcal{E}\left\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T\right\} \mathcal{E}\{\varepsilon\}$$

Comme  $\varepsilon$  est un processus stochastique à valeur moyenne nulle,  $\mathcal{E}\{\varepsilon\} = \mathbf{0}$  et :

$$\mathcal{E}\{\hat{\vartheta}\} = \vartheta$$

■

Le théorème 11.2 fournit des conditions *suffisantes* pour que l'estimation par moindres carrés soit non biaisée. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, aucune conclusion ne peut en être tirée.

Dans le problème de l'identification des systèmes dynamiques, les quantités  $\Phi(k)$  et  $\varepsilon(k)$  ne sont *pas* stochastiquement indépendantes et le théorème se révèle a priori inutile. Un simple exemple va illustrer ces difficultés et révéler que, dans les faits, *l'estimation par moindres carrés est biaisée*. Les résultats déduits ici s'étendent sans autre au cas général.

### EXEMPLE 11.9

On considère une situation très particulière de (11.18) dans laquelle il n'y a qu'un paramètre  $a$  à identifier :

$$y(k) = -ay(k-1) + \varepsilon(k) \quad (11.30)$$

La régression linéaire s'écrit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(0) \\ -y(1) \\ \vdots \\ -y(k-1) \end{bmatrix}}_{\Phi(k-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ \vartheta \end{bmatrix}}_{\vartheta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix}}_{\varepsilon(k)}$$

L'équation (11.30) donne, par récurrence :

$$\begin{aligned} y(1) &= -ay(0) + \varepsilon(1) \\ y(2) &= -ay(1) + \varepsilon(2) = a^2y(0) - a\varepsilon(1) + \varepsilon(2) \\ &\vdots \\ y(k-1) &= -ay(k-2) + \varepsilon(k-1) = (-a)^{k-1}y(0) + \sum_{i=1}^{k-1} (-a)^{k-1-i} \varepsilon(i) \end{aligned} \quad (11.31)$$

Ainsi, la matrice d'observations est :

$$\Phi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(0) \\ ay(0) - \varepsilon(1) \\ -a^2y(0) + a\varepsilon(1) - \varepsilon(2) \\ \vdots \\ -(-a)^{k-1}y(0) - \sum_{i=1}^{k-1} (-a)^{k-1-i} \varepsilon(i) \end{bmatrix}$$

Elle dépend du vecteur aléatoire  $\varepsilon(k)$  :  $\Phi(k-1)$  et  $\varepsilon(k)$  ne sont pas stochastiquement indépendants. A ce stade, le théorème 11.2 ne permet pas d'affirmer que

l'estimation par moindre carrés est biaisée ou non. Toutefois, la relation (11.29) établie dans la démonstration du théorème prend ici la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{\hat{\vartheta}(k)\} &= \vartheta - \mathcal{E}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{k-1} y(i)\varepsilon(i+1)}{\sum_{j=0}^{k-1} y^2(j)}\right\} \\ &= \vartheta - \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{E}\left\{\frac{y(i)\varepsilon(i+1)}{\sum_{j=0}^{k-1} y^2(j)}\right\}\end{aligned}\quad (11.32)$$

La somme constituant le second terme du membre de droite de cette égalité n'est généralement pas nulle, de sorte que  $\mathcal{E}\{\hat{\vartheta}(k)\} \neq \vartheta$ . Cependant, quand les erreurs d'équation  $\varepsilon(k)$  sont faibles vis-à-vis des échantillons  $y(k)$ , autrement dit lorsque le rapport signal sur bruit est favorable, nous remarquons que les termes de la somme sont petits, atténuant ainsi le biais.

On admet souvent que le processus stochastique  $\varepsilon(k)$  est blanc : sa valeur moyenne est nulle et les variables aléatoires obtenues en considérant le processus stochastique à deux instants différents sont indépendantes. De surcroît, ce processus stochastique est supposé être indépendant de  $y(0)$ . Dans un tel contexte, le dernier terme dans la somme du second membre de (11.32) est nul. En effet, il s'écrit :

$$\mathcal{E}\left\{\frac{y(k-1)\varepsilon(k)}{\sum_{j=0}^{k-1} y^2(j)}\right\}\quad (11.33)$$

Il découle de (11.31) que  $y(k-1)$  dépend de  $y(0), \varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(k-1)$ ; en outre  $\sum_{j=0}^{k-1} y^2(j)$  est pour les mêmes raisons aussi une fonction de  $y(0), \varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(k-1)$ . Les variables aléatoires  $y(k-1)/\sum_{j=0}^{k-1} y^2(j)$  et  $\varepsilon(k)$  sont par conséquent indépendantes et (11.33) devient :

$$\mathcal{E}\left\{\frac{y(k-1)\varepsilon(k)}{\sum_{j=0}^{k-1} y^2(j)}\right\} = \mathcal{E}\left\{\frac{y(k-1)}{\sum_{j=0}^{k-1} y^2(j)}\right\} \mathcal{E}\{\varepsilon(k)\} = 0$$

Malheureusement, les  $k-1$  autres termes de la somme sont en général différents de zéro et là encore  $\mathcal{E}\{\hat{\vartheta}(k)\} \neq \vartheta$ . ■

Dans certaines applications, le biais associé à la méthode des moindres carrés est tolérable. Par exemple, un régulateur dimensionné sur la base d'un modèle identifié biaisé peut être acceptable pour autant qu'il jouisse de marges de robustesse capables d'absorber les erreurs de modélisation. Dans d'autres situations, ce biais est rédhibitoire. Il est possible de modifier la méthode des moindres carrés (variables instrumentales où l'équation normale (11.28) est remaniée, modélisation affinée du vecteur d'erreurs) de telle sorte que l'estimateur soit *consistent* : le vecteur de paramètres estimé  $\hat{\vartheta}(k)$  tend vers le vecteur de paramètres  $\vartheta$  quand le nombre  $N$  de mesures tend vers l'infini. Toutefois, la notion de limite est ici mathématiquement délicate : il s'agit d'une convergence stochastique dont la description sort du cadre du présent texte.

## 11.5 Méthode des moindres carrés pondérés

Il est fréquemment souhaitable d'attribuer des pondérations différentes aux mesures accumulées. Par exemple, des mesures de piètre qualité doivent intervenir plus légèrement dans les calculs que celles qui sont très précises. Dans l'identification d'un processus dynamique, dont les caractéristiques s'altèrent lentement au cours du temps, les échantillons récents doivent clairement bénéficier d'un poids plus important que les anciens, porteurs d'informations périmées. En quelque sorte, il ne faut pas que le lointain passé sature le présent. Une première possibilité est un filtre à mémoire fixe ; une action plus douce découle d'une habile pondération.

Comment traduire mathématiquement ces désiderata ? Plutôt que le critère (11.24), il suffit de minimiser la fonction  $J : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  suivante :

$$\begin{aligned} J(\vartheta) &= \|\varepsilon(k)\|_{\mathbf{W}(k)}^2 \\ &= \varepsilon^T(k) \mathbf{W}(k) \varepsilon(k) \\ &= (\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\vartheta)^T \mathbf{W}(k) (\mathbf{y}(k) - \Phi(k)\vartheta) \end{aligned} \tag{11.34}$$

La **matrice de pondération**  $\mathbf{W}(k) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est symétrique (sans perte de généralité) et définie positive. Elle est souvent diagonale et ses éléments diagonaux attribuent des poids distincts aux composantes du vecteur d'erreurs  $\varepsilon(k)$ . L'entier  $k$  dans la matrice  $\mathbf{W}(k)$  souligne le fait qu'elle fixe la pondération à l'instant d'échantillonnage  $t_k = kh$ . Ainsi,  $J(\vartheta)$  n'est plus le carré de la norme euclidienne du vecteur d'erreurs, comme dans la section précédente, mais le carré de la norme induite par la matrice  $\mathbf{W}(k)$ . Cela revient à remplacer la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^N$  par une norme fixée par la matrice de pondération. Le théorème 11.1 doit être modifié comme suit.

**Théorème 11.3**

En supposant que la matrice d'observations  $\Phi(k)$  soit de rang  $p$  et que la matrice de pondération  $\mathbf{W}(k)$  soit symétrique et définie positive, le vecteur de paramètres estimé qui minimise (11.34) est unique et donné par :

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k) = (\Phi^T(k)\mathbf{W}(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)\mathbf{W}(k)\mathbf{y}(k) \quad (11.35)$$

**Démonstration**

La démonstration est identique à celle du théorème 11.1.

**EXEMPLE 11.10**

Reprendons le problème de l'estimation d'une constante (ex. 11.8), mais en admettant que cette constante se modifie lentement avec le temps. Il faut par conséquent imposer un poids plus grand aux récentes mesures qu'aux anciennes. Le critère ci-après est choisi pour refléter ce souhait :

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\vartheta}) &= \lambda^{N-1}\varepsilon^2(1) + \lambda^{N-2}\varepsilon^2(2) + \cdots + \lambda\varepsilon^2(N-1) + \varepsilon^2(N) \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}^T(N) \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^{N-1} & & & & 0 \\ & \lambda^{N-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(N)} \boldsymbol{\varepsilon}(N) \quad 0 < \lambda < 1 \end{aligned}$$

Vu que  $0 < \lambda < 1$ , les mesures récentes jouissent d'une pondération plus lourde que les anciennes : on réalise un oubli progressif, de type exponentiel, des échantillons périmés plutôt qu'un rejet pur et simple comme dans un filtre à mémoire fixe. La solution se détermine aisément via (11.35) :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(N) &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{N-1} & & & & 0 \\ & \lambda^{N-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{N-1} & & & & 0 \\ & \lambda^{N-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^{N-1}y(1) + \lambda^{N-2}y(2) + \cdots + \lambda y(N-1) + y(N)}{\lambda^{N-1} + \lambda^{N-2} + \cdots + \lambda + 1}$$

**EXEMPLE 11.11**

L'objectif de cet exemple est de mettre en lumière une déficience de la méthode de Levy (ex. 11.4), puis de la corriger.

La méthode de Levy standard exploite les moindres carrés non pondérés de la section précédente. Les paramètres  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$  et  $b_1$  de la fonction de transfert (11.11) sont donc calculés de façon à minimiser le carré de la norme euclidienne du vecteur d'erreurs  $\varepsilon(K)$ ; ce carré s'écrit, en tenant compte de la définition de  $\varepsilon(K)$  dans (11.15) :

$$\|\varepsilon(K)\|^2 = \sum_{i=1}^K (u_i^2 + v_i^2)$$

Ou, à l'aide de (11.14) :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(K)\|^2 &= \sum_{i=1}^K |\varepsilon_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^K |e_i|^2 |(\mathrm{j}\omega_i)^2 + a_1 \mathrm{j}\omega_i + a_2|^2 \end{aligned}$$

Les erreurs  $e_i$  seront d'autant plus faibles en module que les pulsations  $\omega_i$  seront élevées,  $i = 1, 2, \dots, K$ ; en effet, une importance accrue leur est alors octroyée dans  $\|\varepsilon(K)\|^2$  au travers du facteur  $|(\mathrm{j}\omega_i)^2 + a_1 \mathrm{j}\omega_i + a_2|^2$ . Si les pulsations  $\omega_i$  s'étendent sur une large plage, typiquement plusieurs décades, il découle de (11.12) que la méthode de Levy conduit à une mauvaise identification de la fonction de transfert aux basses pulsations. Cette approche n'est intéressante que pour une identification dans une plage fréquentielle restreinte.

Lorsque les mesures sont disponibles dans une large bande, il est possible de modifier la méthode de Levy en plaçant une pondération contrecarrant l'influence du polynôme  $(\mathrm{j}\omega_i)^2 + a_1 \mathrm{j}\omega_i + a_2$  formant le dénominateur de la fonction de transfert à identifier. La matrice de pondération choisie est :

$$\mathbf{W}(K) = \begin{bmatrix} \frac{1}{|(\mathrm{j}\omega_1)^2 + a_1 \mathrm{j}\omega_1 + a_2|^2} & 0 \\ & \frac{1}{|(\mathrm{j}\omega_2)^2 + a_1 \mathrm{j}\omega_2 + a_2|^2} \\ & \ddots \\ 0 & \frac{1}{|(\mathrm{j}\omega_K)^2 + a_1 \mathrm{j}\omega_K + a_2|^2} \end{bmatrix} \quad (11.36)$$

La fonction à minimiser est ainsi :

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(K)\|_{\mathbf{W}(K)}^2 &= \sum_{i=1}^K \frac{|\varepsilon_i|^2}{|(\mathrm{j}\omega_i)^2 + a_1 \mathrm{j}\omega_i + a_2|^2} \\ &= \sum_{i=1}^K |e_i|^2\end{aligned}$$

La même influence est par conséquent attribuée aux erreurs  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ . Il subsiste un problème de taille : la matrice  $\mathbf{W}(K)$  n'est pas connue puisqu'elle fait intervenir les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  à estimer ! Une approche itérative est adoptée dans la pratique. Initialement, la matrice  $\mathbf{W}(K)$  est prise égal à la matrice identité, ce qui revient à la méthode de Levy standard. Après calcul d'un premier jeu de paramètres,  $\mathbf{W}(K)$  est actualisé selon (11.36) et les moindres carrés pondérés livrent de nouveaux paramètres. Cette procédure est ensuite répétée jusqu'à convergence. ■

La philosophie de l'exemple 11.10 est adoptée pour l'identification des systèmes dynamiques légèrement non stationnaires, de préférence à un filtre à mémoire fixe. Les variations paramétriques doivent évidemment être beaucoup plus lentes que celles des autres variables entrant en jeu afin que l'approche par fonction de transfert conserve son sens. La matrice de pondération sélectionnée est :

$$\mathbf{W}(k) = \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} & & & & 0 \\ & \lambda^{k-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad 0 < \lambda < 1$$

Le critère à minimiser prend la forme :

$$\begin{aligned}J(\vartheta) &= \varepsilon^T(k)\mathbf{W}(k)\varepsilon(k) \\ &= \lambda^{k-1}\varepsilon^2(1) + \lambda^{k-2}\varepsilon^2(2) + \dots + \lambda\varepsilon^2(k-1) + \varepsilon^2(k)\end{aligned}$$

Grâce au nombre  $\lambda \in ]0, 1[$ , rencontré sous le nom de **facteur d'oubli**, les mesures récentes ont une plus grande influence que les anciennes. Ce rejet exponentiel des échantillons est ajusté par le biais de  $\lambda$  : plus  $\lambda$  diminue, plus l'oubli est précoce ; toutefois, une valeur trop faible de  $\lambda$  détruit la propriété de redondance inhérente aux moindres carrés. Le facteur  $\lambda$  est, dans la pratique, pris dans l'intervalle  $[0,95, 0,995]$ . Il existe de nombreuses autres politiques de gestion de l'oubli, qui sont documentées dans les ouvrages dévolus aux méthodes d'identification.

## 11.6 Méthode des moindres carrés récurrents

Le vecteur de mesures  $\mathbf{y}(k)$  regroupe  $N$  échantillons et l'équation (11.25) fournissant le vecteur de paramètres estimé manipule *en bloc* tous ces échantillons.

Dans la pratique, les mesures arrivent souvent séquentiellement en temps réel, par exemple à chaque coup d'horloge, plutôt que simultanément. Malheureusement, quand une nouvelle mesure est disponible, il faut pour en tirer profit recommencer intégralement tous les calculs selon la formule (11.25). Cette manière de procéder apparaît d'emblée comme du gaspillage. En particulier, le volume de calcul et la taille mémoire augmentent au fur et à mesure que les échantillons s'accumulent. Est-il possible d'organiser l'algorithme de telle sorte que les résultats obtenus sur la base de  $N$  observations puissent être explicitement utilisés pour en déduire le vecteur de paramètres estimé au moyen de  $N + 1$  observations ? Plutôt que de traiter en bloc toutes les mesures à chaque instant d'échantillonnage, nous désirons donc développer un algorithme de *mise à jour* incorporant l'information qu'il est possible d'extraire d'un nouvel échantillon. Cet algorithme devra bien sûr être doté d'une initialisation appropriée.

Soit la régression linéaire (11.1) ; le vecteur de paramètres estimé  $\hat{\vartheta}(k)$  découle du filtre (11.25). On admet pour simplifier que la nouvelle observation  $y(k+1) \in \mathbb{R}$  est disponible à l'instant d'échantillonnage  $t_{k+1} = (k+1)h$ . Avec cette nouvelle mesure, la régression linéaire devient :

$$\mathbf{y}(k+1) = \Phi(k+1)\vartheta + \varepsilon(k+1) \quad (11.37)$$

Le vecteur de paramètres estimé  $\hat{\vartheta}(k+1)$ , qui minimise  $J(\vartheta) = \|\varepsilon(k+1)\|^2$ , s'écrit :

$$\hat{\vartheta}(k+1) = (\Phi^T(k+1)\Phi(k+1))^{-1}\Phi^T(k+1)\mathbf{y}(k+1) \quad (11.38)$$

Plutôt que d'employer (11.38), qui met en jeu toutes les composantes de  $\mathbf{y}(k+1)$ , exploitons le fait que  $\hat{\vartheta}(k)$  soit disponible. Les quantités apparaissant dans (11.37) sont supposées être organisées de la manière suivante, où  $\phi(k+1) \in \mathbb{R}^p$  et  $\varepsilon(k+1) \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \\ \Phi(k+1) &= \begin{bmatrix} \Phi(k) \\ \phi^T(k+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times p} \\ \varepsilon(k+1) &= \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \varepsilon(k+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \end{aligned}$$

L'idée-force sur laquelle se fonde la mise au point de l'algorithme récurrent est de conserver scrupuleusement cette partition tout au long des développements. On démontre tout d'abord le théorème suivant, appelé **lemme d'inversion matricielle** ; ce résultat joue un rôle central en théorie de l'estimation.

