

Résumé

Précision du
mouvement

- Souvent une machine doit exécuter un mouvement précis

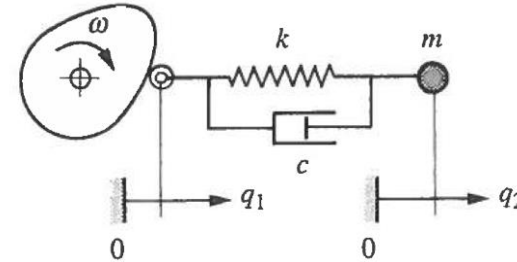
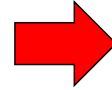
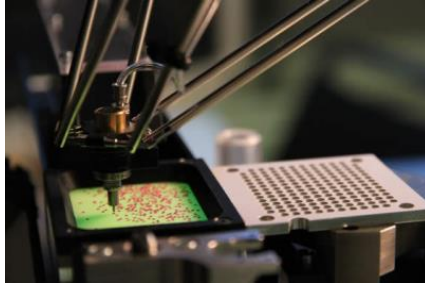
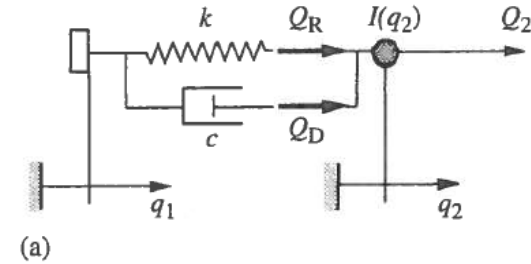
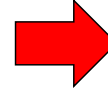
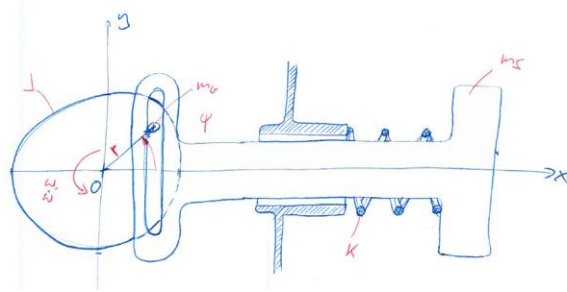


Figure 15.21
[Spinnler]

- Un mécanisme précis veut que la différence entre le parcours utile q_2 et sa commande q_1 soit aussi faible que possible
- Mécanisme à commande positive

- Analyse de l'erreur de positionnement d'un système uniforme soumis à un mouvement harmonique



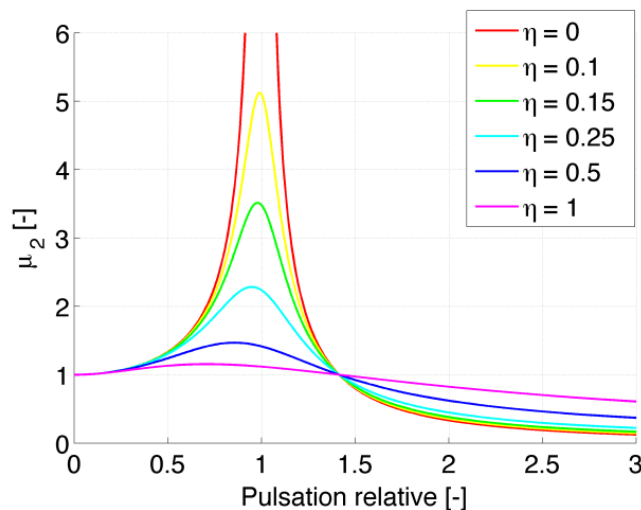
Extrait de la Figure 15.9
[Spinnler]

