



# **Dynamique des Systèmes Mécaniques**

**Projet Printemps 2025**

**Equilibreuse pour arbres haute vitesse**

**Enoncé**

## 1. Introduction

Le projet consiste à étudier le comportement dynamique d'une équilibreuse pour arbres tournant à haute vitesse – de l'ordre de 3000 tours par seconde – sur paliers aérodynamiques. De tels arbres sont obtenus par tournage puis rectification afin d'atteindre les tolérances nécessaires pour garantir le fonctionnement des paliers aérodynamiques, qui requièrent des jeux radiaux dans l'ordre du micron. Ces arbres sont souvent entraînés par un moteur électrique synchrone à aimant permanent, fretté ou collé dans une cavité cylindrique à l'intérieur de l'arbre. Étant donné l'inhomogénéité des matériaux (notamment de l'aimant) et les imperfections d'usinage et d'assemblage, l'arbre possède toujours un déséquilibre plus ou moins important. En d'autres termes, son centre de gravité n'est pas aligné avec l'axe de rotation, ce qui crée des forces radiales non-négligeables, menaçant le bon fonctionnement des paliers. Un équilibrage et donc nécessaire, sur une machine dédiée – l'équilibreuse – où le balourd est mesuré puis corrigé itérativement par enlèvement de matière (meulage) à la surface de l'arbre.

Sur l'équilibreuse, le rotor (R) est typiquement mis en rotation par une courroie entraînée par un moteur à courant continu. Deux supports crantés (S), chacun monté sur deux lames flexibles (L), supportent l'arbre de manière souple afin de permettre un déplacement du système dû à l'action des balourds en rotation. L'accélération latérale des supports est mesurée grâce à un accéléromètre (A) fixé sur chacun des supports. Voir la Figure 1 pour le contexte.

**Remarque:** le système de coordonnées de la figure est placé au centre de gravité du rotor.

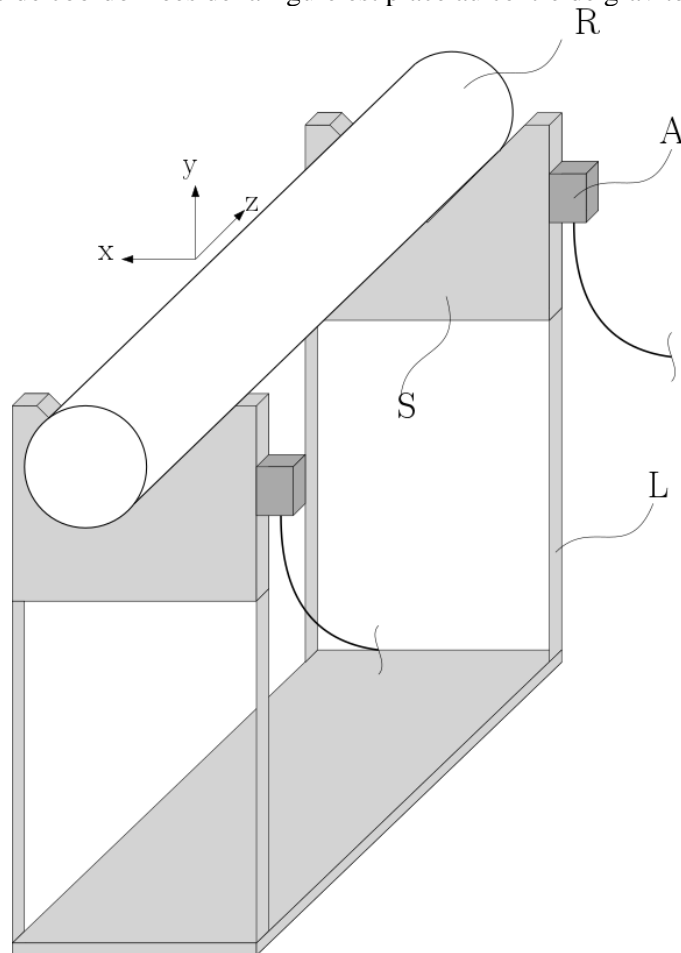


Figure 1. Arbre et structure pour l'équilibrage

## 2. Données

### 2.1 Rotor

Le rotor est un assemblage de deux pièces : un arbre en acier et un aimant permanent composé de terres rares dans une matrice de fer doux. La position axiale du balourd correspond à celle du centre de masse de l'aimant. Voir la Figure 2 pour les valeurs associées dans le Tableau 1.