**Théorème 11.4**

*Soient  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  des matrices inversibles. Alors la matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$  est inversible et :*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

**Démonstration**

Effectuons la multiplication :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} + \mathbf{BCD}) \left( \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \right) \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{BCDA}^{-1} \\ &\quad - \mathbf{BCDA}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1} - (\mathbf{B} + \mathbf{BCDA}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1} - \mathbf{BC}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{BCDA}^{-1} - \mathbf{BCDA}^{-1} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

De la même façon, il est facile de prouver que :

$$\left( \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{BCD}) = \mathbf{I}$$

**Théorème 11.5**

*En supposant que la matrice d'observations  $\Phi(k)$  soit de rang  $p$ , le vecteur de paramètres estimé vérifie l'équation récurrente :*

$$\widehat{\vartheta}(k+1) = \widehat{\vartheta}(k) + \mathbf{K}(k+1) \left( y(k+1) - \phi^T(k+1)\widehat{\vartheta}(k) \right) \quad (11.39)$$

Avec :

$$\mathbf{K}(k+1) = \frac{\mathbf{P}(k)\phi(k+1)}{1 + \phi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\phi(k+1)} \in \mathbb{R}^p \quad (11.40)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\phi^T(k+1))\mathbf{P}(k) \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (11.41)$$

**Démonstration**

La matrice  $\Phi(k) \in \mathbb{R}^{N \times p}$  est de rang  $p$  d'après l'hypothèse ; la matrice  $\Phi(k+1) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times p}$ , obtenue à partir de  $\Phi(k)$  en lui adjoignant la ligne  $\phi^T(k+1)$ , est par conséquent elle aussi de rang  $p$ . Le théorème 11.1 peut donc être utilisé

pour évaluer  $\widehat{\vartheta}(k+1)$ . Pour alléger l'écriture, l'argument  $k$  de  $\mathbf{y}(k)$  et de  $\Phi(k)$ , de même que l'argument  $k+1$  de  $\phi^T(k+1)$ , sont omis :

$$\begin{aligned}\widehat{\vartheta}(k+1) &= \left( \begin{bmatrix} \Phi \\ \phi^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi \\ \phi^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \Phi \\ \phi^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y(k+1) \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} \Phi^T & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \phi^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^T & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y(k+1) \end{bmatrix} \\ &= (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} (\Phi^T \mathbf{y} + \phi y(k+1)) \\ &= (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} + (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \phi y(k+1) \\ &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} + (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \phi y(k+1) \\ &\quad + \left( (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} - (\Phi^T \Phi)^{-1} \right) \Phi^T \mathbf{y}\end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation (11.25) :

$$\begin{aligned}\widehat{\vartheta}(k+1) &= \widehat{\vartheta}(k) + (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \phi y(k+1) \\ &\quad + \left( (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} - (\Phi^T \Phi)^{-1} \right) \Phi^T \mathbf{y}\end{aligned}\tag{11.42}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}&\left( (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} - (\Phi^T \Phi)^{-1} \right) \Phi^T \mathbf{y} \\ &= (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \left( \mathbf{I} - (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T) (\Phi^T \Phi)^{-1} \right) \Phi^T \mathbf{y} \\ &= (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{I} - \phi \phi^T (\Phi^T \Phi)^{-1} \right) \Phi^T \mathbf{y} \\ &= -(\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \phi \phi^T (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \\ &= -(\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \phi \phi^T \widehat{\vartheta}(k)\end{aligned}\tag{11.43}$$

Par définition :

$$\mathbf{K}(k+1) = (\Phi^T \Phi + \phi \phi^T)^{-1} \phi \in \mathbb{R}^p\tag{11.44}$$

D'où, en combinant (11.42), (11.43) et (11.44) :

$$\begin{aligned}\widehat{\vartheta}(k+1) &= \widehat{\vartheta}(k) + \mathbf{K}(k+1)y(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\phi^T \widehat{\vartheta}(k) \\ &= \widehat{\vartheta}(k) + \mathbf{K}(k+1)(y(k+1) - \phi^T \widehat{\vartheta}(k))\end{aligned}$$

La première égalité du théorème est démontrée.

On pose :

$$\mathbf{P}(k) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (11.45)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1) &= (\Phi^T(k+1)\Phi(k+1))^{-1} = \left( \begin{bmatrix} \Phi \\ \phi^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi \\ \phi^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= (\Phi^T \Phi + \phi\phi^T)^{-1} \end{aligned} \quad (11.46)$$

Avec  $\mathbf{A} = \Phi^T \Phi$ ,  $\mathbf{B} = \phi$ ,  $\mathbf{C} = 1$  et  $\mathbf{D} = \phi^T$ , le lemme d'inversion matricielle permet de transformer l'inversion matricielle (11.46) en une *division scalaire* :

$$\begin{aligned} &(\Phi^T \Phi + \phi\phi^T)^{-1} \\ &= (\Phi^T \Phi)^{-1} - (\Phi^T \Phi)^{-1} \phi \frac{1}{1 + \phi^T (\Phi^T \Phi)^{-1} \phi} \phi^T (\Phi^T \Phi)^{-1} \end{aligned} \quad (11.47)$$

Le nombre  $1 + \phi^T (\Phi^T \Phi)^{-1} \phi$  est évidemment plus grand ou égal à 1 ; par conséquent, son inverse existe. En portant (11.45) dans (11.47) et le résultat dans (11.46) :

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k) - \frac{\mathbf{P}(k)\phi}{1 + \phi^T \mathbf{P}(k)\phi} \phi^T \mathbf{P}(k) \quad (11.48)$$

La définition (11.44) de  $\mathbf{K}(k+1)$  et (11.46) impliquent :

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1)\phi \quad (11.49)$$

En insérant (11.48) dans (11.49) :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k+1) &= \left( \mathbf{P}(k) - \frac{\mathbf{P}(k)\phi}{1 + \phi^T \mathbf{P}(k)\phi} \phi^T \mathbf{P}(k) \right) \phi \\ &= \mathbf{P}(k)\phi - \frac{\mathbf{P}(k)\phi}{1 + \phi^T \mathbf{P}(k)\phi} \phi^T \mathbf{P}(k)\phi \\ &= \mathbf{P}(k)\phi \left( 1 - \frac{\phi^T \mathbf{P}(k)\phi}{1 + \phi^T \mathbf{P}(k)\phi} \right) \\ &= \frac{\mathbf{P}(k)\phi}{1 + \phi^T \mathbf{P}(k)\phi} (1 + \phi^T \mathbf{P}(k)\phi - \phi^T \mathbf{P}(k)\phi) \\ &= \frac{\mathbf{P}(k)\phi}{1 + \phi^T \mathbf{P}(k)\phi} \end{aligned} \quad (11.50)$$

C'est la relation (11.40). Finalement, substituons (11.50) dans (11.48) pour aboutir à (11.41) :

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k) - \mathbf{K}(k+1)\phi^T \mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\phi^T) \mathbf{P}(k) \quad \blacksquare$$

L'algorithme des moindres carrés récurrents, selon le théorème 11.5, n'est valide que si le rang de la matrice d'observations  $\Phi(k)$  vaut  $p$ . Au démarrage,  $\Phi(k)$  ne possède même pas  $p$  lignes, violant *ipso facto* cette hypothèse. Soit  $k_0$  un entier tel que le rang de  $\Phi(k_0)$  est  $p$ . Alors, d'après (11.45) et le théorème 11.1 :

$$\mathbf{P}(k_0) = (\Phi^T(k_0)\Phi(k_0))^{-1} \quad (11.51)$$

$$\hat{\vartheta}(k_0) = \mathbf{P}(k_0)\Phi^T(k_0)\mathbf{y}(k_0) \quad (11.52)$$

Muni de ces conditions initiales, l'algorithme récurrent peut être employé avec  $k = k_0, k_0 + 1, \dots$

### EXEMPLE 11.12

On considère la régression linéaire :

$$\mathbf{y}(3) = \Phi(3)\vartheta + \varepsilon(3)$$

Où :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(3) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \Phi(3) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & y(3) &= 2 & \Phi(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \phi^T(3) &= [1 \ 1] \end{aligned}$$

La matrice  $\Phi(2)$  est de rang 2. Calculons l'initialisation du filtre récurrent qui livrera  $\hat{\vartheta}(3)$  par mise à jour de  $\hat{\vartheta}(2)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(2) &= (\Phi^T(2)\Phi(2))^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \hat{\vartheta}(2) &= \mathbf{P}(2)\Phi^T(2)\mathbf{y}(2) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les équations (11.39) et (11.40) donnent :

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}(3) &= \hat{\vartheta}(2) + \mathbf{K}(3)(y(3) - \phi^T(3)\hat{\vartheta}(2)) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{K}(3) \left( 2 - [1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(3) &= \frac{\mathbf{P}(2)\phi(3)}{1 + \phi^T(3)\mathbf{P}(2)\phi(3)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{1 + [1 \ 1] \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \left( 2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Cette valeur est corroborée par la formule non récurrente :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(3) &= (\Phi^T(3)\Phi(3))^{-1}\Phi^T(3)\mathbf{y}(3) \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Les initialisations (11.51) et (11.52) du filtre récurrent sont fournies par l'algorithme non récurrent. Cette manière de procéder est malcommode, car elle exige la commutation d'une structure de l'estimateur à une autre. Le théorème suivant permet, au prix d'une erreur parfaitement maîtrisée, de lancer d'emblée l'algorithme récurrent. Sans perte de généralité, nous supposons que le premier échantillon placé dans le vecteur de mesures est pris à l'instant d'échantillonnage  $h$ , les suivants étant obtenus aux temps  $2h, 3h, \dots, kh, kh + h$ .

### Théorème 11.6

*Soit  $\mathbf{P}(0)$  une matrice symétrique définie positive. Avec les conditions initiales  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(0)$  et  $\mathbf{P}(0)$ , l'algorithme des moindres carrés récurrents (11.39), (11.40) et (11.41) utilisé aux instants d'échantillonnage  $0, h, 2h, \dots, kh$  génère le vecteur de paramètres estimé :*

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k+1) &= (\mathbf{P}^{-1}(0) + \Phi^T(k+1)\Phi(k+1))^{-1} \\ &\quad \cdot (\mathbf{P}^{-1}(0)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(0) + \Phi^T(k+1)\mathbf{y}(k+1)) \end{aligned}$$

### Démonstration

Avant de s'attaquer à la démonstration proprement dite, quelques équations établies précédemment sont remaniées sous l'hypothèse habituelle que la matrice  $\Phi(k)$  est de rang  $p$ .

L'équation (11.46) s'écrit :

$$\mathbf{P}(k+1) = (\Phi^T(k)\Phi(k) + \phi(k+1)\phi^T(k+1))^{-1}$$

Ou :

$$\mathbf{P}^{-1}(k+1) = \Phi^T(k)\Phi(k) + \phi(k+1)\phi^T(k+1) \quad (11.53)$$

En employant (11.45) :

$$\mathbf{P}^{-1}(k+1) = \mathbf{P}^{-1}(k) + \phi(k+1)\phi^T(k+1) \quad (11.54)$$

Par ailleurs, définissons :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}^{-1}(k+1)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k+1) \in \mathbb{R}^p \quad (11.55)$$

Ou :

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k+1) = \mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \quad (11.56)$$

En portant (11.39) dans (11.55) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{P}^{-1}(k+1) \left( \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k) + \mathbf{K}(k+1)(y(k+1) - \boldsymbol{\phi}^T(k+1)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k)) \right) \\ &= \mathbf{P}^{-1}(k+1)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k) \\ &\quad + \mathbf{P}^{-1}(k+1)\mathbf{K}(k+1)(y(k+1) - \boldsymbol{\phi}^T(k+1)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k)) \end{aligned} \quad (11.57)$$

L'égalité (11.49) montre que  $\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1)\boldsymbol{\phi}(k+1)$ , équivalente à  $\mathbf{P}^{-1}(k+1)\mathbf{K}(k+1) = \boldsymbol{\phi}(k+1)$ ; (11.57) devient ainsi :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}^{-1}(k+1)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k) + \boldsymbol{\phi}(k+1)(y(k+1) - \boldsymbol{\phi}^T(k+1)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k))$$

D'où, en exploitant (11.53) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= (\boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k) + \boldsymbol{\phi}(k+1)\boldsymbol{\phi}^T(k+1))\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k) \\ &\quad + \boldsymbol{\phi}(k+1)(y(k+1) - \boldsymbol{\phi}^T(k+1)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k)) \\ &= \boldsymbol{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k) + \boldsymbol{\phi}(k+1)y(k+1) \end{aligned}$$

En vertu des définitions (11.45) et (11.55) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{P}^{-1}(k)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k) + \boldsymbol{\phi}(k+1)y(k+1) \\ &= \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\phi}(k+1)y(k+1) \end{aligned} \quad (11.58)$$

Afin de démontrer le théorème, les relations (11.54) et (11.58) sont mises à profit *formellement* avec  $k = 0, 1, \dots$ ; comme le rang de la matrice  $\boldsymbol{\Phi}(k)$  ne peut pas être égal à  $p$  dans les premiers instants d'échantillonnage, en tout cas pas pour  $k < p$ , il importe de vérifier avec grand soin que toutes les expressions entrant en jeu sont parfaitement définies.

Avec  $k = 0$ , (11.54) s'écrit :

$$\mathbf{P}^{-1}(1) = \mathbf{P}^{-1}(0) + \boldsymbol{\phi}(1)\boldsymbol{\phi}^T(1) \quad (11.59)$$

La matrice  $\mathbf{P}(0)$  est définie positive par hypothèse, donc inversible, si bien que le membre de droite de (11.59) a un sens. De surcroît,  $\mathbf{P}^{-1}(0)$  est définie positive, de sorte que  $\mathbf{P}^{-1}(0) + \boldsymbol{\phi}(1)\boldsymbol{\phi}^T(1)$  est définie positive, par conséquent inversible. En d'autres termes,  $\mathbf{P}^{-1}(1)$  est définie positive et inversible. (On signale au passage que les lignes de la matrice  $\boldsymbol{\Phi}(k+1)$  sont maintenant dénotées  $\boldsymbol{\phi}^T(1), \boldsymbol{\phi}^T(2), \dots, \boldsymbol{\phi}^T(k+1)$  et non pas  $\boldsymbol{\phi}_1^T(k+1), \boldsymbol{\phi}_2^T(k+1), \dots, \boldsymbol{\phi}_{N+1}^T(k+1)$  comme dans la section 11.2.) Avec  $k = 1$ , (11.54) donne :

$$\mathbf{P}^{-1}(2) = \mathbf{P}^{-1}(1) + \boldsymbol{\phi}(2)\boldsymbol{\phi}^T(2) \quad (11.60)$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus,  $\mathbf{P}^{-1}(2)$  est définie positive et inversible. En substituant (11.59) dans (11.60) :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1}(2) &= \mathbf{P}^{-1}(0) + \boldsymbol{\phi}(1)\boldsymbol{\phi}^T(1) + \boldsymbol{\phi}(2)\boldsymbol{\phi}^T(2) \\ &= \mathbf{P}^{-1}(0) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(1) & \boldsymbol{\phi}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T(1) \\ \boldsymbol{\phi}^T(2) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}^{-1}(0) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T(1) \\ \boldsymbol{\phi}^T(2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T(1) \\ \boldsymbol{\phi}^T(2) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}^{-1}(0) + \boldsymbol{\Phi}^T(2)\boldsymbol{\Phi}(2)\end{aligned}$$

En poursuivant de la sorte :

$$\mathbf{P}^{-1}(k+1) = \mathbf{P}^{-1}(0) + \boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\boldsymbol{\Phi}(k+1) \quad (11.61)$$

D'autre part, en utilisant formellement (11.58) avec  $k = 0$  et la condition initiale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}^{-1}(0)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(0)$  :

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\phi}(1)y(1)$$

Et avec  $k = 1$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(2) &= \mathbf{x}(1) + \boldsymbol{\phi}(2)y(2) = \mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\phi}(1)y(1) + \boldsymbol{\phi}(2)y(2) \\ &= \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(1) & \boldsymbol{\phi}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T(1) \\ \boldsymbol{\phi}^T(2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}^T(2)\mathbf{y}(2)\end{aligned}$$

En continuant :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\mathbf{y}(k+1) \\ &= \mathbf{P}^{-1}(0)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(0) + \boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\mathbf{y}(k+1)\end{aligned} \quad (11.62)$$

Incorporons finalement (11.61) et (11.62) dans (11.56) :

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k+1) &= (\mathbf{P}^{-1}(0) + \boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\boldsymbol{\Phi}(k+1))^{-1} \\ &\quad \cdot (\mathbf{P}^{-1}(0)\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(0) + \boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\mathbf{y}(k+1))\end{aligned}$$

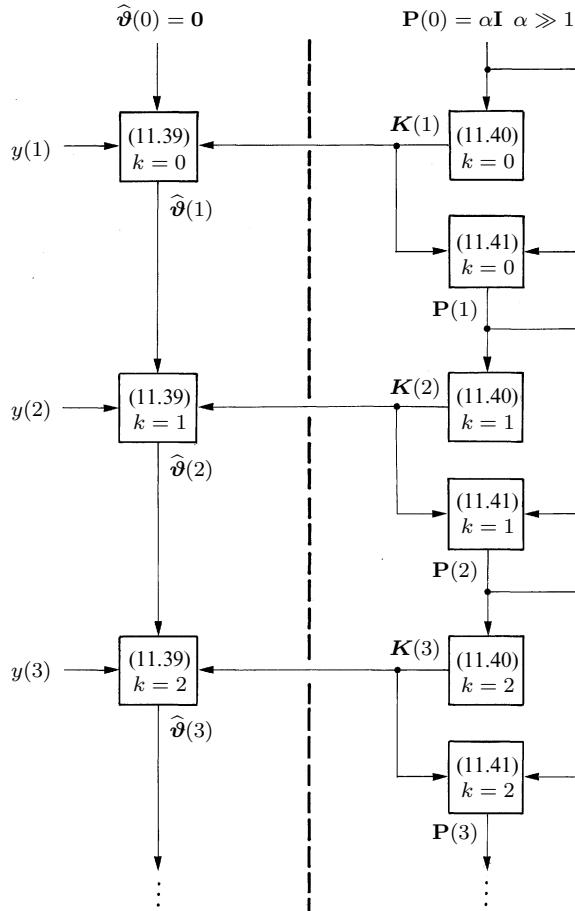
Le théorème est démontré. ■

Le vecteur de paramètres estimé exact est, selon le théorème 11.1 :

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(k+1) = (\boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\boldsymbol{\Phi}(k+1))^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T(k+1)\mathbf{y}(k+1)$$

Le vecteur de paramètres estimé d'après le théorème 11.6 peut être rendu aussi proche que désiré de la valeur exacte en sélectionnant  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(0) = \mathbf{0}$  et une matrice  $\mathbf{P}^{-1}(0)$  suffisamment petite. En pratique, on choisit  $\mathbf{P}(0) = \alpha\mathbf{I}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$  est

beaucoup plus grand que 1, par exemple  $\alpha = 10^4$ . Alors, doté de l'initialisation  $\hat{\vartheta}(0) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}$ , l'algorithme constitué des équations (11.39), (11.40) et (11.41) peut être employé aux coups d'horloge  $k = 0, 1, 2, \dots$  Il est illustré dans la figure 11.14.



**Fig. 11.14** Algorithme des moindres carrés récurrents; les numéros entre parenthèses se réfèrent aux équations du théorème 11.5; la sortie de l'estimateur est la suite des vecteurs de paramètres estimés  $\hat{\vartheta}(1), \hat{\vartheta}(2), \hat{\vartheta}(3), \dots$

Nous remarquons dans la figure 11.14 que les mesures  $y(1), y(2), y(3), \dots$  ne franchissent pas la frontière en traitillé; elles n'interviennent donc pas dans l'évaluation de  $\mathbf{K}(1), \mathbf{P}(1), \mathbf{K}(2), \mathbf{P}(2), \mathbf{K}(3), \mathbf{P}(3), \dots$  Il est ainsi possible de calculer ces quantités, et de mémoriser  $\mathbf{K}(1), \mathbf{K}(2), \mathbf{K}(3), \dots$ , avant le démarrage de l'algorithme, réduisant considérablement la charge en temps réel (par contre, la taille

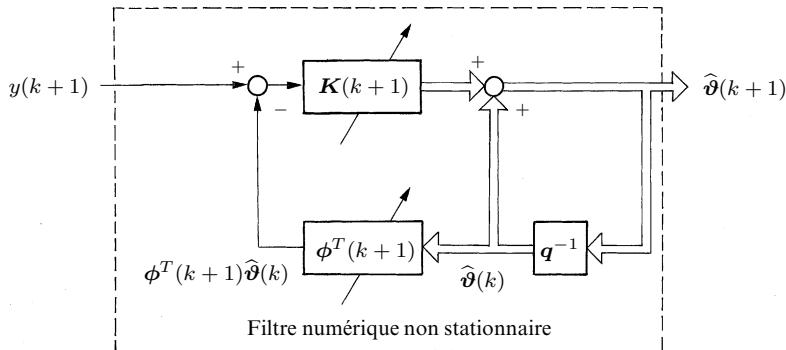
mémoire est augmentée). Cette façon de procéder est exclue dans l'identification des processus dynamiques, où les lignes de la matrice d'observations renferment des échantillons récoltés en temps réel.