$$I\ddot{q}_2 + c\dot{q}_2 + kq_2 = Q_2 + c\dot{q}_1 + kq_1$$

$$q_1 = \hat{q}_1 \sin \Omega t$$

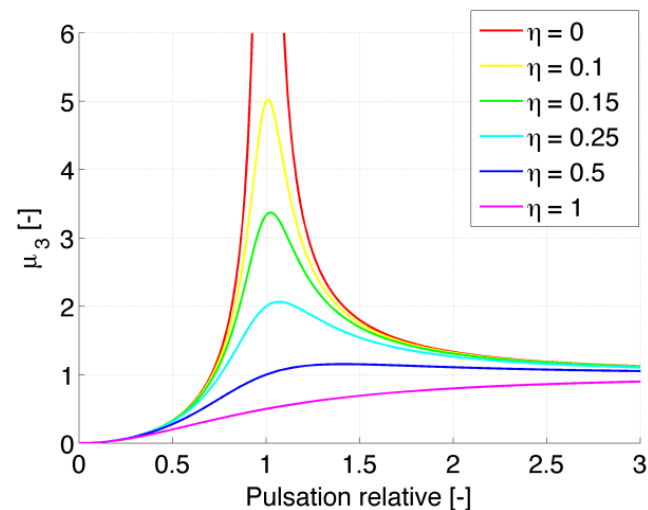
$$I\ddot{E} + c\dot{E} + kE = I\ddot{q}_1 + Q_2$$

- Comportement dynamique



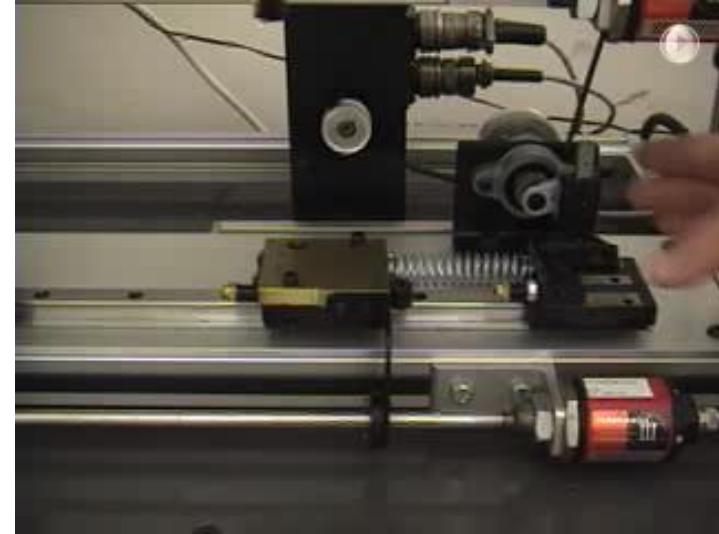
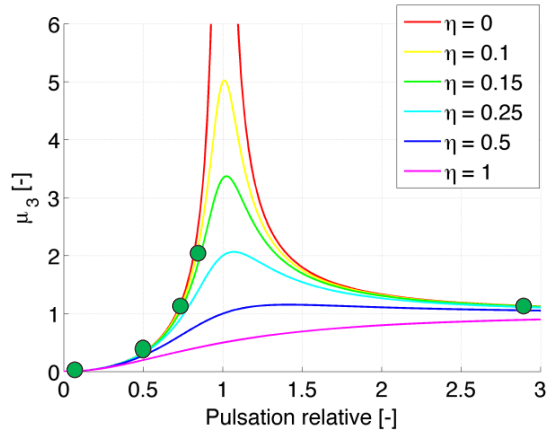
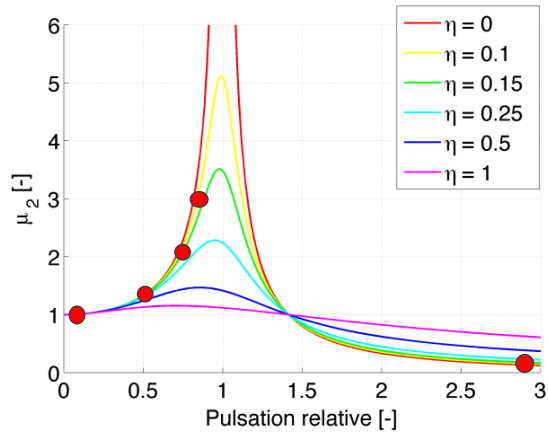
$$q_2 = \hat{q}_1 \mu_2 \sin(\Omega t - \varphi_2)$$

