

Examen

1) (20 points) Un système dynamique est donné par sa réponse indicielle :

$$y(t) = 0.25 - 0.25e^{-t} \cos \sqrt{3}t + 0.25\sqrt{3}e^{-t} \sin \sqrt{3}t, \quad t \geq 0$$

- Calculer la fonction de transfert de ce système.
- Évaluer le gain statique, la fréquence naturelle, l'amortissement, et les constantes de temps de ce système.
- Calculer et dessiner la réponse impulsionnelle du système.

Solution (si nécessaire, continuez au verso) :

a) Fonction de transfert : $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

10 points

$$Y(s) = 0.25 \cdot \frac{1}{s} - 0.25 \frac{s+1}{(s+1)^2+3} + 0.25\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3} = 0.25 \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+3} + \frac{3}{(s+1)^2+3} \right) =$$

$$= 0.25 \left(\frac{s^2+2s+4 - s^2 - s + 3s}{s((s+1)^2+3)} \right) = \frac{s+4}{s((s+1)^2+3)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad (\text{indicielle}) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(s+1)}{s((s+1)^2+3)} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3}$$

b) Gain statique : $K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{1}{4}$

5 points

* Forme canonique $G(s) : \frac{k(\zeta s+1)}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$

$\Rightarrow$ Fréquence : $\omega_0 = 2$

Amortissement : $\zeta = 0.5$

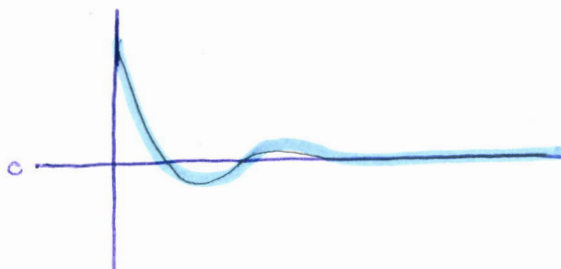
Const. temps : $\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{2}$

c) $U(s) = 1$ (impulsionnelle).

5 points

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} ; Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3} \right] = e^{-t} \cos(\sqrt{3}t)$$



a)

$$0 < t < 6$$

$$U(t) = t/2$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(t) = t/2$$

$$6 < t < 7$$

$$U(t) = 9 - t$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(t-6) \cdot (9 - 3t/2) \quad \underline{2}$$

$$7 < t$$

$$U(t) = 2$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(t-7) \cdot (t-7)$$

$$U(t) = t/2 \mathcal{L}(t) + (9 - 3t/2) \mathcal{L}(t-6) + (t-7) \mathcal{L}(t-7) = t/2 \mathcal{L}(t) - 3/2 (t-6) \mathcal{L}(t-6) + (t-7) \mathcal{L}(t-7) \quad \underline{2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2s^2} - \frac{3}{2s^2} e^{-6s} + \frac{1}{s^2} e^{-7s} = \frac{1 - 3e^{-6s} + 2e^{-7s}}{2s^2} \quad \underline{2}$$

$$b) y'(t) + 2y(t) = U(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)(s+2) = U(s) \rightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{s+2}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1 - 3e^{-6s} + 2e^{-7s}}{2s^2(s+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s^2(s+2)} - \frac{3e^{-6s}}{2} \frac{1}{s^2(s+2)} + e^{-7s} \frac{1}{s^2(s+2)} \quad \underline{2}$$

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{As^2+2As+Bs+2B+Cs^2}{s^2(s+2)} \rightarrow \begin{cases} A+C=0 \rightarrow C=-A \\ 2A+B=0 \rightarrow B=-2A \\ 2B=1 \rightarrow B=1/2 \end{cases} \quad \underline{2}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{s+2}{s^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} e^{-2t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{8} + \frac{t}{4} + \frac{1}{8} e^{-2t} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} (t-6) - \frac{3}{8} e^{-2(t-6)} - \frac{1}{4} + \frac{(t-7)}{2} + \frac{1}{4} e^{-2(t-7)} \quad \underline{2}$$

$$= \frac{1}{8} e^{-2t} - \frac{3}{8} e^{-2(t-6)} + \frac{1}{4} e^{-2(t-7)} + 1$$

$$d) y'(t) + 2y(t) = U(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)(s+2) - y(0) = U(s) \rightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{s+2} + \frac{y(0)}{s+2} \quad \underline{1}$$