La mise à jour (11.39) mérite d'être interprétée physiquement. Pour ce faire, on écrit la dernière ligne de la régression linéaire (11.37) :

$$y(k+1) = \phi^T(k+1)\vartheta + \varepsilon(k+1) \quad (11.63)$$

Au vu de (11.63), le terme  $\phi^T(k+1)\hat{\vartheta}(k)$  entrant en jeu dans (11.39) peut être considéré comme la *prévision* à l'instant d'échantillonnage  $kh + h$ , en se fondant sur l'estimation  $\hat{\vartheta}(k)$  au temps  $kh$ , de la mesure réelle  $y(k+1)$ . L'estimation  $\hat{\vartheta}(k+1)$  à l'instant  $kh + h$  s'obtient à partir de  $\hat{\vartheta}(k)$  par ajout de la correction  $\mathbf{K}(k+1)(y(k+1) - \phi^T(k+1)\hat{\vartheta}(k))$ ; cette correction est proportionnelle à l'écart  $y(k+1) - \phi^T(k+1)\hat{\vartheta}(k)$  entre l'échantillon réel  $y(k+1)$  et sa prévision  $\phi^T(k+1)\hat{\vartheta}(k)$ . Cet écart quantifie l'information apportée à la prévision  $\phi^T(k+1)\hat{\vartheta}(k)$  pour générer la nouvelle mesure  $y(k+1)$ ; il est pour cette raison appelé innovations (sect. 11.3).

La mise à jour (11.39) peut aussi être regardée comme un *filtre numérique* qui, excité par la mesure  $y(k+1)$ , génère le vecteur de paramètres estimé  $\hat{\vartheta}(k+1)$ . Ce filtre est non stationnaire; il est même non linéaire quand la matrice d'observations inclut des mesures, comme dans l'identification des systèmes dynamiques (fig. 11.15).



**Fig. 11.15** Algorithme des moindres carrés récurrents vu comme un filtre numérique non stationnaire ; les lignes doubles désignent des signaux vectoriels ; les flèches obliques traversant  $\mathbf{K}(k+1)$  et  $\phi^T(k+1)$  soulignent le fait que ces quantités évoluent au cours du temps, provoquant la non-stationnarité du filtre ; finalement, l'opérateur retard vectoriel  $q^{-1}$  est défini par  $q^{-1}\{\hat{\vartheta}(k+1)\} = \{\hat{\vartheta}(k)\}$ .

**EXEMPLE 11.13**

Développons la forme récurrente du filtre élaborant l'estimation d'un paramètre constant (ex. 11.8). La régression linéaire s'écrit :

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vartheta + \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \\ \varepsilon(k+1) \end{bmatrix}$$

Vu l'extrême simplicité de cette application, il est possible d'évaluer  $P(k+1) \in \mathbb{R}$  directement selon sa définition (11.45), plutôt que d'après (11.41) :

$$P(k+1) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{k+1}$$

D'où, à l'aide de (11.49) :

$$K(k+1) = \frac{1}{k+1} \quad (11.64)$$

En portant ces résultats dans (11.39) :

$$\hat{\vartheta}(k+1) = \hat{\vartheta}(k) + \frac{1}{k+1} (y(k+1) - \hat{\vartheta}(k))$$

Et, finalement :

$$\hat{\vartheta}(k+1) = \frac{k}{k+1} \hat{\vartheta}(k) + \frac{1}{k+1} y(k+1) \quad (11.65)$$

Il s'agit d'un filtre numérique non stationnaire, initialisé avec  $\hat{\vartheta}(1) = y(1)$  (le rang de la matrice d'observations vaut toujours 1) et exploité avec  $k = 1, 2, \dots$ . On peut aussi l'utiliser avec la condition initiale  $\hat{\vartheta}(k) = 0$  et  $k = 0, 1, \dots$ . Une comparaison avec l'estimateur de l'exemple 11.8 révèle parfaitement le caractère récurrent, la mise à jour de l'information, intrinsèque à (11.65).

La formule (11.64) montre que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(k+1) = 0$$

Le gain multipliant les innovations  $y(k+1) - \hat{\vartheta}(k)$  tend vers zéro quand le nombre de mesures tend vers l'infini. Dans les faits, les mesures fraîches ne sont plus prises en compte à partir d'un certain moment : le passé sature le présent. Un moyen d'éviter ce problème consiste à pondérer les mesures, par exemple via un oubli exponentiel de celles-ci.

## 11.7 Méthode des moindres carrés pondérés récurrents

La version récurrente de la méthode des moindres carrés pondérés, étudiée dans la section 11.5, fait l'objet du théorème suivant. La matrice de pondération  $\mathbf{W}(k+1)$ , intervenant dans la fonction  $J(\vartheta) = \|\varepsilon(k+1)\|_{\mathbf{W}(k+1)}^2$  à minimiser, est supposée *diagonale* et définie positive ; elle est structurée comme suit, où  $w(k+1) \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{W}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & w(k+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$$

### Théorème 11.7

En supposant que la matrice d'observations  $\Phi(k)$  soit de rang  $p$  et que la matrice de pondération  $\mathbf{W}(k+1)$  soit diagonale et définie positive, le vecteur de paramètres estimé vérifie l'équation récurrente (11.39), avec :

$$\mathbf{K}(k+1) = \frac{\mathbf{P}(k)\phi(k+1)}{\frac{1}{w(k+1)} + \phi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\phi(k+1)} \in \mathbb{R}^p \quad (11.66)$$

La matrice  $\mathbf{P}(k)$  est fournie par (11.41).

### Démonstration

La démonstration est identique à celle du théorème 11.5. ■

En appelant  $k_0$  un entier tel que le rang de la matrice  $\Phi(k_0)$  est  $p$ , l'algorithme récurrent (11.39), (11.66) et (11.41) peut être employé successivement avec  $k = k_0, k_0 + 1, \dots$  en partant des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k_0) &= (\Phi^T(k_0)\mathbf{W}(k_0)\Phi(k_0))^{-1} \\ \widehat{\vartheta}(k_0) &= \mathbf{P}(k_0)\Phi^T(k_0)\mathbf{W}(k_0)\mathbf{y}(k_0) \end{aligned}$$

Comme dans la section 11.6, il est possible d'utiliser d'emblée, aux coups d'horloge  $k = 0, 1, 2, \dots$ , l'algorithme du théorème 11.7 en l'équipant des conditions initiales  $\widehat{\vartheta}(0) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{P}(0) = \alpha\mathbf{I}$ , où le nombre  $\alpha$  est beaucoup plus grand que 1.

Dans le contexte de l'identification des processus dynamiques, la matrice de pondération  $\mathbf{W}(k)$  est donnée par :

$$\mathbf{W}(k) = \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} & & & & \mathbf{0} \\ & \lambda^{k-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \lambda & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad 0 < \lambda < 1$$

Et la matrice de pondération  $\mathbf{W}(k+1)$  à l'instant d'échantillonnage  $t_{k+1} = (k+1)h$  s'écrit :

$$\mathbf{W}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda^k & & & & & 0 \\ & \lambda^{k-1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda^2 & & \\ 0 & & & & \lambda & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$$

Afin de faire ressortir  $\mathbf{W}(k)$  dans  $\mathbf{W}(k+1)$ , cette dernière matrice est mise sous la forme suivante :

$$\mathbf{W}(k+1) = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} & & & & & 0 \\ & \lambda^{k-2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda & & \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{W}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (11.67)$$

L'algorithme des moindres carrés pondérés récurrents avec facteur d'oubli est résumé dans le théorème suivant.

### Théorème 11.8

*En supposant que la matrice d'observations  $\Phi(k)$  soit de rang  $p$  et que la matrice de pondération  $\mathbf{W}(k+1)$  soit fournie par (11.67), le vecteur de paramètres estimé vérifie l'équation récurrente (11.39), avec :*

$$\mathbf{K}(k+1) = \frac{\mathbf{P}(k)\phi(k+1)}{\lambda + \phi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\phi(k+1)} \in \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{P}(k+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\phi^T(k+1)) \frac{\mathbf{P}(k)}{\lambda} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

### Démonstration

Il suffit de reprendre point par point la démonstration du théorème 11.5 avec la matrice de pondération (11.67) pour aboutir au résultat désiré.

#### EXEMPLE 11.14

Soit l'entraînement en vitesse de l'exemple 11.5 :

$$H(z) = \frac{b}{z+a}$$



Le paramètre  $a$  est sujet à de légères mais brusques fluctuations dans l'intervalle  $[-1, -0,9]$  et  $b$  dans  $[0,095, 0,1]$ . La figure 11.16 montre la tension électrique  $u(k)$  injectée et la vitesse de rotation  $y(k)$  qui en résulte. Le vecteur de paramètres  $\vartheta$  et son estimation  $\hat{\vartheta}(k)$  s'écrivent, respectivement :

$$\vartheta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \hat{\vartheta}(k) = \begin{bmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{bmatrix}$$

Ils apparaissent tous deux dans la figure 11.16, dans les cas  $\lambda = 1$  (il n'y a pas d'oubli des anciennes mesures),  $\lambda = 0,95$  et  $\lambda = 0,85$ . Nous remarquons que l'oubli exponentiel des anciennes mesures permet de traquer des paramètres évoluant dans le temps.

## 11.8 Problèmes

**11.8.1** Soit un moteur à courant continu et à excitation séparée entraînant une charge. La résistance  $R$  du circuit d'induit est connue. Le courant d'induit  $i(t)$ , la tension d'alimentation  $u(t)$  et la vitesse de rotation  $\omega(t)$  sont mesurés. Imaginer une méthode d'identification de la constante  $K\Phi$  du moteur. Est-il possible d'estimer le couple résistant à partir de  $K\Phi$  ?

**11.8.2** Soit un moteur à courant continu et à excitation séparée entraînant une charge. Le courant d'induit  $i(t)$ , la tension d'alimentation  $u(t)$  et la vitesse de rotation  $\omega(t)$  sont mesurés. Imaginer une méthode d'identification de la constante  $K\Phi$  du moteur et de la résistance  $R$  du circuit d'induit du moteur.

**11.8.3** Soit un entraînement électrique en vitesse (ex. 1.14) :

$$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1}$$

Ce processus est soumis à un saut unité ; on mesure la sortie à un temps donné  $t_0$  et la vitesse permanente  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ . Calculer  $\gamma$  et  $\tau$  à partir de ces deux mesures. Appliquer les résultats obtenus dans le cas  $y(2) = 30$  rad/s et  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 70$  rad/s. Comment améliorer l'estimation des paramètres  $\gamma$  et  $\tau$  ?

**11.8.4** Soit un processus à identifier échantillonné comportant une double intégration. Comment tirer profit de cette connaissance a priori ?

**11.8.5** Un entraînement électrique de position par moteur *brushless* commandé en courant se comporte approximativement comme un double intégrateur analogique :

$$G(s) = \frac{\gamma}{s^2} \quad \gamma > 0$$

Déterminer sa fonction de transfert échantillonnée. Exploiter les connaissances a priori afin d'identifier la constante  $\gamma$ .

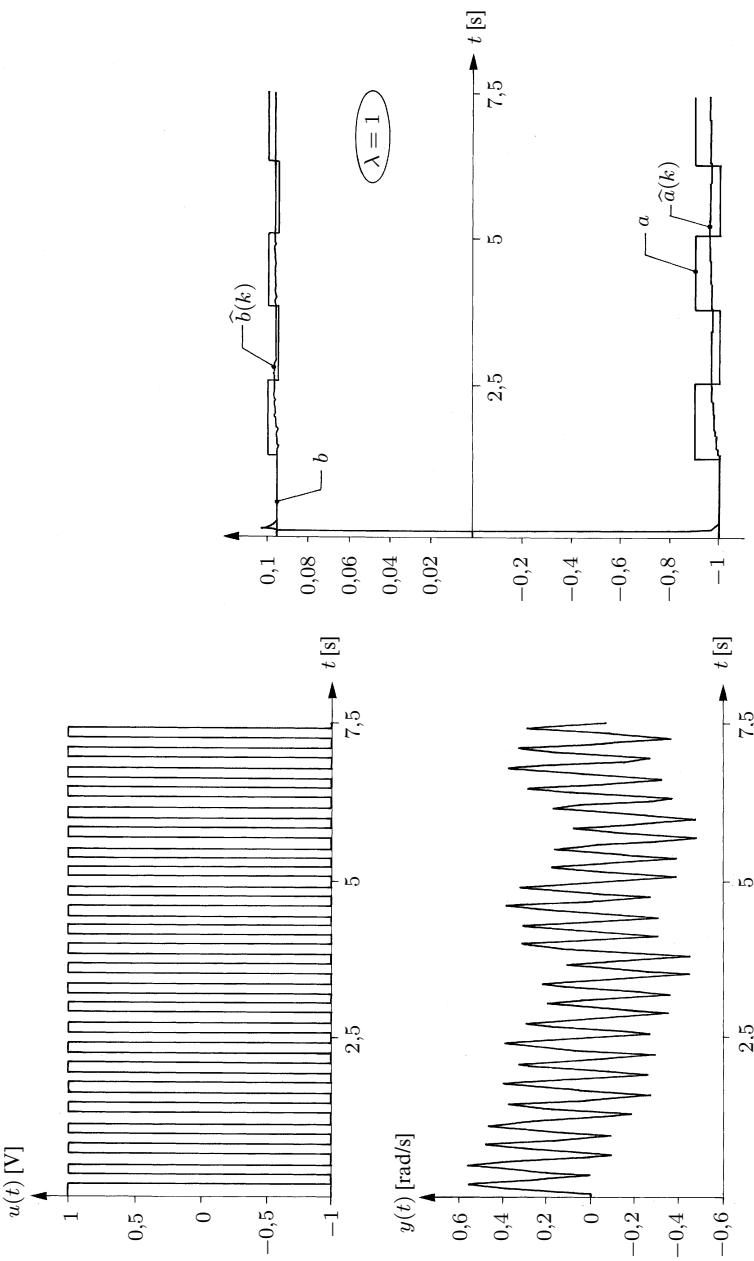


Fig. 11.16 Entrée et sortie du système à identifier ; paramètres et paramètres estimés avec  $\lambda = 1, 0,95, 0,85$ .

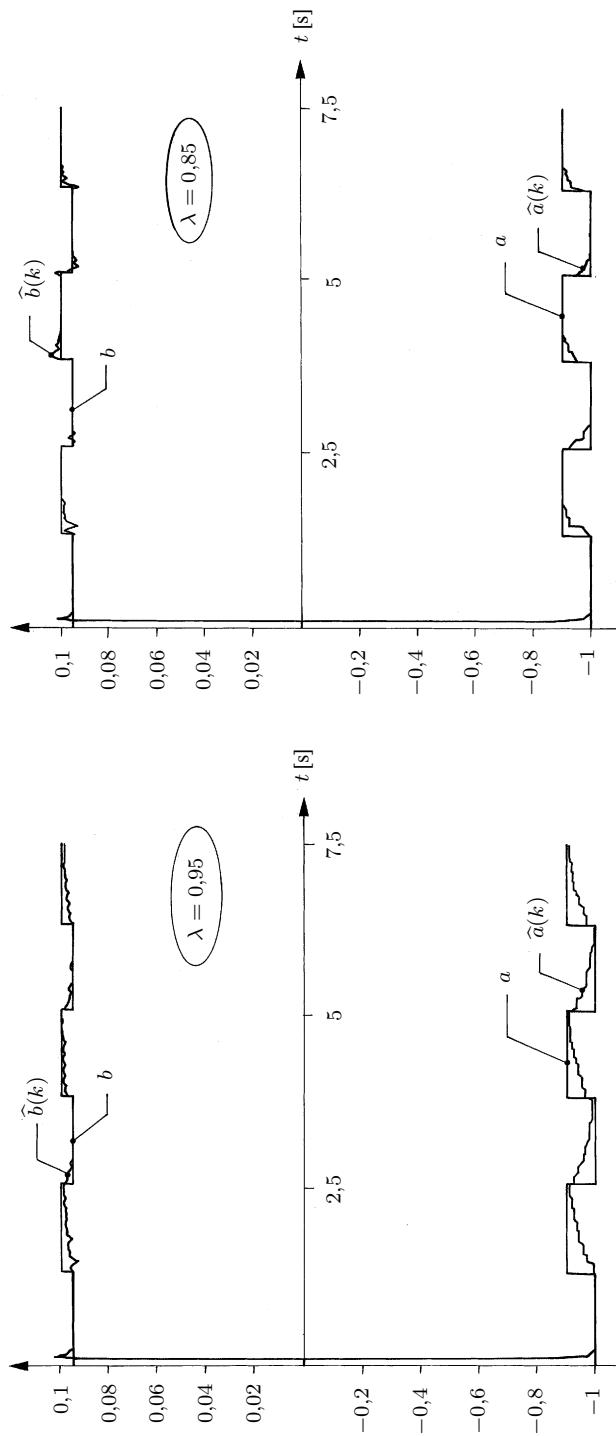


Fig. 11.16 (Suite et fin.)

**11.8.6** Soit un système caractérisé par l'équation aux différences :

$$\begin{aligned}y(k) + a_1y(k-1) + \cdots + a_ny(k-n) \\= b_0u(k-1) + b_1u(k-2) + \cdots + b_{n-1}u(k-n) + \bar{u}\end{aligned}$$

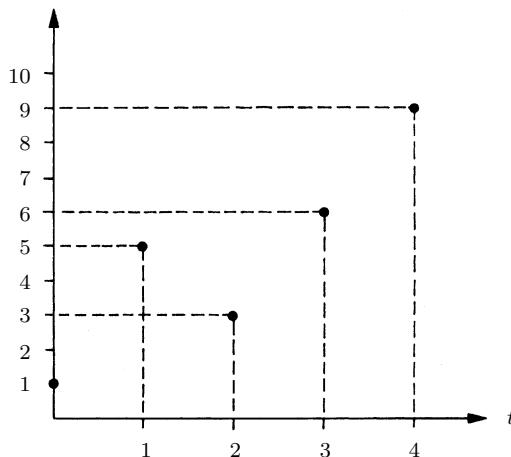
Etablir une régression linéaire permettant d'identifier  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , et  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , dans le cas où le nombre  $\bar{u}$  est connu. Répéter le problème quand  $\bar{u}$  doit lui aussi être identifié.

**11.8.7** Soit la fonction de transfert discrète :

$$H(z) = \frac{z-b}{z-p} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}$$

Les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  sont de degrés appropriés. Pourquoi l'identification des coefficients des polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ , du zéro  $b$  et du pôle  $p$  devient-elle délicate lorsque le pôle  $p$  se rapproche du zéro  $b$  ?

**11.8.8** Au sens des moindres carrés, tracer une droite passant par les échantillons de la figure 11.17.



**Fig. 11.17** Echantillons d'une régression linéaire.

Calculer la norme euclidienne minimum  $J(\hat{\vartheta}(4))$ . Evaluer cette norme avec la droite  $2t + 1,5$ .