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{1 + 4\eta^2 \beta^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2 \beta^2}}$$

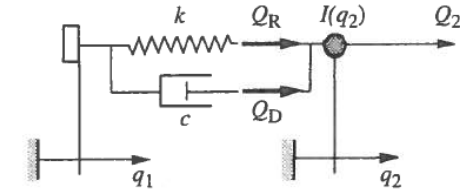


$$E = \hat{q}_1 \mu_3 \sin(\Omega t - \varphi_3)$$

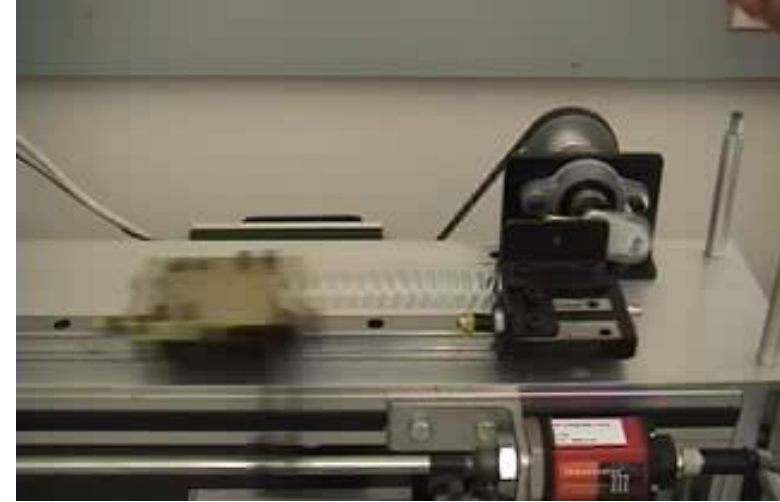
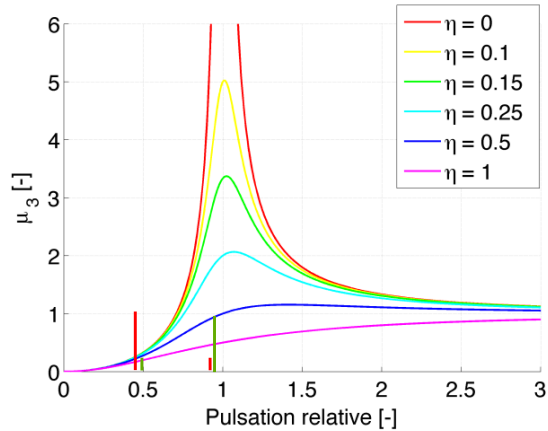
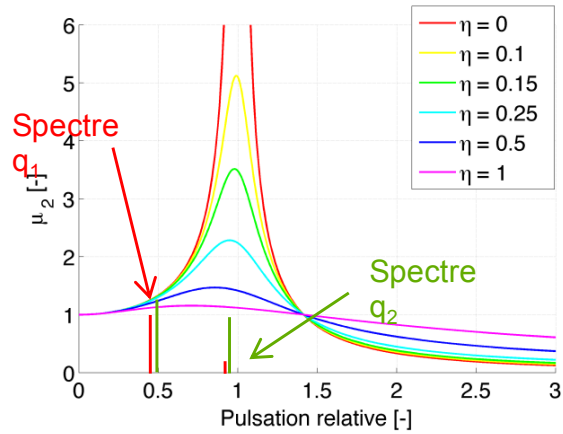
$$\mu_3 = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2 \beta^2}}$$



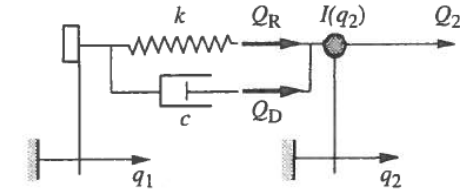
$$q_1 = \hat{q}_1 \sin \Omega t$$



(a) Extrait de la Figure 15.9
[Spinnler]



$$q_1 = \hat{q}_1 \sin \Omega t + \frac{\hat{q}_1}{6} \sin 2\Omega t$$



(a) Extrait de la Figure 15.9
[Spinnler]