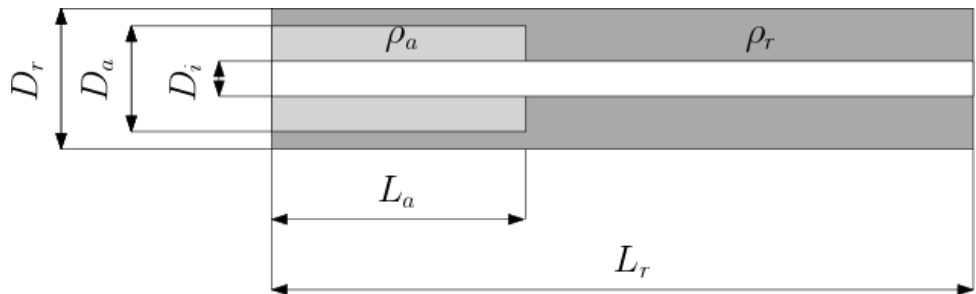


Figure 2. Géométrie du rotor

Tableau 1. Les propriétés géométriques et physiques associées sont données

			Cas A	Cas B	Cas C	Cas D
Arbre	Densité	$\rho_r / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	8000			
Arbre	Diamètre	$D_r / \text{mm}$	9	11	13	15
Arbre	Longueur	$L_r / \text{mm}$	90	110	130	150
Aimant	Densité	$\rho_a / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	7000			
Aimant	Diamètre	$D_a / \text{mm}$	7	9	11	13
Aimant	Longueur	$L_a / \text{mm}$	45	55	65	75
Rotor	Diamètre intérieur	$D_i / \text{mm}$	1.5	3.5	5	7

### 2.2 Supports

Le rotor est installé sur les deux supports, de manière qu'ils soient positionnés respectivement à 10% et 90% de la longueur de l'arbre. Les lames flexibles sont fixées au sol d'un côté et aux supports de l'autre, et ses propriétés sont données dans le Tableau 2.

Tableau 2. Les propriétés des lames

			Cas A	Cas B	Cas C	Cas D
Lame	Module d'élasticité	$E_l / \text{GPa}$	70			
Lame	Longueur	$L_l / \text{mm}$	25	32.5	42.5	47.5
Lame	Hauteur	$h_l / \text{mm}$	7.5			
Lame	Épaisseur	$t_l / \text{mm}$	0.75			

Chaque support est équipé d'un accéléromètre ayant une fréquence de coupure à 200 Hz et une étendue de mesure de 0.005 à 1  $\text{m/s}^2$ .

## 2.3 Entraînement

Le système d'entraînement est composé par : un moteur à courant continu (M), 5 poulies identiques (P1-5), une courroie plate (C) et le rotor (R) comme illustré à la

Figure 3. Les propriétés des différents éléments sont données dans Tableau 3.

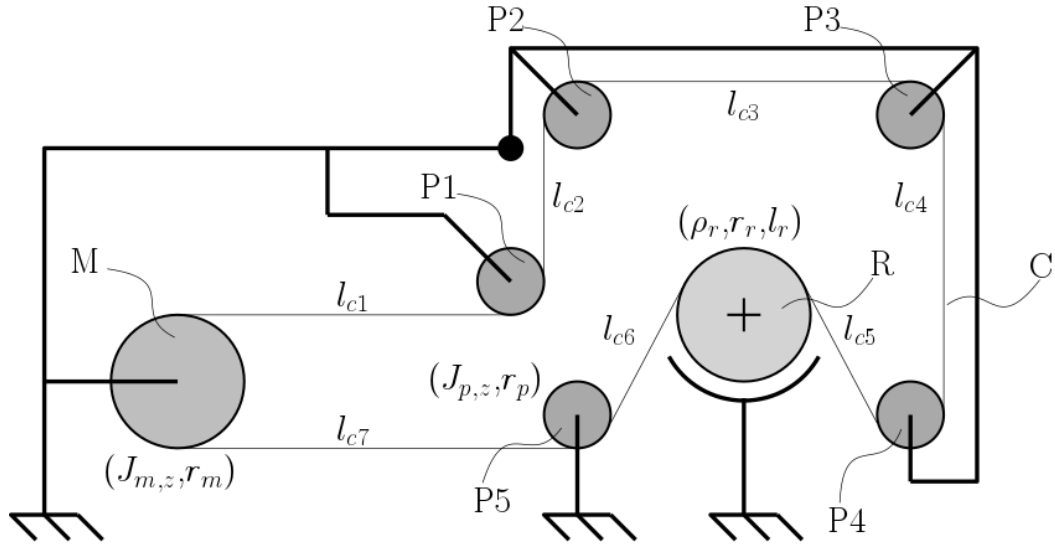


Figure 3. Le système d'entraînement

Tableau 3. Les propriétés du système d'entraînement

			Cas A	Cas B	Cas C	Cas D
Moteur	Diamètre	$D_m / \text{mm}$	38	45	52	62
Moteur	Moment d'inertie	$J_{mz} / \text{kg} \cdot \text{mm}^2$	28	32	42	58
Poulie	Diamètre	$D_p / \text{mm}$	20			
Poulie	Moment d'inertie	$J_{pz} / \text{kg} \cdot \text{mm}^2$	0.20	0.25	0.28	0.32
Courroie	Module d'élasticité	$E_c / \text{GPa}$	2			
Courroie	Epaisseur	$t_c / \text{mm}$	0.8			
Courroie	Largeur	$h_c / \text{mm}$	9	11	13	15
Courroie	Longueur	$l_{c1} / \text{mm}$	280			
Courroie	Longueur	$l_{c2} / \text{mm}$	150			
Courroie	Longueur	$l_{c3} / \text{mm}$	200			
Courroie	Longueur	$l_{c4} / \text{mm}$	190			
Courroie	Longueur	$l_{c5} / \text{mm}$	120			
Courroie	Longueur	$l_{c6} / \text{mm}$	120			
Courroie	Longueur	$l_{c7} / \text{mm}$	300			