**11.8.9** Résoudre, au sens des moindres carrés, le système d'équations algébriques linéaires :

$$\begin{cases}x + 2y + z = 1 \\ 3x - y = 2 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1\end{cases}$$

**11.8.10** Avec des conditions initiales nulles, un objet est lâché dans le vide et sa position mesurée à divers instants (tab. 11.1).

**Tableau 11.1** Mesures de la position d'un objet lâché dans le vide.

Temps [s]	Position [m]
0,1	0,05
0,2	0,2
0,3	0,4
0,4	0,8

Estimer l'accélération terrestre  $g$  par la méthode des moindres carrés.

**11.8.11** Un objet est lâché dans le vide avec une vitesse et une position initiales non nulles ; sa position est mesurée à différents instants. Ecrire une régression linéaire permettant d'estimer l'accélération terrestre.

**11.8.12** La position d'un objet se déplaçant en ligne droite avec une accélération constante est mesurée par un radar (tab. 11.2).

**Tableau 11.2** Mesures de la position d'un objet se déplaçant en ligne droite avec une accélération constante.

Temps [s]	Position [m]
0	3
0,2	59
0,4	98
0,6	151
0,8	218
1	264

Identifier par la méthode des moindres carrés la position et la vitesse initiales, de même que l'accélération. Prévoir la position de l'objet au temps 1,4 s.

**11.8.13** Les nombres de Nusselt et de Reynolds, dénotés respectivement Nu et Re, sont liés par l'équation :

$$\text{Nu} = a \text{Re}^b$$

Des mesures expérimentales sont reportées dans le tableau 11.3.

**Tableau 11.3** Mesures des nombres de Reynolds et de Nusselt.

Re	Nu
$10^4$	32
$2 \cdot 10^4$	60
$4 \cdot 10^4$	90
$5 \cdot 10^4$	119

Identifier par la méthode des moindres carrés les paramètres  $a$  et  $b$ .

**11.8.14** Soit la régression linéaire :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 + \gamma \end{bmatrix} \vartheta + \varepsilon$$

Déterminer  $\widehat{\vartheta}$ . Le nombre  $\gamma$  est beaucoup plus petit que 1 de sorte que, sur un ordinateur d'un certain type,  $a + \gamma^2$  est arrondi au nombre  $a \neq 0$ , tandis que  $a + \gamma$  est évalué correctement. Calculer  $\widehat{\vartheta}$  en commettant cette erreur numérique et interpréter le résultat obtenu.

**11.8.15** Soit l'entraînement en vitesse de l'exemple 11.5. Déterminer pour cette installation la matrice  $\Phi^T(k-1)\Phi(k-1)$  et le vecteur  $\Phi^T(k-1)\mathbf{y}(k)$ .

**11.8.16** Soit le processus non linéaire gouverné par l'équation :

$$y(k) + ay(k-1) = b_0 u(k-1) + b_1 u^2(k-1)$$

Etablir une régression linéaire permettant d'identifier  $a$ ,  $b_0$  et  $b_1$ .

**11.8.17** Démontrer que la matrice de projection est idempotente, c'est-à-dire que son carré est égal à elle-même.

**11.8.18** Prouver que, pour la méthode des moindres carrés non pondérés :

$$J(\widehat{\vartheta}(k)) = \mathbf{y}^T(k)\mathbf{y}(k) - \mathbf{y}^T(k)\Phi(k)(\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)\mathbf{y}(k)$$

**11.8.19** Que devient la formule (11.25) quand la matrice d'observations  $\Phi(k)$  est carrée ?

**11.8.20** Démontrer le théorème 11.3.

**11.8.21** Dans le contexte du théorème 11.4, prouver l'égalité :

$$\left( \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}) = \mathbf{I}$$

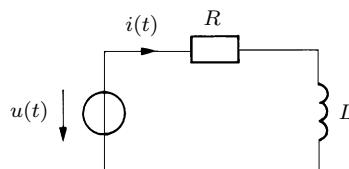
**11.8.22** Démontrer que le nombre  $1 + \phi^T (\Phi^T \Phi)^{-1} \phi$  intervenant dans la démonstration du théorème 11.5 est plus grand ou égal à 1.

**11.8.23** Déduire l'équation (11.65) à partir du résultat trouvé dans l'exemple 11.8.

**11.8.24** Détailler la démonstration du théorème 11.7 en reprenant point par point la démonstration du théorème 11.5.

**11.8.25** Détailler la démonstration du théorème 11.8.

**11.8.26** Soit le circuit électrique de la figure 11.18.



**Fig. 11.18** Circuit électrique.

La tension  $u(t)$  et le courant  $i(t)$  sont mesurés aux instants  $0, h, 2h, \dots, kh$ . Soit l'approximation :

$$\frac{di}{dt}(kh) \simeq \frac{i(kh) - i(kh-h)}{h}$$

Etablir une régression linéaire permettant d'identifier les paramètres  $R$  et  $L$  à partir des mesures.

**11.8.27** Appliquer la méthode de Levy à la fonction de transfert  $\frac{b}{s+a}$ . Expliciter les dimensions des vecteurs et de la matrice associés à la régression linéaire obtenue.

**11.8.28** Un entraînement par moteur *brushless* et son alimentation peuvent être modélisés par la fonction de transfert :

$$e^{-sT} \frac{b}{s^2} \quad b, T > 0$$

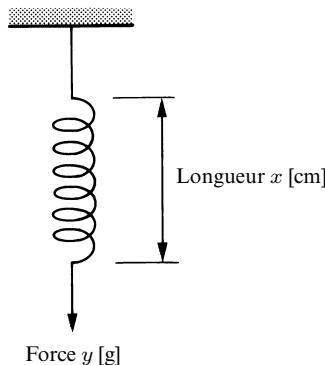
Des essais harmoniques analogiques effectués aux pulsations  $\omega_i$  ont fourni des mesures  $r_i e^{j\theta_i} \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ , de cette fonction de transfert. Etablir deux régressions linéaires permettant d'identifier les paramètres  $b$  et  $T$  à partir de ces mesures. En déduire une estimation de ces paramètres.

**11.8.29** Déterminer par la méthode des moindres carrés le polynôme du deuxième degré qui passe au mieux, au sens des moindres carrés, par les cinq points :

$$(0,1, -0,18) \quad (0,2, 0,31) \quad (0,3, 1,03) \quad (0,4, 2,48) \quad (0,5, 3,73)$$

Reporter les résultats sur un graphique.

**11.8.30** Soit l'expérience représentée dans la figure 11.19. Des résultats expérimentaux sont reportés dans le tableau 11.4.



**Fig. 11.19** Force appliquée à un ressort.

**Tableau 11.4** Mesures de la force appliquée à un ressort et de sa longueur.

Force $y$ [g]	Longueur $x$ [cm]
0	6,1
20	7,6
40	8,7
60	10,4

Estimer par la méthode des moindres carrés la constante du ressort.

**11.8.31** Soit un gaz à température constante contenu dans le volume  $V$  à pression  $p$  :

$$pV^\gamma = c$$

Ecrire une régression linéaire permettant d'identifier les paramètres  $c$  et  $\gamma$  à partir de mesures de volume et de pression.

**11.8.32** On considère l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$$

Des mesures de  $y(t)$  étant données à plusieurs instants, établir une régression linéaire permettant d'estimer les conditions initiales  $y(0)$  et  $\dot{y}(0)$ .

**11.8.33** Soit  $\mathbf{M}(k) = \Phi(k)(\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)$  la matrice de projection. Avec  $\mathbf{P}^\perp(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}(k))$ , démontrer que  $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{P}^\perp(k)\mathbf{y}(k)$  et que la matrice  $\mathbf{P}^\perp(k)$  est idempotente. Prouver ensuite que  $\mathbf{P}(k)\mathbf{P}^\perp(k) = \mathbf{P}^\perp(k)\mathbf{P}(k) = \mathbf{0}$  et interpréter les résultats.

**11.8.34** Afin d'identifier le paramètre  $\omega_x$  de la fonction de transfert  $\omega_x/s$ , on souhaite mettre à profit la méthode de Levy. Pour cela, des essais harmoniques analogiques effectués aux pulsations  $\omega_i$  ont fourni les mesures  $x_i + jy_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ , de cette fonction de transfert. Etablir la régression linéaire correspondante, en explicitant les dimensions des vecteurs et de la matrice qui lui sont associés. Calculer  $\hat{\omega}_x(K)$ .

# Commande adaptative

## *OBJECTIFS*

- Combiner un régulateur RST et une procédure d'identification pour aboutir à un schéma de commande adaptative par imposition d'un modèle.
- Présenter l'auto-ajustement des régulateurs RST et PID.
- Décrire le régulateur à gains programmés.

### 12.1 Introduction

La synthèse d'un régulateur RST se présente naturellement sous la forme d'un algorithme. Par ailleurs, une modélisation du processus à commander par identification peut, elle aussi, être décrite par une suite d'opérations numériques. Il est alors possible d'automatiser intégralement la sixième filière de la figure 8.1, constituée d'une identification paramétrique suivie d'une synthèse directe : l'ajustement du régulateur est effectué par un algorithme. Cet auto-ajustement peut être élaboré en temps réel, conduisant à un schéma de commande adaptative, dans lequel le régulateur détermine lui-même et met continuellement à jour ses paramètres.

Le volume de calcul requis par une commande adaptative est nettement plus conséquent que celui mis en jeu dans un régulateur à paramètres fixes. Toutefois, des réalisations basées sur microprocesseurs sont actuellement possibles.

Un schéma adaptatif constitue intrinsèquement un système non linéaire. Il est très difficile, voire impossible, de l'analyser complètement. Qui plus est, son implantation industrielle est délicate et exige un vaste savoir-faire. Elle porte en elle les germes de défaillances majeures. C'est par conséquent une solution à n'envisager dans certaines applications exigeantes qu'après s'être assuré qu'un régulateur à paramètres fixes ou programmés, le cas échéant équipé d'une touche d'auto-ajustement, ne peut pas remplir les spécifications.

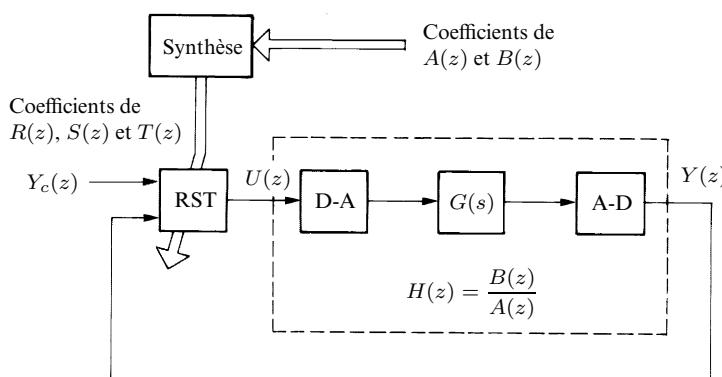
Le présent chapitre est une introduction aux méthodes de commande adaptative. Seuls des aspects déterministes sont explorés. L'approche par modèle de référence n'est pas abordée ; en fait, les différences entre celle-ci et l'architecture détaillée dans les sections qui suivent se révèlent mineures.

La section 12.2 décrit une commande adaptative par imposition d'un modèle ; le schéma indirect est traité dans le paragraphe 12.2.1 et le schéma direct dans le paragraphe 12.2.2. L'auto-ajustement d'un régulateur à paramètres fixes jouit d'une importance pratique considérable. Le cas du régulateur RST est rapidement étudié au début de la section 12.3 ; des approches conceptuellement fort différentes, en particulier les méthodes dites du relais, sont offertes pour l'auto-ajustement du régulateur PID. Finalement, le régulateur à gains programmés est développé dans la section 12.4.

## 12.2 Commande adaptative par imposition d'un modèle

### 12.2.1 Schéma indirect

Nous avons noté dans le chapitre 10 que la synthèse d'un régulateur RST se présente comme un algorithme directement programmable : étant donné les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  de la fonction de transfert  $H(z) = B(z)/A(z)$  du système à commander échantillonné (et des spécifications), les paramètres du régulateur, à savoir les coefficients des polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  qu'il fait intervenir, sont déterminés par une suite d'opérations numériques, dont le cœur est la résolution d'une équation diophantine et résumées dans les tableaux 10.1 à 10.4. La figure 12.1 illustre la démarche par un schéma fonctionnel. Selon les conventions habituelles,  $Y_c(z)$ ,  $U(z)$  et  $Y(z)$  dénotent les grandeurs de consigne, de commande et à commander, respectivement ;  $G(s)$  est la fonction de transfert analogique du processus à commander.



**Fig. 12.1** Schéma fonctionnel du montage en asservissement avec un régulateur RST muni de sa synthèse ; les spécifications intervenant dans la synthèse ne sont pas représentées.

Par ailleurs, l'élaboration d'un modèle externe de représentation par identification a été explorée dans le chapitre 11. Sa version récurrente est bien adaptée à une implantation en temps réel. Lorsque des paramètres de l'installation à commander s'altèrent lentement au cours du temps, ce qui est admis ici, il est indispensable d'incorporer un facteur d'oubli. Les variations paramétriques doivent évidemment être beaucoup plus lentes que celles des autres variables entrant en jeu afin que l'approche par fonction de transfert conserve tout son sens. L'algorithme est résumé dans le théorème 11.8 et par le schéma fonctionnel de la figure 12.2.

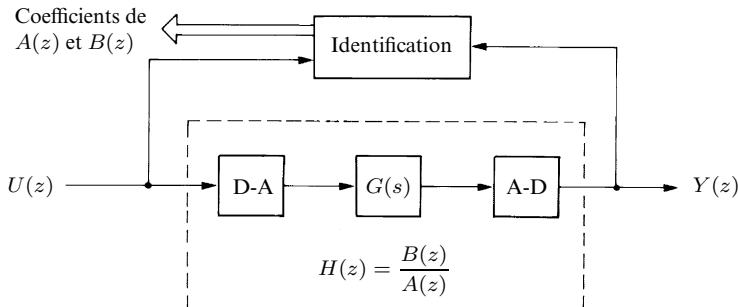


Fig. 12.2 Modélisation de représentation du système à commander.

Il apparaît logique de combiner les figures 12.1 et 12.2, puis d'effectuer continuellement, dans l'ordre et à chaque coup d'horloge, l'identification du processus à commander et la synthèse du régulateur RST. On aboutit ainsi à un schéma de **commande adaptative** (fig. 12.3), dans lequel la modélisation du système à commander et la synthèse du régulateur sont automatisées en temps réel. L'appellation adaptative provient de la caractéristique inhérente du montage de s'ajuster automatiquement et en permanence au processus à commander, même quand celui-ci est légèrement non stationnaire.

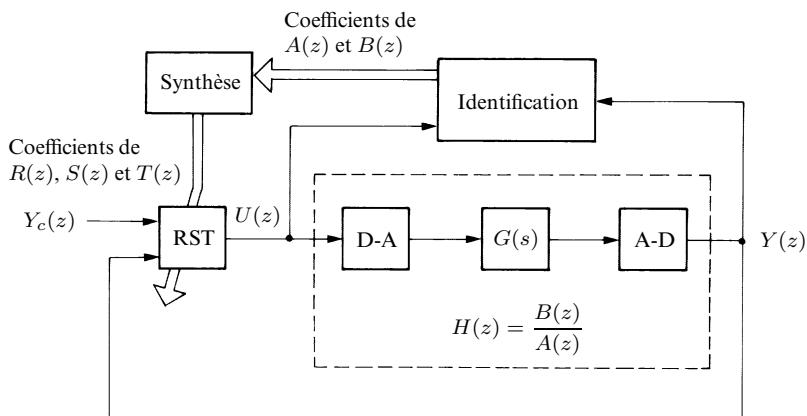


Fig. 12.3 Schéma de commande adaptative indirecte.

Réorganisons légèrement le schéma fonctionnel de la figure 12.3 pour se placer dans le format standard de la figure 1.79, faisant ressortir l'horloge délivrant les instants d'échantillonnage (fig. 12.4). La réalisation logicielle est esquissée dans la figure 12.5.

A l'instant d'échantillonnage  $t_k = kh$  délivré par l'horloge, la conversion analogique-digital fournit le nombre  $y(k)$  par échantillonnage de la grandeur à commander analogique mesurée. L'algorithme manipule ensuite cet échantillon, en exploitant encore d'autres nombres mémorisés. Il peut être scindé en une phase d'identification récurrente, qui met à jour l'estimation des coefficients des polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ ; en se basant sur cette estimation, un régulateur RST est synthétisé et, finalement, la grandeur de commande  $u(k)$  (ou  $u(k+1)$  si le temps de calcul et de conversion vaut  $h$ ) est calculée selon l'équation aux différences décrivant le régulateur. Le nombre  $u(k)$  (ou  $u(k+1)$ ) est alors maintenu constant, par le convertisseur digital-analogique, pendant une période d'échantillonnage complète. Toutes ces opérations sont répétées au coup d'horloge suivant.

Pour l'indentification qui nous concerne ici, la matrice d'observations  $\Phi(k-1)$  à l'instant d'échantillonnage  $kh$  ne renferme des échantillons que jusqu'au temps  $kh-h$  compris; le nombre  $u(k)$  n'intervient pas; la notation  $\Phi(k-1)$  souligne d'ailleurs cette situation, laquelle est en fait fort heureuse car l'évaluation de  $u(k)$  n'est activée qu'*après* la procédure d'identification;  $u(k)$  est une quantité non définie lors de l'identification.

Le dimensionnement du régulateur ne se fonde pas sur le modèle complet et exact du processus à commander; en fait, à chaque coup d'horloge, un modèle de commande simplifié, linéaire et stationnaire, estimé avec diverses erreurs par l'algorithme d'identification, est employé *comme si c'était le modèle exact*. En terminologie anglaise, une telle approche s'appelle ***certainty equivalence principle***, que l'on peut traduire par ***principe de l'équivalence certaine***.

Le qualitatif ***indirect*** ou ***explicite*** attaché au schéma de la figure 12.3 provient du fait que les paramètres du système à commander doivent être estimés avant de servir à la synthèse du régulateur. Le prochain paragraphe est dévolu à un schéma ***direct*** ou ***implicite***, dans lequel ce sont les paramètres du régulateur qui sont d'emblée identifiés.

Le découplage des tâches d'identification et de synthèse, intrinsèque à l'approche indirecte, offre d'intéressants atouts. Tout d'abord, d'éventuelles connaissances a priori sur l'installation à commander peuvent être prises en compte par l'identification. Ensuite, il est possible de sélectionner *indépendamment* une méthode d'identification, parmi un choix très riche, et un régulateur, là aussi dans une large palette. Par exemple, plutôt qu'une approche polynomiale RST, un régulateur PID est possible, bien que sa synthèse se prête généralement mal à être directement transcrive en algorithme. Nous constatons donc que le schéma fonctionnel de la figure 12.3 est extrêmement flexible et constitue un concept générique et un cadre structurant de grande portée.