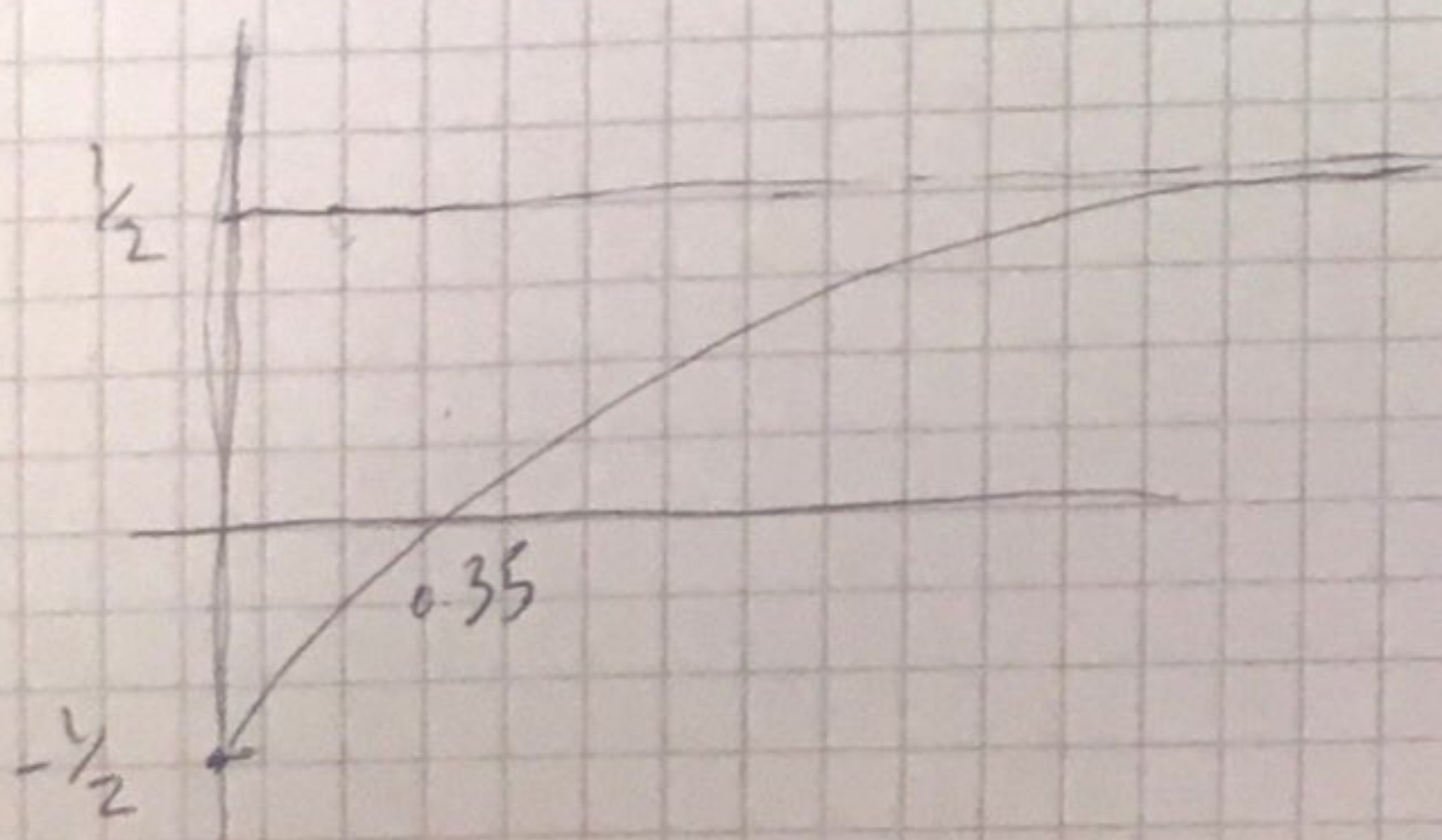
$$y(0) = -0.5$$

$$U(s) = 1/s$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+2)} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} \quad \underline{2}$$

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{As+2A+Bs}{s(s+2)} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow B=-A \\ 2A=1 \rightarrow A=1/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} \right] = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+2} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} \quad \underline{2}$$



$$c) y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{2} \quad \underline{3}$$