### 3. Accélération du groupe d'entraînement

Une batterie de mesure a permis de modéliser la caractéristique du rotor (couple résistant vs. vitesse angulaire) comme étant une fonction affine ( $T = b + a\omega$ ) avec les valeurs du Tableau 4. La vitesse maximale du rotor est 12 kRPM.

Tableau 4. Les valeurs empiriques pour le couple de résistance du rotor

			Cas A	Cas B	Cas C	Cas D
A vitesse nulle	Couple résistant	$T(\omega=0) / \text{mN}\cdot\text{m}$	1.4	2.3	3.2	4.1
A vitesse maximale	Couple résistant	$T(\omega=\omega_{\max}) / \text{mN}\cdot\text{m}$	5.6	9.2	13.0	16.6

Déterminez le couple moteur nécessaire pour garantir le fonctionnement stationnaire lorsque le rotor tourne à sa vitesse maximale, en tenant compte du couple de résistance du rotor. A l'aide d'un modèle cinématique réduit à la coordonnée angulaire du moteur, estimez ensuite le temps de démarrage du système moteur-poulies-rotor (durée pour atteindre 99% de la vitesse nominale).

#### **4. Analyse dynamique du groupe d'entraînement**

Compte tenu de la fréquence de coupure des accéléromètres, l'arbre pourrait être accéléré jusqu'à la vitesse maximale de 12 kRPM. Afin de garantir le bon fonctionnement du système moteur-poulies-rotor, vérifiez qu'il opère bien en régime sous-critique. Pour cela, proposez un modèle dynamique du système, réduit à la coordonnée angulaire du moteur, et déterminez sa/ses fréquence(s) propre(s). Réfléchissez à comment la modélisation pourrait être simplifiée et indiquez l'erreur sur la fréquence naturelle causée par les simplifications.

Hypothèses :

- La masse de la courroie est négligeable.
- Les lames flexibles sont suffisamment rigides pour ne pas intervenir dans le comportement dynamique du système moteur-poulies-rotor.

## 5. Réponse forcée de rotor

Afin d'obtenir un équilibrage fin du rotor, on souhaite pouvoir identifier et corriger des balourds allant de 0.1% à 0.001% du produit de la masse du rotor avec son rayon. Cette détection s'effectue en mesurant l'accélération des deux supports, excités par le rotor et son balourd, en régime sur-critique. La masse des supports ayant une influence significative sur le comportement du système rotor-supports, déterminez leur masse minimale pour garantir des accélérations mesurables par les accéléromètres installés (pas de saturation). Pour ce faire, établissez un modèle dynamique à 2 degrés de liberté du système rotor-supports, déterminez ses fréquences propres, puis analysez sa réponse forcée au balourd (min. et max.) du rotor.

~~Pour finir, si l'on souhaitait remplacer les accéléromètres par des capteurs de déplacement, déterminez la sensibilité qu'ils devraient avoir afin d'identifier le balourd minimal.~~

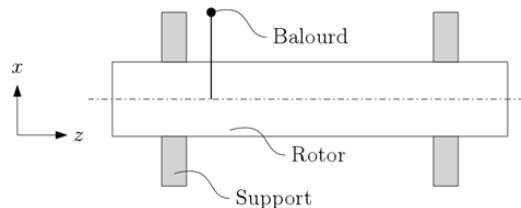


Figure 4. Rotor, balourd, et support

Hypothèses :

- Le rotor est infiniment rigide.
- Les deux supports sont identiques et ne subissent pas de rotation.
- La vitesse maximale du rotor est de 12'000 RPM mais peut être réglée à une vitesse inférieure.
- Les effets inertiels liés aux lames et aux accéléromètres peuvent être considérés comme négligeables.

Clarification:

La masse de soutien influence la dynamique du système. Nous recherchons la masse d'appui minimale telle que

- Pour chaque balourd de la plage de balourds
- Il existe une **vitesse supercritique**, inférieure à 12 kRPM, à laquelle (telle que)
- La réponse d'accélération des **deux** supports se situe dans la plage min/max mesurable par les accéléromètres.

Astuce : comment la réponse des supports dépend-elle du déséquilibre ? Est-il suffisant de vérifier les déséquilibres min et max ?