Il existe visiblement deux boucles dans un schéma de commande adaptative. La première est une rétroaction classique de la grandeur à commander; quant à la seconde, plus lente, elle se compose du mécanisme d'ajustement des paramètres

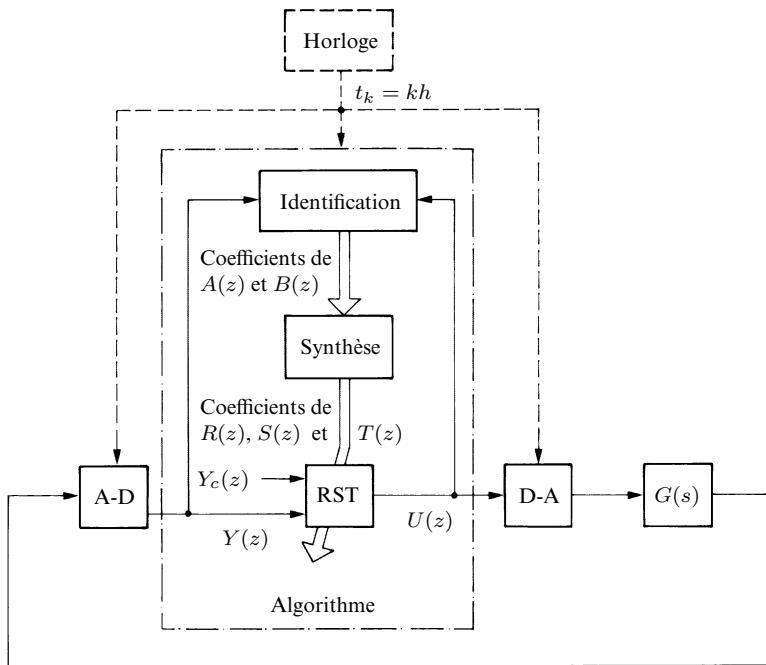


Fig. 12.4 Schéma de commande adaptative indirect dans le format de la figure 1.79.

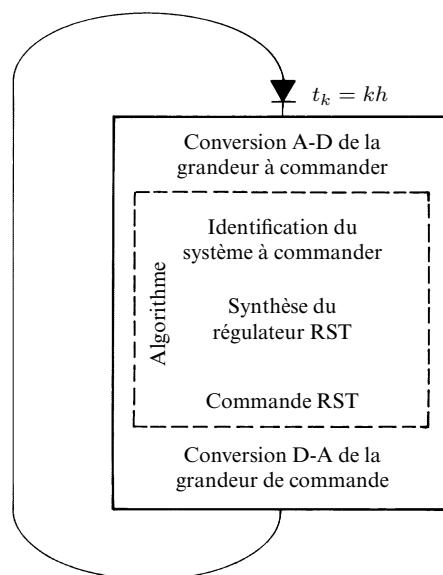


Fig. 12.5 Réalisation logicielle d'un schéma de commande adaptative indirect.

du régulateur. Vu ce mécanisme d'ajustement, le système en boucle fermée est profondément *non linéaire*; son analyse complète, en particulier de la stabilité et des performances, est extrêmement ardue. Seuls des résultats partiels, valides dans des situations idéalisées, sont connus; leur présentation sort du cadre de ce livre.

Dans le schéma indirect de la figure 12.3, il existe un conflit potentiel entre l'identification et la commande. Expliquons qualitativement le phénomène en prenant une consigne constante. A l'enclenchement de l'algorithme de commande adaptative, le régulateur est fréquemment médiocre parce que mal ajusté; la grandeur de commande est ainsi excitante, générant une grandeur commandée agitée. Cette situation se révèle favorable pour la procédure d'identification (sect. 11.4), conduisant à une modélisation pertinente du processus à commander. La synthèse affine alors substantiellement le régulateur, engendrant une grandeur de commande et une grandeur à commander plus calmes qu'initialement. Les modes de l'installation à commander sont moins influencés et la richesse de son excitation se détériore. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la grandeur à commander s'approche de la valeur de consigne, constante; la grandeur de commande devient elle aussi constante. L'objectif de commande est atteint. Malheureusement, les modes du système à commander sont mal excités et les conditions de persistance détruites, ceci se reflétant mathématiquement par une matrice d'observations de rang insuffisant. L'identification transmet un modèle aberrant à la synthèse, qui donne un régulateur inconsistant : il y a explosion de la grandeur de commande, puis de la grandeur à commander. Ce comportement intempestif est appelé **éclatement**, ou **burst-out** en anglais. Dès son apparition, la richesse de l'excitation est à nouveau suffisante et le cycle complet recommence.

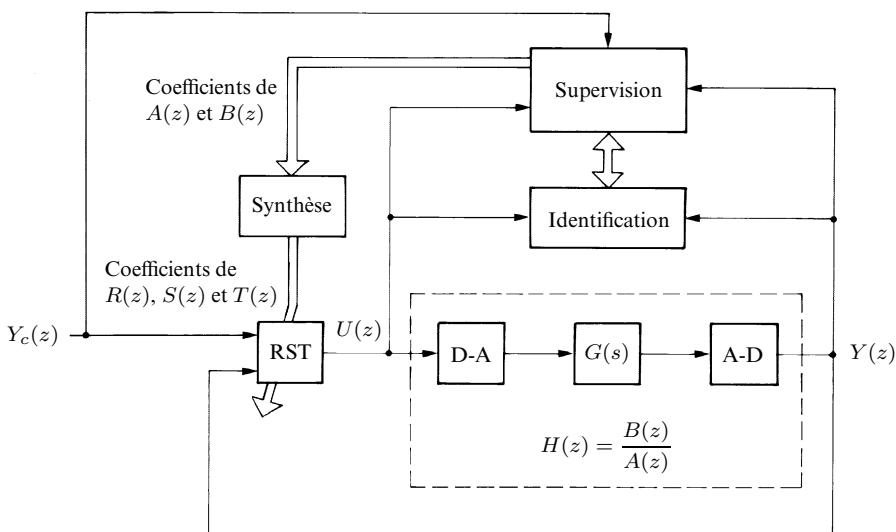


Fig. 12.6 Schéma de commande adaptative indirect avec supervision de l'identification.

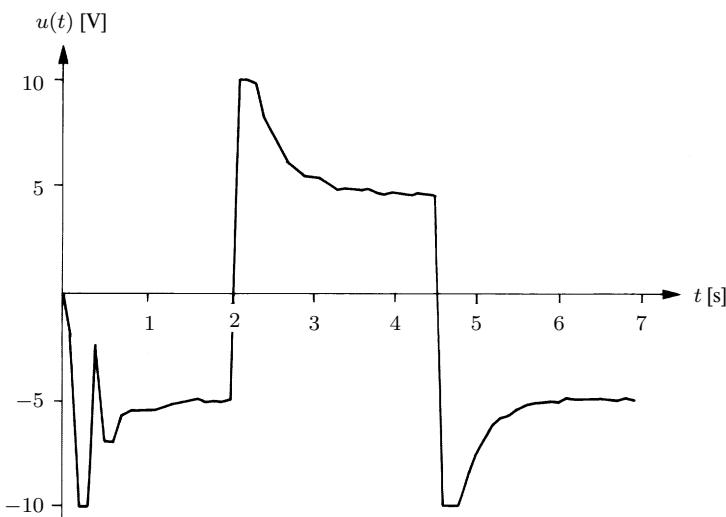
Il importe de déconnecter l'identification dès que le modèle de commande est jugé correct. Généralement, une gestion plus subtile de l'identification est mise en place. Comme cela est montré dans la figure 12.6, le modèle n'est pas directement exploité pour la synthèse du régulateur ; il passe au préalable dans un module de supervision, pouvant également tirer profit de la consigne, de la grandeur de commande et de la grandeur à commander ; ce module transmet l'information à la procédure de synthèse uniquement quand cela est nécessaire. Il n'existe aucune méthodologie générale de supervision de l'identification ; c'est souvent un ensemble de règles heuristiques, dépendantes de l'application et documentées dans la littérature spécialisée.

### EXEMPLE 12.1

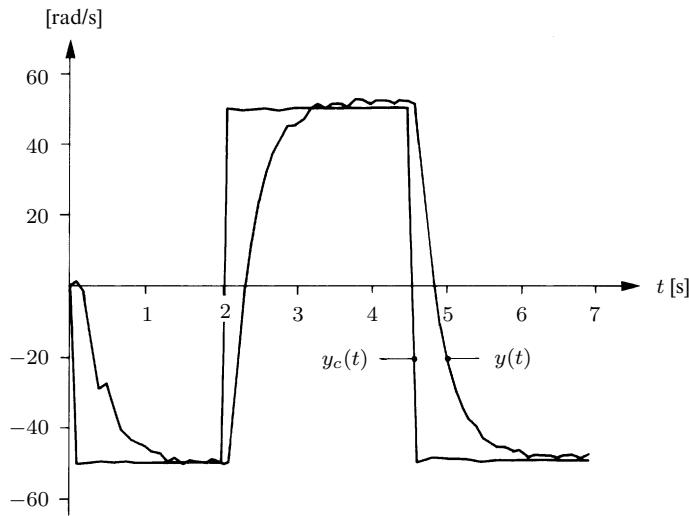
Le schéma de commande adaptative de la figure 12.3 est appliqué à un entraînement électrique commandé en vitesse. Une période d'échantillonnage  $h = 0,1$  s est adoptée. L'identification du processus est assurée par l'algorithme des moindres carrés récurrents du théorème 11.8, avec un facteur d'oubli  $\lambda = 0,98$ . Le régulateur RST implanté n'inclut pas d'intégrateur ; le temps de calcul et de conversion est négligeable vis-à-vis de la période d'échantillonnage ; on adopte le modèle à poursuivre :

$$H_m(z) = \frac{0,3}{z - 0,7}$$

La synthèse du régulateur est résumée dans le tableau 10.1. Des résultats découlant d'un essai sur une installation réelle sont reportés dans la figure 12.7, qui met en évidence l'ajustage du régulateur dans les premières périodes d'échantillonnage. Aucun phénomène d'éclatement n'est décelé dans cette application.



**Fig. 12.7** Grandeur de commande et réponse en boucle fermée d'un entraînement commandé en vitesse par un régulateur RST adaptatif ; la grandeur de commande est limitée à  $\pm 10$  V.



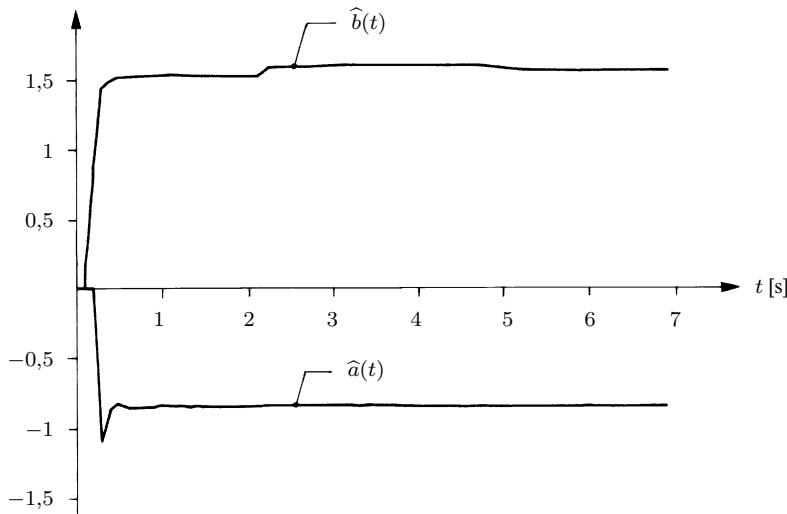
**Fig. 12.7** (Suite et fin.)

Le système à commander échantillonné est représenté par :

$$H(z) = \frac{b}{z + a}$$

Le vecteur de paramètres est donc :

$$\boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



**Fig. 12.8** Paramètres estimés.

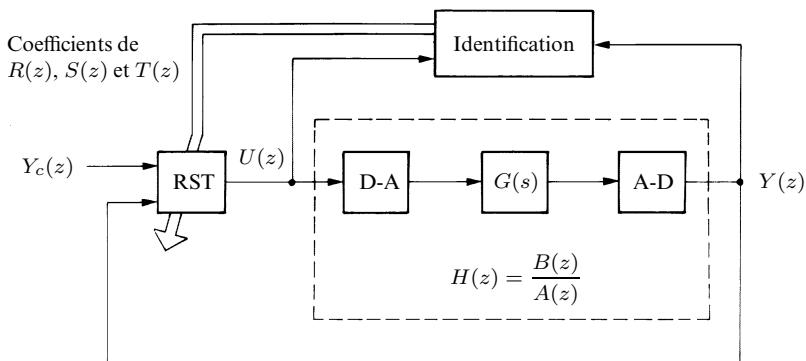
Le vecteur de paramètres estimé est écrit de la manière suivante :

$$\hat{\vartheta}(k) = \begin{bmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{bmatrix}$$

La figure 12.8 montre l'évolution temporelle des coefficients  $\hat{a}(k)$  et  $\hat{b}(k)$ .

### 12.2.2 Schéma direct

L'approche indirecte, passant par l'identification explicite du processus à commander, requiert un volume de calcul important. Un schéma direct ou implicite, dans lequel ce sont les paramètres du régulateur qui sont estimés, permet de supprimer le bloc de synthèse de la figure 12.3, d'où un gain en temps de calcul appréciable. De surcroît, l'analyse de la stabilité en boucle fermée se simplifie substantiellement. Le schéma fonctionnel du montage direct est dessiné dans la figure 12.9.



**Fig. 12.9** Schéma de commande adaptative direct.

Les deux membres de l'équation diophantine (10.15) sont multipliés par  $Y(z)$  :

$$A(z)\bar{R}(z)Y(z) + B^-(z)S(z)Y(z) = A_m(z)A_0(z)Y(z)$$

D'où, en tenant compte successivement de  $Y(z)/U(z) = B(z)/A(z)$ ,  $B(z) = B^+(z)B^-(z)$  (factorisation spectrale (10.10)) et  $R(z) = B^+(z)\bar{R}(z)$  (égalité (10.13)) :

$$\begin{aligned} A_m(z)A_0(z)Y(z) &= B(z)\bar{R}(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z) \\ &= B^+(z)B^-(z)\bar{R}(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z) \\ &= B^-(z)R(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z) \end{aligned} \quad (12.1)$$

Par conséquent :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z) - B^-(z)S(z)} \quad (12.2)$$

L'égalité (12.2) peut être considérée comme la description du système à commander paramétrisé non pas avec les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ , mais avec les polynômes  $A_m(z)$ ,  $A_0(z)$ ,  $B^-(z)$ ,  $S(z)$  et  $R(z)$ ;  $A_m(z)$  et  $A_0(z)$  sont fixés par les spécifications tandis que  $B^-(z)$ ,  $R(z)$  et  $S(z)$  sont inconnus. A l'aide des échantillons  $\{u(k)\}$  et  $\{y(k)\}$  récoltés respectivement à l'entrée et à la sortie de l'installation à commander, l'identification des polynômes  $B^-(z)$ ,  $R(z)$  et  $S(z)$  conduit directement au régulateur RST défini par les polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$ . Sa synthèse explicite est de la sorte éliminée.

Malheureusement, le problème d'identification tel qu'il vient d'être posé mène à une régression non linéaire puisque  $B^-(z)$  multiplie, dans (12.2),  $R(z)$  et  $S(z)$ . Cette difficulté n'existe pas si  $B^-(z) = 1$  ou, plus généralement, si  $B^-(z)$  est une constante  $b_0 \in \mathbb{R}$ , en d'autres termes quand tous les zéros du processus à commander sont simplifiés. Comme cela a été relevé dans le paragraphe 10.3.6, il s'agit d'une restriction sévère, excluant d'emblée tous les systèmes à non-minimum de phase et, très souvent, les systèmes dont les zéros n'appartiennent pas à une région convenable entièrement située à l'intérieur du cercle unité (par exemple la région en tramé de la figure 10.7). Lorsque  $B^-(z) = b_0$ , (12.1) devient :

$$A_m(z)A_0(z)Y(z) = b_0R(z)U(z) + b_0S(z)Y(z) \quad (12.3)$$

L'algorithme d'identification est maintenant chargé de l'estimation des coefficients des polynômes  $b_0R(z)$  et  $b_0S(z)$  qui entrent en jeu linéairement dans (12.3).

La relation  $\delta R = \delta A_m + \delta A_0 + \delta B^+ - \delta A$  a été établie dans le chapitre 10 (égalité (10.37)); vu que  $B^-(z) = b_0$ , nous avons  $\delta B = \delta B^+$  et :

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta A_m + \delta A_0 - (\delta A - \delta B) \\ &= \delta(A_m A_0) - (\delta A - \delta B) \end{aligned}$$

Le surplus de pôles  $d = \delta A - \delta B$  vérifie l'inégalité  $d > 0$ . En tirant profit de  $\delta R = \delta(b_0R) \geq \delta S = \delta(b_0S)$ , traduisant la causalité du régulateur RST, on aboutit à :

$$\delta(A_m A_0) = \delta(b_0R) + d \geq \delta(b_0S) + d \quad (12.4)$$

Ainsi, le degré du polynôme  $A_m(z)A_0(z)$  est strictement plus grand que celui de  $b_0R(z)$ , lequel est plus grand ou égal à celui de  $b_0S(z)$ . Multiplions les deux membres de (12.3) par  $z^{-\delta(A_m A_0)}$  et passons dans le domaine temporel. Le membre de gauche est alors une somme des échantillons  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ , ...,  $y(k-\delta(A_m A_0))$ , pondérée par les coefficients du polynôme donné  $A_m(z)A_0(z)$ . La valeur de cette somme est donc parfaitement connue à l'instant d'échantillonage  $t_k = kh$ . Le membre de droite est une somme d'échantillons de l'entrée  $\{u(k)\}$  et de la sortie  $\{y(k)\}$ , pondérée avec les coefficients des polynômes inconnus  $b_0R(z)$  et  $b_0S(z)$ , qui constituent les composantes du vecteur de paramètres ; les relations (12.4) montrent que le dernier échantillon intervenant dans

cette somme est récolté *avant* l'instant d'échantillonnage  $t_k = kh$ ; par exemple, si  $d = 1$ , les échantillons entrant en jeu sont saisis aux temps  $kh - h, kh - 2h, \dots, kh - \delta(A_m A_0)h$  et la matrice d'observations  $\Phi(k-1)$  associée à la régression linéaire ne renferme des échantillons que jusqu'à l'instant  $kh - h$  compris.