- Quelle est la sollicitation dynamique qui agit sur la transmission d'une commande positive?
 - Toute structure peut être modélisée par une rigidité (k) et par une dissipation (c)

$$Q_R = kf$$

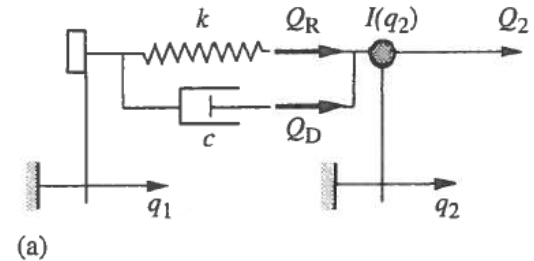
$$Q_D = c\dot{f}$$

- L'effort transmis par le mécanisme devient:

$$Q = Q_R + Q_D = kf + k\dot{f}$$

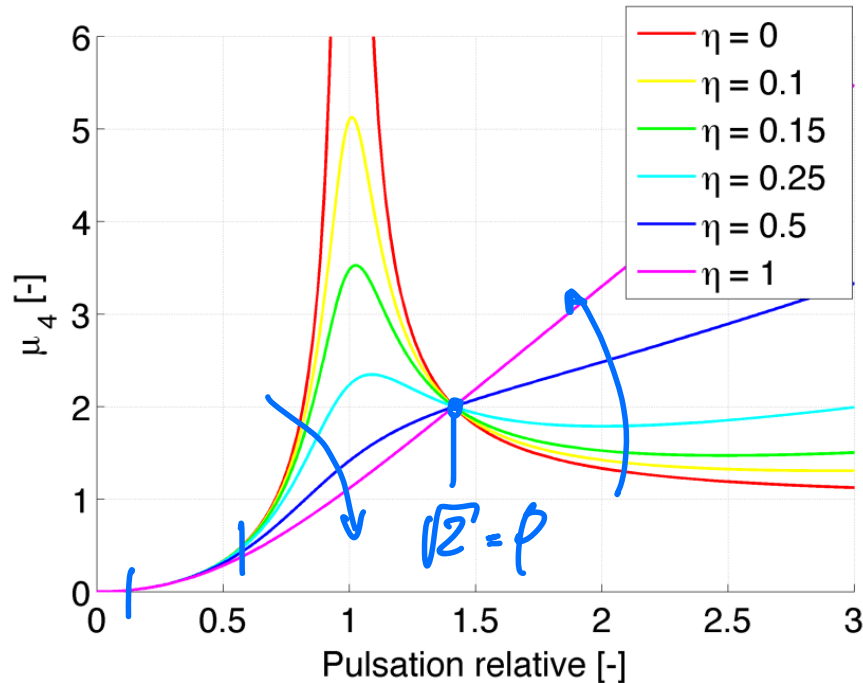
$$f = q_2 - q_1 = E$$

$$Q = kE + c\dot{E}$$



Extrait de la Figure 15.9 [Spinnler]

- Coefficient d'amplification de la sollicitation structurelle pour une excitation harmonique



$$Q = kE + c\dot{E}$$

$$Q = \hat{q}_1 k \mu_4 \sin(\Omega t - \varphi_2)$$

$$\mu_4 = \frac{\beta^2 \sqrt{1 + 4\eta^2 \beta^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2 \beta^2}}$$

- Quelques commentaires pour la conception
 - Les efforts structurels sont bas à faible vitesse
 - Lorsqu'on se rapproche de la pulsation propre les efforts augmentent rapidement et limitent la vitesse de fonctionnement
 - L'amortissement joue un rôle important dans la sollicitation des structures
 - L'effort des harmoniques dépasse souvent l'effort de la fondamentale même si le mouvement de l'harmonique de la commande est relativement petit
 - La sollicitation structurelle est approximativement proportionnelle à l'erreur de positionnement (pour $\eta \downarrow$)