Les deux membres de l'équation  $R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z)$  du régulateur RST sont multipliés par  $b_0$  pour obtenir :

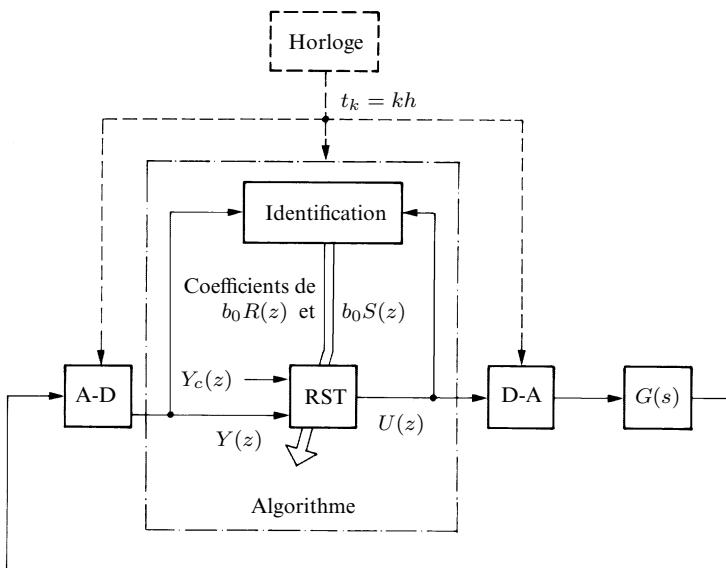
$$b_0R(z)U(z) = b_0T(z)Y_c(z) - b_0S(z)Y(z) \quad (12.5)$$

On sait que  $T(z) = B'_m(z)A_0(z)$ ; par conséquent,  $b_0T(z) = b_0B'_m(z)A_0(z) = B_m(z)A_0(z)$  et (12.5) devient :

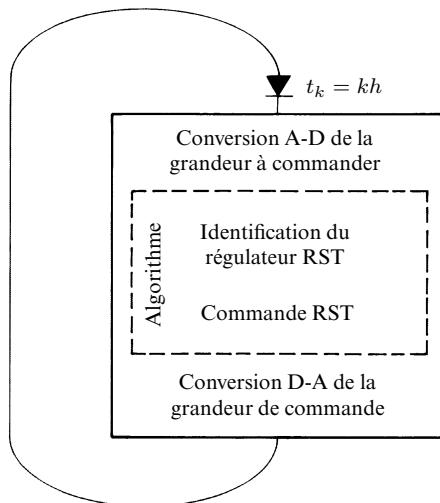
$$b_0R(z)U(z) = B_m(z)A_0(z)Y_c(z) - b_0S(z)Y(z)$$

Le code du régulateur se fonde sur cette relation, où les coefficients des polynômes  $b_0R(z)$  et  $b_0S(z)$  sont estimés par l'algorithme d'identification. La figure 12.10 complète la figure 12.9 en faisant intervenir l'horloge et la figure 12.11 illustre l'architecture logicielle.

L'algorithme se décompose maintenant en une phase d'identification récurrente, chargée de la mise à jour de l'estimation des coefficients des polynômes  $b_0R(z)$  et  $b_0S(z)$ ; la grandeur de commande  $u(k)$  (ou  $u(k+1)$  si le temps de calcul et de conversion vaut  $h$ ) est ensuite déterminée selon l'équation aux différences décrivant le régulateur.



**Fig. 12.10** Schéma de commande adaptative direct dans le format de la figure 1.79.



**Fig. 12.11** Réalisation logicielle d'un schéma de commande adaptative direct.

Dans le schéma indirect du paragraphe précédent, les paramètres estimés du *processus à commander* sont utilisés comme s'ils étaient les vrais paramètres tandis que, dans le schéma direct du présent paragraphe, les paramètres estimés du *régulateur RST* sont employés comme s'ils étaient exacts. Bien évidemment, les résultats issus de ces deux démarches diffèrent.

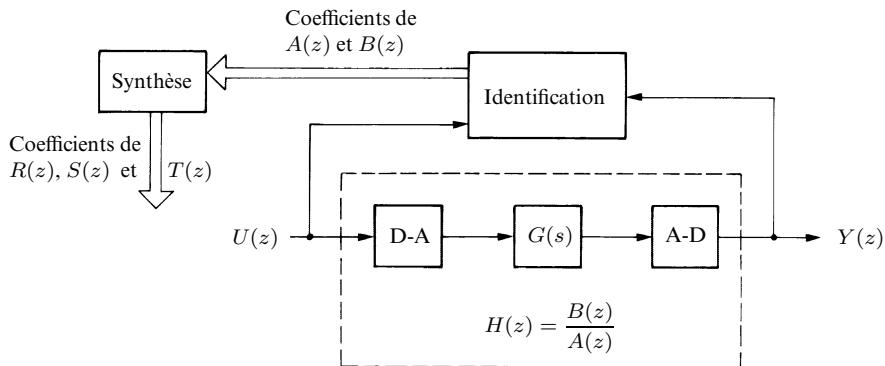
Mentionnons pour conclure qu'un intégrateur peut aisément être incorporé dans le régulateur RST d'un schéma direct.

### 12.3 Auto-ajustement du régulateur

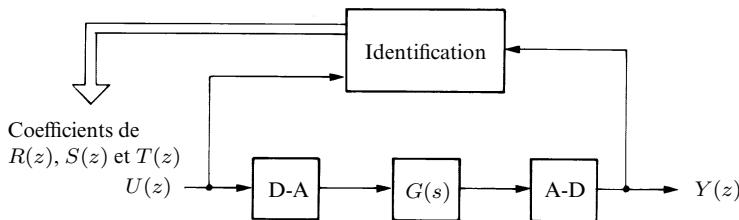
Dans les schémas de commande adaptative de la section précédente, le mécanisme d'ajustement du régulateur est théoriquement activé à chaque coup d'horloge ; dans la pratique toutefois, ce mécanisme peut être gelé par un module de supervision gérant l'identification. Ces architectures sont attractives au démarrage et pour des systèmes à commander légèrement non stationnaires. Par contre, elles apparaissent trop lourdes et potentiellement délicates pour des processus stationnaires, où des régulateurs à paramètres figés après leur ajustement conviennent en général parfaitement.

La détermination *automatique* de ces paramètres peut être effectuée en conservant au démarrage les structures des figures 12.3 ou 12.9, puis en débranchant la procédure d'ajustement quand les performances sont jugées satisfaisantes ; les paramètres du régulateur conservent alors leurs dernières valeurs. Une telle philosophie est appelée **auto-ajustement** ou, en anglais, **auto-tuning**.

Il est aussi possible de tirer profit du mécanisme d'ajustement en boucle ouverte, en injectant dans le système à commander, qui doit être stable, une excitation suffisamment riche pour l'identification ; le régulateur est dimensionné puis exploité tel quel en boucle fermée. La figure 12.12 illustre l'auto-ajustement du régulateur RST dans le cas d'un schéma indirect et la figure 12.13 pour un schéma direct. L'importance pratique d'un auto-ajustement est considérable : sur simple demande, des régulateurs sont synthétisés automatiquement.



**Fig. 12.12** Auto-ajustement en boucle ouverte d'un régulateur RST indirect.



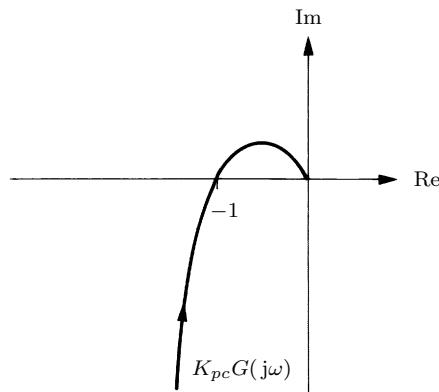
**Fig. 12.13** Auto-ajustement en boucle ouverte d'un régulateur RST direct.

Les méthodes de synthèse du régulateur PID étudiées dans les chapitres 8 et 9 n'exhibent pas la forme algébrique de celles caractéristiques du régulateur RST. L'auto-ajustement du régulateur RST qui vient d'être proposé n'a par conséquent pas d'équivalent immédiat pour la commande PID. Il existe néanmoins des techniques d'auto-ajustement conceptuellement différentes, bien adaptées au régulateur PID, dont les plus importantes sont maintenant passées en revue.

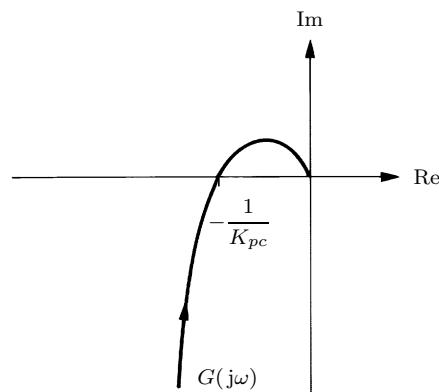
Une approche possible se fonde sur la synthèse par imposition d'un modèle à poursuivre analogique, laquelle est traitée dans le paragraphe 1.7.6. Après identification d'un modèle de commande  $G(s)$ , un régulateur PI, PD ou PID est ajusté à l'aide des expressions algébriques développées dans ce paragraphe. Le régulateur obtenu est numérisé selon les indications du chapitre 8, puis finalement implanté. Cette technique s'avère mal adaptée à des processus comprenant un retard pur.

La première méthode de Ziegler-Nichols (§ 1.7.5) peut elle aussi être exploitée dans ce contexte. Le système à commander est tout d'abord soumis à un essai indiciel. La réponse qui en résulte est ensuite analysée afin d'extraire les nombres  $a$  et  $L$ ; dans le but d'automatiser la procédure d'ajustement, il est possible d'identifier par moindres carrés une droite passant par la réponse indicuelle échantillonnée, en adoptant une faible pondération pour les premiers échantillons liés au retard pur  $L$ . Le régulateur est alors dimensionné selon le tableau 1.1, puis le cas échéant retouché, numérisé et implanté. Cette approche se révèle sensible aux erreurs commises dans l'estimation des paramètres  $a$  et  $L$ . Par ailleurs, il n'est pas possible d'en bénéficier quand le retard  $L$  est inexistant dans la réponse indicuelle.

Quant à la seconde méthode de Ziegler-Nichols, elle est difficile à automatiser, ceci étant pour l'essentiel dû à la maîtrise très délicate de l'amplitude des oscillations. Qui plus est, opérer à la limite de la stabilité en boucle fermée se



**Fig. 12.14** Diagramme de Nyquist associé à la seconde méthode de Ziegler-Nichols.

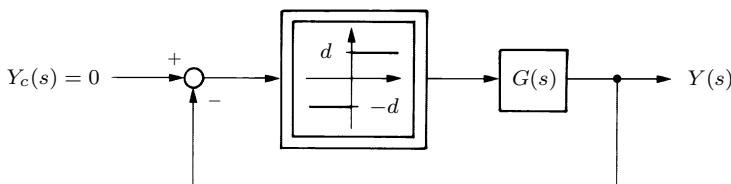


**Fig. 12.15** Diagramme de la figure 12.14 modifié.

révèle périlleux ou même interdit dans certaines circonstances. Afin de contourner ces difficultés fort élégamment, les résultats fournis par la seconde méthode de Ziegler-Nichols vont être créés complètement différemment à l'aide d'un régulateur non linéaire de type tout-ou-rien (sect. 1.6). Mais, auparavant, les conditions qu'elle impose sont interprétées dans un diagramme de Nyquist analogique (les lecteurs peu familiers avec ce concept trouveront d'utiles informations dans l'annexe II). Il est évident que, la limite de la stabilité en boucle fermée étant atteinte, la fonction de transfert analogique harmonique en boucle ouverte  $K_{pc}G(j\omega)$  passe par le point critique  $-1$  (fig. 12.14).

Une division par le gain critique  $K_{pc}$  conduit au diagramme de la figure 12.15.

Le régulateur proportionnel de gain  $K_{pc}$  est maintenant remplacé par un régulateur tout-ou-rien, comme cela est montré dans la figure 12.16. La consigne est nulle.



**Fig. 12.16** Commande tout-ou-rien.

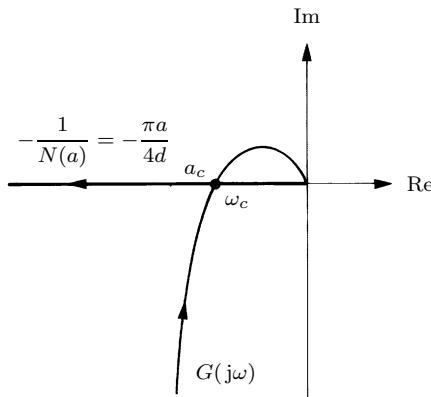
La méthode du premier harmonique, rappelée dans l'annexe II, est maintenant mise à profit. La fonction de transfert généralisée  $N(a)$  de l'élément tout-ou-rien s'écrit :

$$N(a) = \frac{4d}{\pi a}$$

Le nombre  $a$  dénote l'amplitude de la sinusoïde à l'entrée du dispositif tout-ou-rien et  $d$  l'amplitude de ce dernier. On sait qu'il existe dans le système de la figure 12.16 un régime d'oscillations quand :

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(a)}$$

Graphiquement, cette condition est remplie lorsque la fonction de transfert harmonique  $G(j\omega)$  de l'élément linéaire coupe le lieu critique  $-1/N(a)$  (fig. 12.17). Les valeurs  $a_c$  et  $\omega_c$  correspondantes sont respectivement l'amplitude et la pulsation de l'oscillation à l'entrée du dispositif tout-ou-rien (ou à la sortie du processus à commander puisque la consigne est nulle). En outre, l'oscillation est stable si, en parcourant la courbe représentant la fonction de transfert harmonique  $G(j\omega)$  au voisinage de  $a_c$  et  $\omega_c$  dans le sens des  $\omega$  croissants, nous laissons à gauche le sens des  $a$  croissants sur le lieu critique  $-1/N(a)$ . L'oscillation est instable dans la situation contraire.



**Fig. 12.17** Existence, dans le montage de la figure 12.16, d'une auto-oscillation stable d'amplitude  $a_c$  et de pulsation  $\omega_c$ .

Pour autant que le système à commander agisse comme un filtre passe-bas efficace, l'élément tout-ou-rien se comporte de la même façon qu'un régulateur proportionnel de gain variable  $N(a) = \frac{4d}{\pi a}$ . En régime d'oscillations, ce gain vaut  $\frac{4d}{\pi a_c}$ .

Une comparaison des figures 12.15 et 12.17 montre qu'elles sont en fait identiques. Par conséquent, les intersections de la fonction de transfert harmonique  $G(j\omega)$  avec l'axe réel sont les mêmes dans les deux figures, impliquant :

$$-\frac{1}{K_{pc}} = -\frac{\pi a_c}{4d}$$

D'où :

$$K_{pc} = \frac{4d}{\pi a_c} \quad (12.6)$$

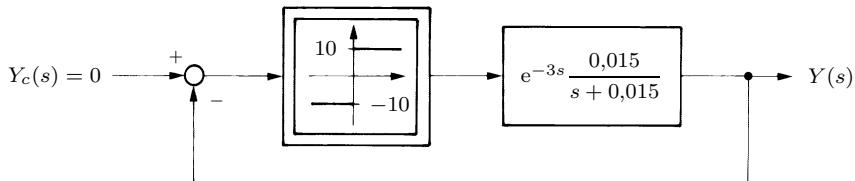
Quant à la pulsation critique  $\omega_c$  de l'oscillation, elle est liée à la période critique  $T_c$  par la formule :

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$$

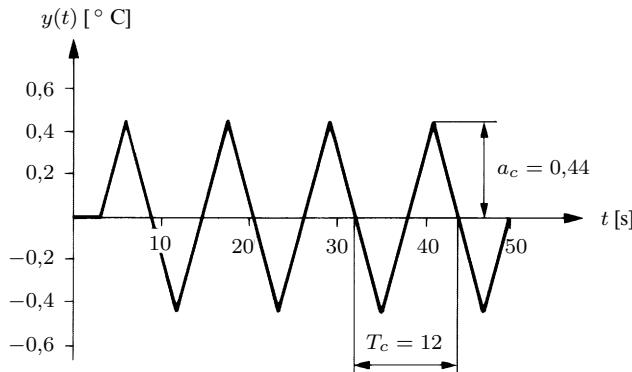
L'auto-ajustement du régulateur est effectué comme suit. Un régulateur tout-ou-rien est d'abord monté en boucle fermée (fig. 12.16). En admettant qu'il donne naissance à une oscillation stable, on mesure l'amplitude  $a_c$  de celle-ci à l'entrée du régulateur (ou à la sortie du processus à commander), qui fournit directement  $K_{pc}$  selon l'équation (12.6), et sa période  $T_c$ . Le régulateur est ensuite dimensionné à l'aide du tableau 1.2, puis retouché si nécessaire, numérisé et finalement implanté en lieu et place du régulateur tout-ou-rien. Cette manière de procéder est facile à automatiser ; elle ne requiert pas une recherche par tâtonnement du gain critique et, de surcroît, l'amplitude  $a_c$  de l'oscillation peut être réglée au moyen de l'amplitude  $d$  de l'élément tout-ou-rien. C'est le point de départ de nombreuses variantes et extensions rencontrées sous le nom de **méthodes du relais**.

**EXEMPLE 12.2**

Revenons à la cuve de mélange de l'exemple 5.2, avec les valeurs numériques déjà considérées à plusieurs reprises, en particulier dans l'exemple 7.7. Un régulateur tout-ou-rien, pour lequel  $d = 10$ , est placé en boucle fermée comme cela est illustré dans la figure 12.18. La sortie  $y(t)$  de la cuve est reportée dans la figure 12.19.



**Fig. 12.18** Commande tout-ou-rien d'une cuve de mélange.



**Fig. 12.19** Réponse en boucle fermée d'une cuve de mélange dans le cas d'un régulateur tout-ou-rien.

Abstraction faite du retard pur, le système à commander est du premier ordre et n'agit donc pas comme un filtre passe-bas vraiment efficace ; l'approche est néanmoins exploitée telle quelle. L'amplitude de l'oscillation vaut  $a_c = 0,44^\circ\text{C}$  et sa période  $T_c = 12$  s. On en déduit le gain critique :

$$K_{pc} = \frac{4d}{\pi a_c} = 29$$

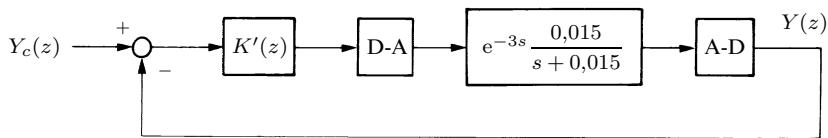
D'où le régulateur PID analogique, selon la dernière ligne du tableau 1.2 :

$$K(s) = 17,4 \left( 1 + \frac{1}{6s} + 1,5 s \right)$$

Sa numérisation donne, dans une version non filtrée et avec une période d'échantillonnage  $h = 1$  s :

$$K'(z) = 17,4 \left( 1 + \frac{0,17 z}{z - 1} + 1,5 \frac{z - 1}{z} \right)$$

Ce régulateur PID numérique est finalement implanté en boucle fermée (fig. 12.20).

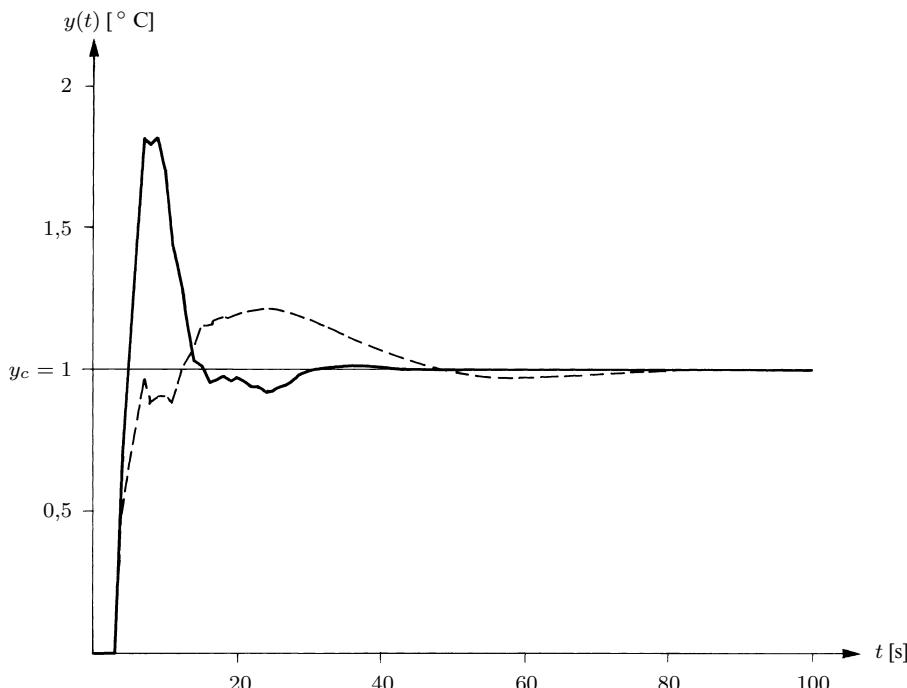


**Fig. 12.20** Commande PID numérique d'une cuve de mélange.

La réponse indicielle en boucle fermée tracée en trait plein dans la figure 12.21 présente un fort dépassement, caractéristique d'une synthèse par les méthodes de Ziegler-Nichols. Une retouche des paramètres, selon la règle des deux ( $\S$  1.7.5), conduit au régulateur moins agressif :

$$K'(z) = 8,7 \left( 1 + \frac{0,085 z}{z-1} + 3 \frac{z-1}{z} \right)$$

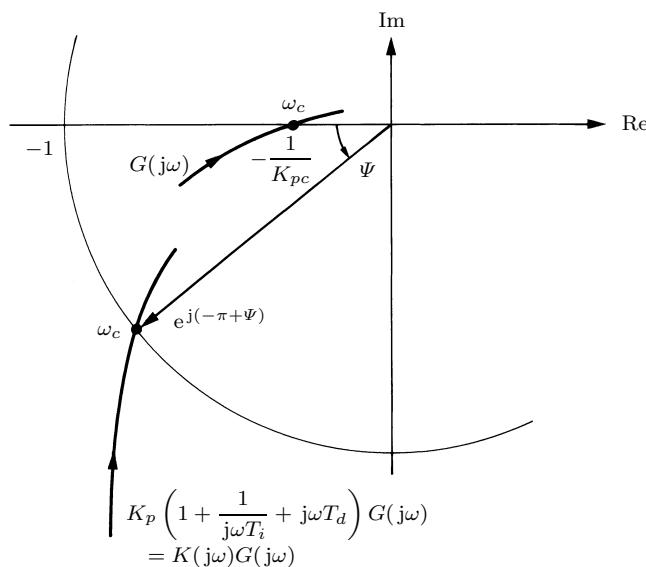
La réponse indicielle qui en découle apparaît en traitillé dans la figure 12.21.



**Fig. 12.21** Réponse indicielle en boucle fermée d'une cuve de mélange dans le cas de régulateurs auto-ajustés par la seconde méthode de Ziegler-Nichols.

Connaissant ici la fonction de transfert du processus à commander, il est facile de calculer la période et le gain critiques exacts ; les valeurs obtenues sont  $T_c = 11,79$  s et  $K_{pc} = 35,55$ . Une erreur appréciable entache surtout l'estimation du gain critique, justifiant une amélioration de la méthode ; cette refonte sera présentée à la fin de la présente section. ■

Comme il ressort de la figure 12.22, un régulateur tout-ou-rien en boucle fermée permet d'identifier l'intersection de la fonction de transfert harmonique analogue  $G(j\omega)$  du système à commander avec l'axe réel. La pulsation  $\omega_c$  est égale à la pulsation de l'oscillation tandis que le point d'intersection  $-1/K_{pc}$  vaut  $-\frac{\pi a_c}{4d}$ , où  $a_c$  est l'amplitude de l'oscillation et  $d$  l'amplitude du dispositif tout-ou-rien.



**Fig. 12.22** Synthèse du régulateur analogique PID de fonction de transfert  $K(s)$  afin d'imposer une marge de phase  $\Psi$ .

Nous désirons maintenant dimensionner un régulateur PID analogique garantissant une marge de phase  $\Psi$  spécifiée (fig. 12.22). Sa fonction de transfert harmonique non filtrée est :

$$K(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d \right)$$

En insérant en boucle fermée un régulateur PID, il s'agit de déplacer l'intersection de  $G(j\omega)$  avec l'axe réel sur le point  $e^{j(-\pi+\Psi)}$ . La valeur de  $K(j\omega_c)$  doit vérifier :

$$K(j\omega_c)G(j\omega_c) = e^{j(-\pi+\Psi)}$$

Cette égalité impose, pour l'argument de  $K(j\omega_c)G(j\omega_c)$  :

$$\text{Arg } K(j\omega_c)G(j\omega_c) = \text{Arg } K_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega_c T_i} + j\omega_c T_d \right) - \pi = -\pi + \Psi$$

D'où :

$$\text{Arg} \left( 1 + \frac{1}{j\omega_c T_i} + j\omega_c T_d \right) = \text{Arg} \left( 1 + j \left( \omega_c T_d - \frac{1}{\omega_c T_i} \right) \right) = \Psi$$

Ou :

$$\text{Arctg} \left( \omega_c T_d - \frac{1}{\omega_c T_i} \right) = \Psi$$

On en déduit :

$$\omega_c T_d - \frac{1}{\omega_c T_i} = \text{tg } \Psi \quad (12.7)$$

Cette équation ne fournit pas à la fois  $T_i$  et  $T_d$ . En s'inspirant des règles de Ziegler-Nichols (dernières lignes des tableaux 1.1 et 1.2), un choix possible est :

$$T_i = 4 T_d \quad (12.8)$$

Alors, (12.7) devient :

$$\omega_c^2 T_d^2 - \omega_c T_d \text{tg } \Psi - \frac{1}{4} = 0$$

Il en découle, en ne conservant bien sûr que la solution positive de cette équation :

$$T_d = \frac{\text{tg } \Psi + \sqrt{1 + \text{tg}^2 \Psi}}{2\omega_c} \quad (12.9)$$

Le gain  $K_p$  du régulateur est ensuite déterminé de manière à ce que le module de  $K(j\omega_c)G(j\omega_c)$  vérifie :

$$|K(j\omega_c)G(j\omega_c)| = K_p \left| 1 + \frac{1}{j\omega_c T_i} + j\omega_c T_d \right| \frac{1}{K_{pc}} = 1$$

Donc :

$$K_p \left| 1 + \frac{1}{j\omega_c T_i} + j\omega_c T_d \right| = K_p \left| 1 + j \left( \omega_c T_d - \frac{1}{\omega_c T_i} \right) \right| = K_{pc}$$

En tirant profit de (12.7) :

$$K_p |1 + j \text{tg } \Psi| = K_{pc}$$

D'où :

$$K_p \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi} = K_{pc}$$

Par conséquent :

$$K_p = K_{pc} \cos \Psi \quad (12.10)$$

L'auto-ajustement d'un régulateur PID avec marge de phase imposée est conduit de la façon suivante. Un régulateur tout-ou-rien est d'abord monté en boucle fermée (fig. 12.16). L'amplitude  $a_c$  de l'oscillation est mesurée, de même que sa période  $T_c$ ; les nombres  $K_{pc}$  (égalité (12.6)) et  $\omega_c = 2\pi/T_c$  sont calculés. La marge de phase  $\Psi$  étant spécifiée, le régulateur PID analogique est ensuite dimensionné à l'aide des relations (12.9), (12.8) et (12.10), puis numérisé et finalement implanté à la place du régulateur tout-ou-rien.

Seule une certaine marge de phase est garantie dans cette approche. La marge de gain peut être trop faible. Plutôt que de déplacer, à l'aide de  $K(j\omega)$ , l'intersection de  $G(j\omega)$  avec l'axe réel sur le point  $e^{j(-\pi+\Psi)}$ , il est plus judicieux d'opérer un mouvement vers un point combinant des marges de phase et de gain. L'expérience montre que le point  $0,5 e^{-j\frac{3\pi}{4}}$  est dans ce contexte un excellent compromis. Les égalités fixant le régulateur PID analogique deviennent :

$$T_d = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\omega_c}$$

$$T_i = 4 T_d$$

$$K_p = 0,5 K_{pc} \cos \frac{\pi}{4}$$

A la place d'un transfert de  $G(j\omega_c)$  sur le point  $e^{j(-\pi+\Psi)}$ , il est parfois préférable de déplacer  $G(j\omega_b)$ , où  $\omega_b$  est la pulsation de coupure en boucle fermée incluse dans les spécifications, sur ce point, avec  $\Psi$  proche de  $90^\circ$ . La boucle analogique est ainsi, dans une large mesure, calibrée selon les indications de l'annexe II (§ II.4.3). La détermination de  $G(j\omega_b)$  n'est pas effectuée à l'aide d'un élément tout-ou-rien, mais via un simple essai harmonique à la pulsation  $\omega_b$ .

### EXEMPLE 12.3

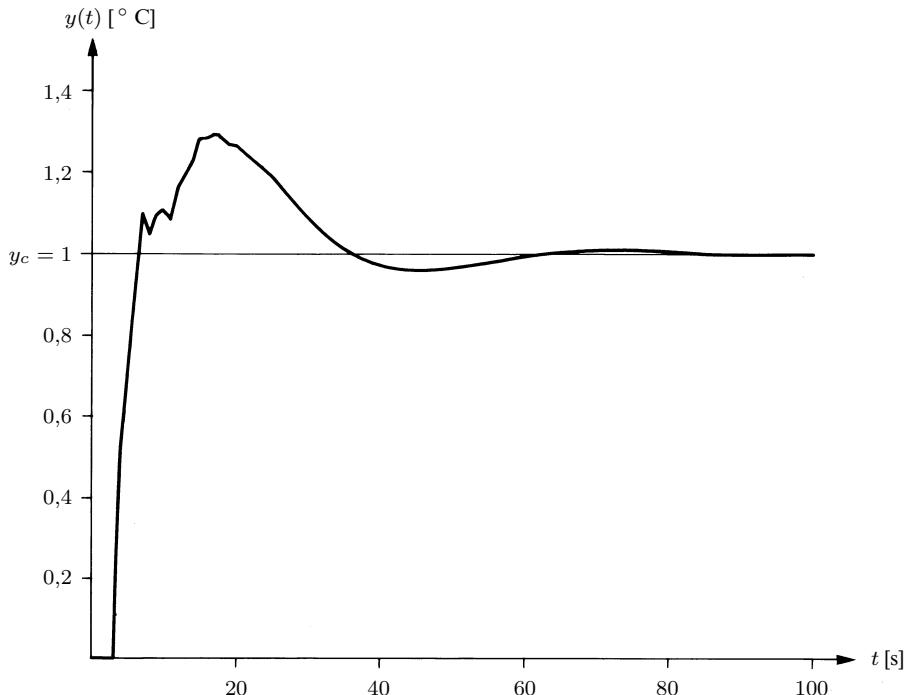
La cuve de mélange de l'exemple 12.2 est à nouveau considérée. La réponse en boucle fermée avec un régulateur tout-ou-rien a donné  $K_{pc} = 29$  et  $\omega_c = 2\pi/12$ ; d'où le régulateur PID analogique :

$$K(s) = 10,25 \left( 1 + \frac{1}{9,2 s} + 2,3 s \right)$$

Après numérisation, avec  $h = 1$  s :

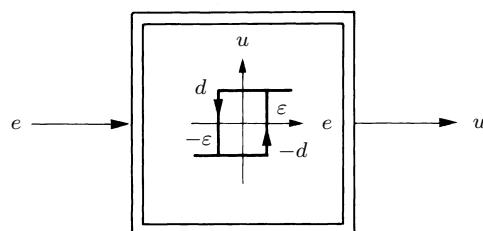
$$K'(z) = 10,25 \left( 1 + \frac{0,11z}{z-1} + 2,3 \frac{z-1}{z} \right)$$

La réponse indicelle du système en boucle fermée est reportée dans la figure 12.23. ■



**Fig. 12.23** Réponse indicelle en boucle fermée d'une cuve de mélange dans le cas d'un régulateur PID auto-ajusté par imposition de marges de gain et de phase.

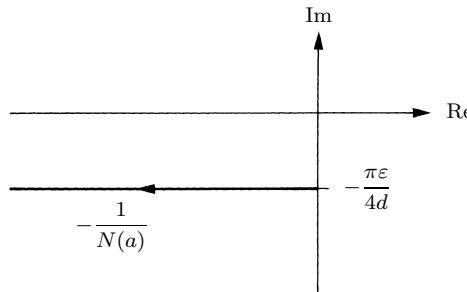
Une hystérésis  $\varepsilon$  est maintenant introduite dans le régulateur tout-ou-rien (fig. 12.24).



**Fig. 12.24** Régulateur tout-ou-rien avec hystérésis.

Comme cela est rappelé dans l'annexe II, le lieu critique devient une demi-droite d'ordonnée négative  $-\frac{\pi\varepsilon}{4d}$  (fig. 12.25) :

$$-\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi}{4d} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} - j \frac{\pi\varepsilon}{4d}$$



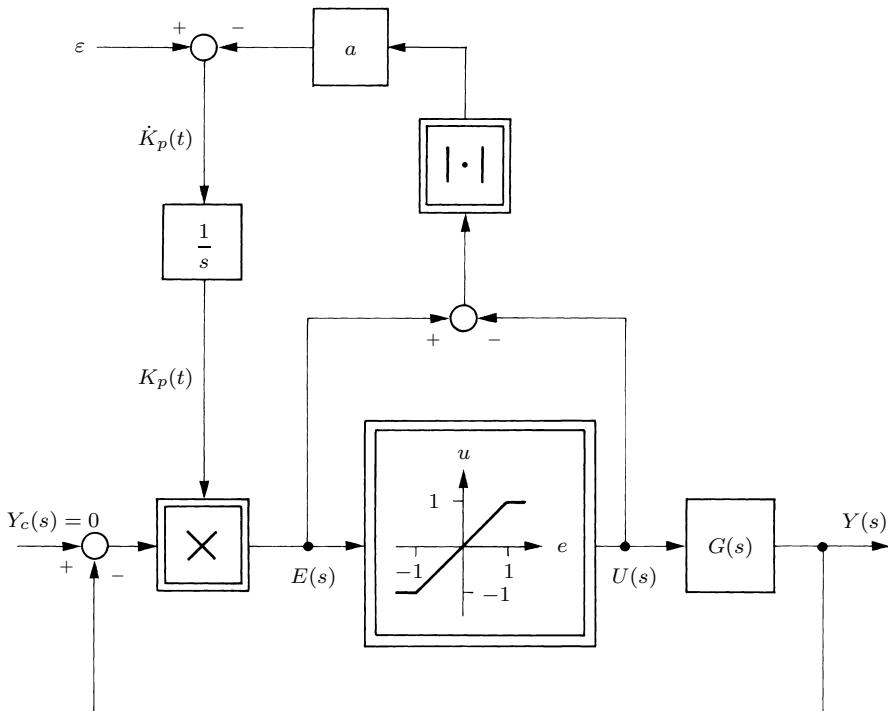
**Fig. 12.25** Lieu critique pour un élément tout-ou-rien avec hystérésis.

Il est dès lors possible d'identifier l'intersection de  $G(j\omega)$  avec cette demi-droite, ce qui se révèle utile quand la courbe  $G(j\omega)$  ne coupe pas l'axe réel négatif. L'ordonnée de la demi-droite est modifiée en variant l'hystérésis.

Dans le but de synthétiser un régulateur  $K(j\omega)$  par calibrage de la boucle (§ II.4.3), plusieurs valeurs de  $G(j\omega)$  peuvent être mesurées harmoniquement autour de la pulsation de coupure en boucle fermée  $\omega_b$  spécifiée. Les paramètres de  $K(j\omega)$  sont ensuite déterminés de manière à déplacer au mieux les valeurs identifiées de  $G(j\omega)$  sur un profil désiré pour la fonction de transfert en boucle ouverte  $K(j\omega)G(j\omega)$ . Un exemple de profil très simple est  $\omega_b/s$ . Il importe ici de tirer bénéfice de la forme parallèle du régulateur PID afin que les paramètres inconnus apparaissent linéairement (§ 1.7.4). Leur évaluation peut être effectuée par la méthode de Levy (ex. 11.4), réalisant une optimisation par moindres carrés. Cette philosophie ne se restreint pas au régulateur PID parallèle ; elle peut être mise à profit pour n'importe régulateur décrit par une fonction de transfert rationnelle, qui plus est analogique ou discrète. De surcroît, il est possible de montrer que des contraintes linéaires liées à la robustesse de la stabilité et des performances peuvent être imposées. Il en résulte un problème d'optimisation convexe ; un algorithme d'optimisation quadratique se révèle particulièrement bien adapté pour en trouver la solution.

Nous avons relevé dans l'exemple 12.2 une certaine imprécision dans le calcul de  $K_{pc}$  et de  $T_c$  (ou  $\omega_c$ ), imprécision due à la nature approximative de la méthode du premier harmonique. La dégradation des résultats est d'autant plus marquée que le processus à commander n'agit pas comme un filtre passe-bas efficace. Il est certes possible d'examiner plus finement la sortie de l'élément tout-ou-rien par extraction de sa composante fondamentale. L'approche de l'exemple 11.2 ou une analyse de Fourier se révèlent intéressantes dans ce contexte. On propose maintenant une alternative particulièrement efficace, parce que produisant intrinsèquement moins d'harmoniques qu'un dispositif tout-ou-rien.

Comme cela est illustré dans la figure 12.26, un élément non linéaire de type saturation (§ 8.3.5), complété par une boucle adaptant le gain de la partie linéaire de cette saturation, remplace le régulateur tout-ou rien de la figure 12.16.



**Fig. 12.26** Schéma fonctionnel pour la détermination du gain et de la pulsation critique.

Dans cette figure, le bloc  $| \cdot |$  fournit une sortie égale à la valeur absolue de l'entrée tandis que l'élément  $\times$  délivre le produit de ses entrées. Par ailleurs,  $\varepsilon$  et  $a$  sont des constantes positives, avec  $\varepsilon \ll a$ ;  $K_p(t)$  est un gain variable dans le temps assujetti à l'équation :

$$\dot{K}_p(t) = -a|e(t) - u(t)| + \varepsilon \quad (12.11)$$

Si  $\varepsilon = 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} K_p(t) \in [0, K_{pc}]$  quelle soit la condition initiale de l'intégrateur  $1/s$ . En effet, supposons pour commencer que  $K_p(0) \in [0, K_{pc}]$ . Quand la saturation est inactive, les signaux  $e(t)$  et  $u(t)$  sont égaux et  $\dot{K}_p(t) = 0$ , de sorte que  $K_p(t) = K_p(0) \in [0, K_{pc}], t \geq 0$ . Si la saturation est activée dans certains intervalles de temps,  $|e(t) - u(t)|$  est positif dans ces intervalles et  $\dot{K}_p(t) = -a|e(t) - u(t)| < 0$ :  $K_p(t)$  devient plus petit que  $K_p(0)$ . Le gain diminuant, l'amplitude de  $e(t)$  se réduit et la saturation n'est plus activée lorsque  $K_p(t)$  est suffisamment affaibli. Cela implique que  $K_p(t)$  cesse de décroître avant de devenir négatif. On en conclut que  $\lim_{t \rightarrow \infty} K_p(t) \in [0, K_{pc}]$ .