Dynamique des Systèmes Mécaniques

Mouvement
apériodique

Prof. J. Schiffmann

- Souvent une machine doit effectuer un mouvement précis et apériodique

- Position de repos
- Déplacement
- Nouvelle position de repos

Discontinuités de mouvement excitent des vibrations superposés au mouvement théorique

- Exemple 1: Bras de robot de montage



- Exemple 2: chariot de pont roulant



- Mouvement de rampe tronquée

- Déplacement q_{1T} imposé à $t = 0$ dans un temps T à vitesse constante avec des conditions initiales nulles

$$\begin{cases} q_1 = q_{1T} \frac{t}{T} & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ q_1 = q_{1T} & \text{pour } t \geq T \end{cases}$$

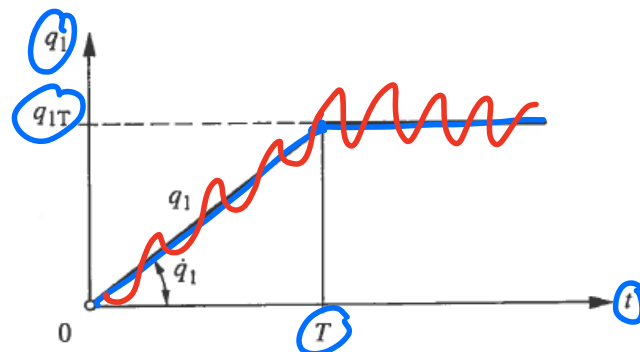


Figure 15.28 [Spinnler]

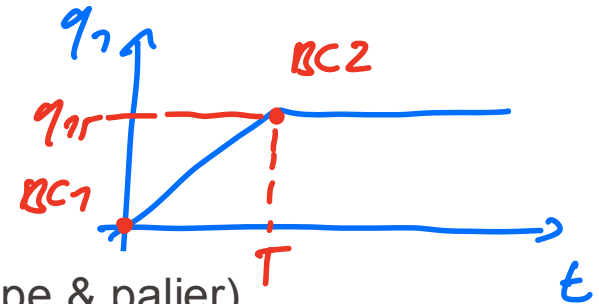
- Mouvement de rampe tronquée: les équations

$$\widetilde{I(q_2)} \ddot{q}_2 + \cancel{\frac{1}{2} I'(q_2) \dot{q}_2^2} + \cancel{c \dot{q}_2} + k q_2 = \cancel{Q_2} + \cancel{c \dot{q}_1} + k q_1$$

- Hypothèses: (1) amortissement c nul, (2) effort Q_2 nul, (3) système uniforme

$$I \ddot{q}_2 + h q_2 = h q_1 \quad / \quad \frac{1}{h}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{q}_2 + q_2 = q_1$$



- La solution q_2 est calculée en deux étapes (rampe & palier)

■ Mouvement de rampe tronquée: **rampe**

- Solution particulière:

$$q_{2P} = q_{1T} \frac{t}{T}$$

Solution homogène:

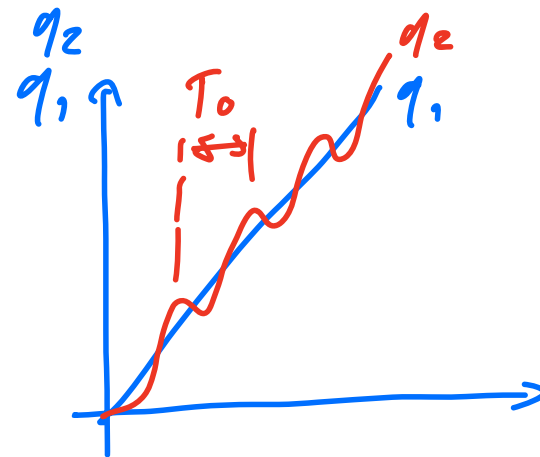
$$q_{2H} = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

- Avec les conditions initiales: $q_2(t_0) = \dot{q}_2(t_0) = 0$

$$q_2 = q_{1T} \left[\frac{t}{T} - \frac{1}{\omega_0 T} \sin \omega_0 t \right]$$

Vibration transitoire (dynamique)