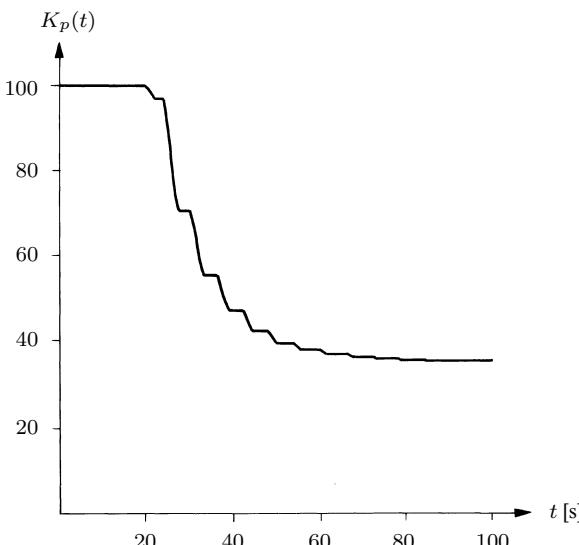
Considérons maintenant la situation où  $K_p(0) > K_{pc}$ . Le système bouclé est donc instable et la saturation est inéluctablement activée après un certain temps. Par conséquent,  $\dot{K}_p(t) < 0$  dans certains intervalles et  $\dot{K}_p(t) = 0$  dans d'autres. Quoiqu'il en soit,  $K_p(t)$  décroît tant que  $K_p(t) > K_{pc}$ ; après un temps fini,  $K_p(t) \in [0, K_{pc}]$  et on se trouve dans la situation décrite dans les lignes ci-dessus ; au final,  $\lim_{t \rightarrow \infty} K_p(t) \in [0, K_{pc}]$ .

Admettons ensuite que  $\varepsilon > 0$ . Quand la saturation est inactive,  $\dot{K}_p(t) = \varepsilon$  si bien que  $K_p(t) = K_p(0) + \varepsilon t$  et  $K_p(t)$  devient plus grand que  $K_{pc}$  en un temps fini. La saturation est ainsi inévitable. Alors  $\dot{K}_p(t) = -a|e(t) - u(t)| + \varepsilon$  et, puisque  $\varepsilon \ll a$ ,  $\dot{K}_p(t)$  devient négatif. Le gain diminue jusqu'à ce que  $\dot{K}_p(t) = -a|e(t) - u(t)| + \varepsilon = 0$  ou  $|e(t) - u(t)| = \varepsilon/a$ . Comme  $\varepsilon \ll a$ , la saturation est pratiquement désactivée et le cycle recommence.

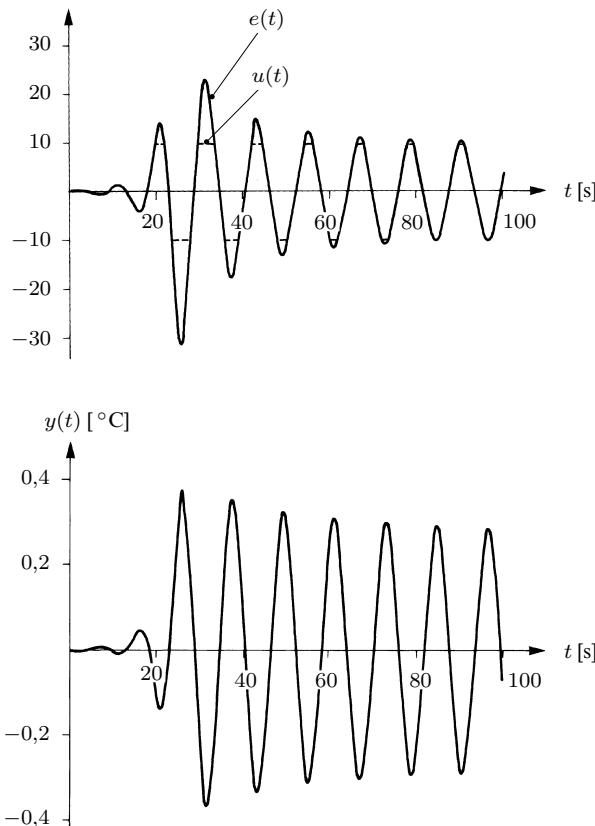
Donc le gain  $K_p(t)$  diminue quand la saturation est active et, dans le cas contraire, croît avec un taux égal à  $\varepsilon$ . Vu que  $\varepsilon \ll a$ , un retour de  $K_p(t)$  dans l'intervalle  $]K_{pc}, \infty[$  prend plus de temps qu'un passage à  $K_p(t) \in [0, K_{pc}]$ . En régime d'oscillation stationnaire,  $K_p(t)$  fluctue dans un voisinage de  $K_{pc}$  avec une amplitude d'autant plus faible que  $\varepsilon$  est petit vis-à-vis de  $a$ . La saturation n'est que marginalement activée : la production d'harmoniques est minime, améliorant substantiellement, par rapport à l'utilisation d'un élément tout-ou-rien, la précision des résultats.

#### EXEMPLE 12.4

Dans le contexte des exemples 12.2 et 12.3, on remplace le régulateur tout-ou-rien par l'arrangement de la figure 12.26, avec  $\varepsilon = 0,005$ ,  $a = 0,5$  et  $K_p(0) = 100$ ;



**Fig. 12.27** Signaux  $K_p(t)$ ,  $e(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  dans le cas d'une cuve de mélange équipée du montage de la figure 12.26 avec  $\varepsilon = 0,005$ ,  $a = 0,5$  et  $K_p(0) = 100$ .



**Fig. 12.27** (Suite et fin.)

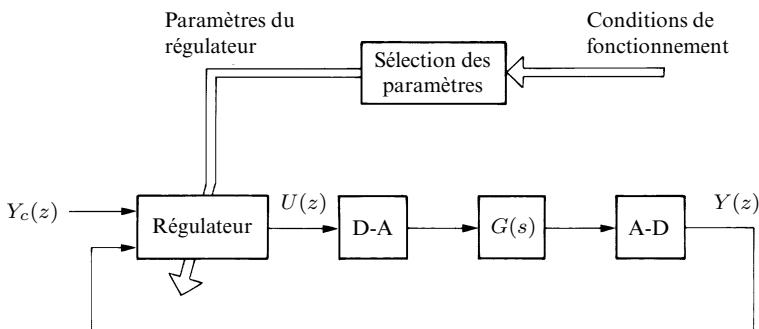
plutôt que pour  $e \in [-1, 1]$  et  $u \in [-1, 1]$ , l'élément saturation est linéaire pour  $e \in [-10, 10]$  et  $u \in [-10, 10]$ , ceci afin de générer des signaux d'amplitudes suffisantes. La figure 12.27 montre l'évolution temporelle de  $K_p(t)$ , de  $e(t)$  et  $u(t)$ , ainsi que de  $y(t)$ . En régime d'oscillation stationnaire, le gain  $K_p(t)$  fluctue dans l'intervalle  $[35,54, 35,59]$  alors que  $K_{pc} = 35,55$  (ex. 12.2); par ailleurs, la saturation n'est pratiquement pas activée et la période des oscillations mesurée sur la sortie  $y(t)$ , laquelle n'exhibe presque pas d'harmoniques, est égale à la valeur théorique calculée dans l'exemple 12.2. ■

En mode saturation, une décroissance plus rapide de  $K_p(t)$  est obtenue en remplaçant (12.11) par :

$$\dot{K}_p(t) = -a(e(t) - u(t))^2 + \varepsilon$$

## 12.4 Régulateur à gains programmés

Il arrive parfois qu'une ou plusieurs variables auxiliaires présentant une corrélation marquée avec les conditions de fonctionnement du système en boucle fermée soient disponibles. Dans une telle situation, dimensionnons et stockons hors-ligne plusieurs régulateurs, chaque régulateur étant associé à des conditions de fonctionnement bien distinctes. Après, en temps réel, selon ces régions saisies par les variables auxiliaires, les paramètres du régulateur sont sélectionnés parmi les valeurs fixes mémorisées, puis commutés d'un jeu à un autre. Les changements des conditions de fonctionnement ont, en comparaison avec un régulateur dont les paramètres sont figés une fois pour toutes, des séquelles fortement atténuees. Une telle philosophie est appelée **commande à gains programmés** ou, en anglais, **gain scheduling**. Elle est décrite dans la figure 12.28 et s'applique à des régulateurs quelconques, par exemple de type PID ou RST. Un soin particulier doit être consenti lors d'une transition ; une interpolation des paramètres du régulateur se révèle souvent nécessaire. La stabilité du montage ne peut pas toujours être garantie, même si elle est assurée indépendamment avec chaque régulateur.



**Fig. 12.28** Régulateur à gain programmés ;  $G(s)$  dénote la fonction de transfert du processus à commander.

### EXEMPLE 12.5

Soit une bobine de papier ou autre matériau flexible qui alimente une machine imprimant et confectionnant des emballages. Un régulateur de la tension du papier est nécessaire afin d'éviter sa rupture. L'inertie de la bobine varie considérablement suivant son état de déroulement. Il est dès lors naturel d'adopter un régulateur à gains programmés : des régulateurs sont dimensionnés hors ligne pour divers états, par exemple bobine 100 % pleine, 75 % pleine, 50 % pleine, 25 % pleine. En temps réel, connaissant l'état de déroulement, un jeu de paramètres du régulateur est choisi dans la table stockée, puis modifié lors du passage d'un état à un autre. Les effets des variations d'inertie sont de la sorte pratiquement gommés.

Comme cela a été mentionné à la fin du paragraphe 10.3.5, le polynôme  $T(z)$  d'un régulateur RST requiert normalement une adaptation lors d'un changement du type de consigne : il s'agit de programmer certains paramètres du régulateur en fonction de la consigne. Par ailleurs, signalons ici que les régulateurs à gains programmés sont abondamment exploités dans le domaine aéronautique où les modèles aérodynamiques varient grandement avec le nombre de Mach ou la pression dynamique (dépendant de la vitesse et de la densité de l'air), lesquelles se révèlent être des variables auxiliaires de premier choix.

Une controverse existe quant à l'appartenance ou non d'une commande à gains programmés à la famille adaptative ; en effet, le mécanisme d'ajustement s'effectue en boucle ouverte puisqu'il n'existe aucune rétroaction directe compensant un choix erroné des paramètres du régulateur.

La mise à jour du régulateur est très rapide car ses paramètres sont fixés avant le démarrage. Toutefois, le volume de calcul à traiter hors-ligne est important : il s'agit de dimensionner une banque de régulateurs. Une touche d'auto-ajustement peut être activée pour les diverses conditions de fonctionnement et constitue dans ce contexte une aide très précieuse.

## 12.5 Problèmes

**12.5.1** Développer un schéma de commande adaptative direct avec un régulateur RST incorporant un intégrateur de type  $\ell$ .

**12.5.2** Soit la cuve de mélange modélisée par la fonction de transfert :

$$G(s) = e^{-3s} \frac{0,015}{s + 0,015}$$

Après avoir calculé sa réponse indicielle, synthétiser des régulateurs P, PI et PID analogiques par la première méthode de Ziegler-Nichols. Numériser ensuite ces résultats, avec une période d'échantillonnage  $h = 1$  s. A l'aide d'un logiciel de simulation, évaluer les réponses indicielles en boucle fermée avec les régulateurs numériques ainsi obtenus.

**12.5.3** Soit un régulateur RST incorporé dans un schéma adaptif direct. L'équation (12.2) fournit le système à commander paramétrisé avec les polynômes  $A_m(z)$ ,  $A_0(z)$ ,  $B^-(z)$ ,  $S(z)$  et  $R(z)$  :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B^-(z)R(z)}{A_m(z)A_0(z) - B^-(z)S(z)}$$

Ou :

$$A_m(z)A_0(z)Y(z) = B^-(z)R(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z)$$

Quand  $B^-(z)$  est une fonction de  $z$  distincte de la constante  $b_0$ , pourquoi n'est-il pas possible d'identifier les polynômes  $B^-(z)R(z)$  et  $B^-(z)S(z)$ , qui apparaissent pourtant linéairement dans cette équation ?

**12.5.4** Soient le processus à commander échantillonné et le régulateur PID numérique non filtré :

$$H(z) = \frac{b_0 z}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$K(z) = K_p \left( 1 + \frac{\frac{h}{T_i} z}{z - 1} + T_d \frac{z - 1}{z} \right)$$

Ecrire ce régulateur sous la forme :

$$K(z) = \frac{s_0 z^2 + s_1 z + s_2}{z(z - 1)}$$

Dimensionner les paramètres  $s_0$ ,  $s_1$  et  $s_2$ , puis  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  du régulateur en imposant que les pôles du système en boucle fermée soient les zéros du polynôme donné  $z(z^2 + c_1 z + c_2)$ . En déduire une méthode d'auto-ajustement du régulateur PID, puis imaginer un schéma de commande adaptative indirect incorporant un régulateur PID.

**12.5.5** Dans l'exemple 12.2, démontrer que l'auto-oscillation provoquée par un régulateur tout-ou-rien est stable.

**12.5.6** Dans l'exemple 12.2, calculer le gain et la période critique intervenant dans la seconde méthode de Ziegler-Nichols.

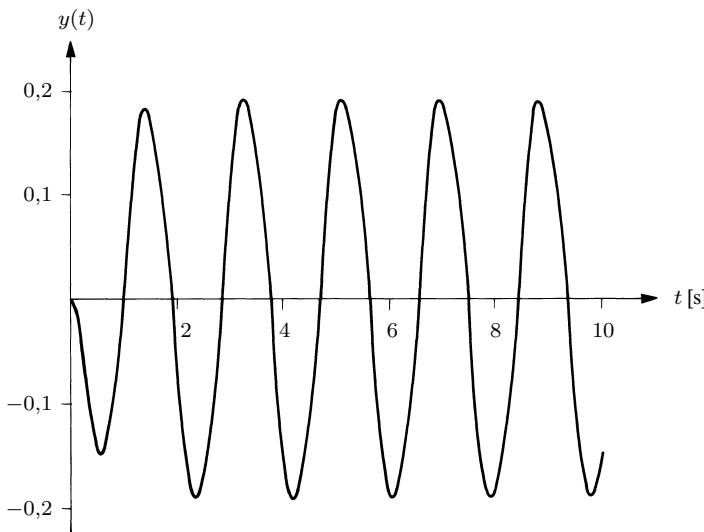
**12.5.7** Utiliser les équations (12.9), (12.8) et (12.10) pour synthétiser un régulateur PID analogique pour l'exemple 12.2. Après numérisation, et à l'aide d'un logiciel de simulation et de conception, déterminer la réponse indicielle en boucle fermée. Expliquer le mauvais comportement obtenu en calculant la marge de gain.

**12.5.8** De la même manière que dans la section 12.3, développer une méthode d'auto-ajustement d'un régulateur proportionnel dérivé numérique par imposition de marges. Est-il possible de mettre à profit cette approche pour auto-ajuster un régulateur proportionnel intégral ?

**12.5.9** A l'aide d'un logiciel de simulation et de conception, calculer dans l'exemple 12.3 les marges de gain et de phase.

**12.5.10** En s'inspirant de l'approche de la section 12.3, développer une méthode d'auto-ajustement d'un régulateur proportionnel garantissant une marge de gain.

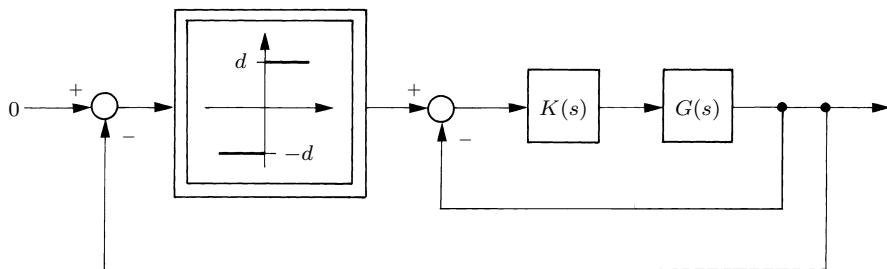
**12.5.11** La commande tout-ou-rien d'un processus a fourni la sortie reportée dans la figure 12.29.



**Fig. 12.29** Réponse en boucle fermée avec un régulateur tout-ou-rien.

L'amplitude du régulateur tout-ou-rien est égale à  $d = 0,5$ . Dimensionner un régulateur PID fondé sur la seconde méthode de Ziegler-Nichols. Dimensionner ensuite un régulateur PID garantissant une marge de phase valant  $\Psi = 45^\circ$ .

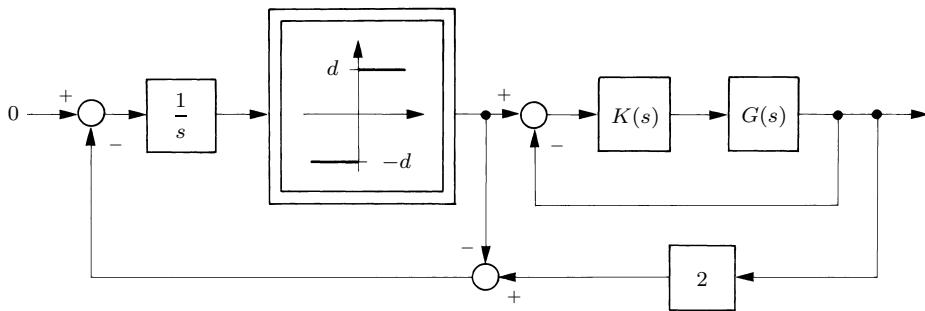
**12.5.12** Soit le système décrit par le schéma fonctionnel de la figure 12.30.



**Fig. 12.30** Montage permettant d'estimer la marge de gain.

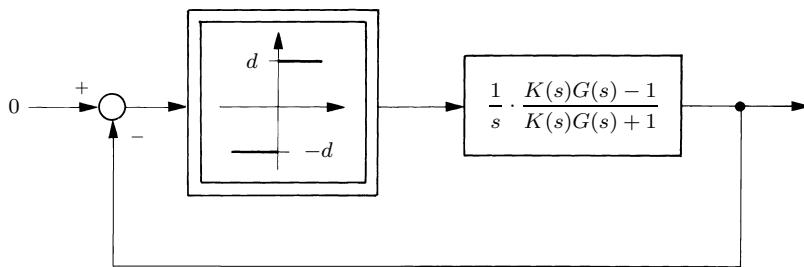
Démontrer que ce montage permet d'estimer la marge de gain du système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est  $K(s)G(s)$ .

**12.5.13** Soit le système décrit par le schéma fonctionnel de la figure 12.31.



**Fig. 12.31** Montage permettant d'estimer la marge de phase.

Prouver que le schéma fonctionnel de la figure 12.31 est équivalent à celui de la figure 12.32.



**Fig. 12.32** Schéma fonctionnel équivalent à celui de la figure 12.31.

En mettant à profit ce schéma fonctionnel réduit, démontrer qu'il est possible d'estimer la marge de phase du système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est  $K(s)G(s)$ .

**12.5.14** La fonction de transfert harmonique  $G(j\omega)$  d'un processus est mesurée pour  $\omega = \omega_b$ . Déterminer les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  d'un régulateur PID garantissant une marge de phase  $\Psi$  spécifiée. On imposera  $T_i = 4T_d$ . Décrire une procédure d'auto-ajustement d'un régulateur PID mettant à profit ces résultats.