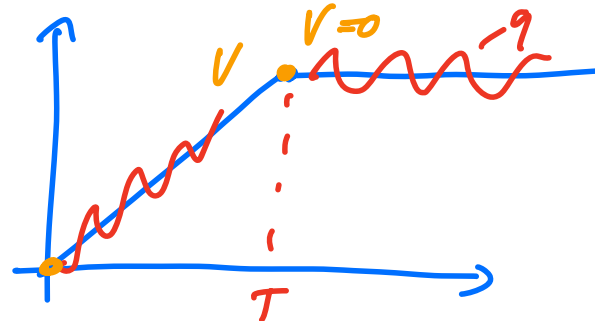
Mouvement de rampe (cinématique)



- $$q_2 = q_{1T} \left[1 - \underbrace{\frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0 T}}_0 \right]$$
- $$\dot{q}_2 = \frac{q_{1T}}{T} \left[1 - \underbrace{\cos \omega_0 T}_1 \right]$$
- $$q_2(\tau) = q_{1T}$$
- $$\dot{q}_2(\tau) = 0$$
- $$\omega_0 T = 2\pi \cdot n$$



■ Mouvement de rampe tronquée: **palier**



- En utilisant les conditions en fin de rampe comme condition initiales pour le palier on obtient:

$$q_2(t) = q_{1T} + \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right]$$

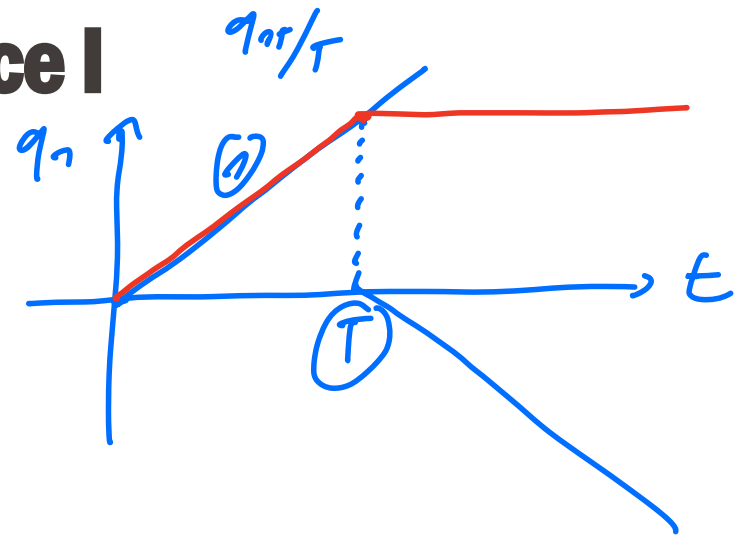
$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Nouvelle excitation

Vibration transitoire de la rampe

- La modification abrupte du mouvement après la rampe amorce une nouvelle vibration qui se superpose à la vibration transitoire résultante de l'initialisation de la rampe

Solution alternative par Laplace I



- Equation de mouvement

$$\rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{q}_2 + q_2 = f(t) \quad \mathcal{L}$$

- Transformée de Laplace

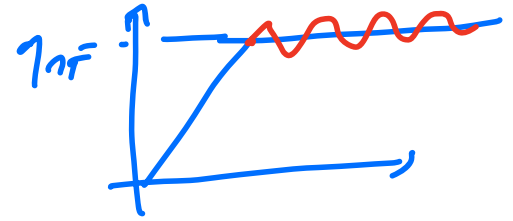
$$\rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} Q_2(s) s^2 + Q_2(s) - [s q_2(0) + \dot{q}_2(0)] = F(s)$$

- Commande

$$F(s) = \underbrace{\frac{q_{1T}}{T}}_{\textcircled{1}} \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{\downarrow} - \underbrace{\frac{q_{1T}}{T}}_{\downarrow} \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{\downarrow} \underbrace{e^{-Ts}}_{\textcircled{2}}$$

$$Q_2(s) = \frac{q_{1T}}{T} \frac{1}{s^2} \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} [1 - e^{-Ts}]$$

Solution alternative par Laplace II



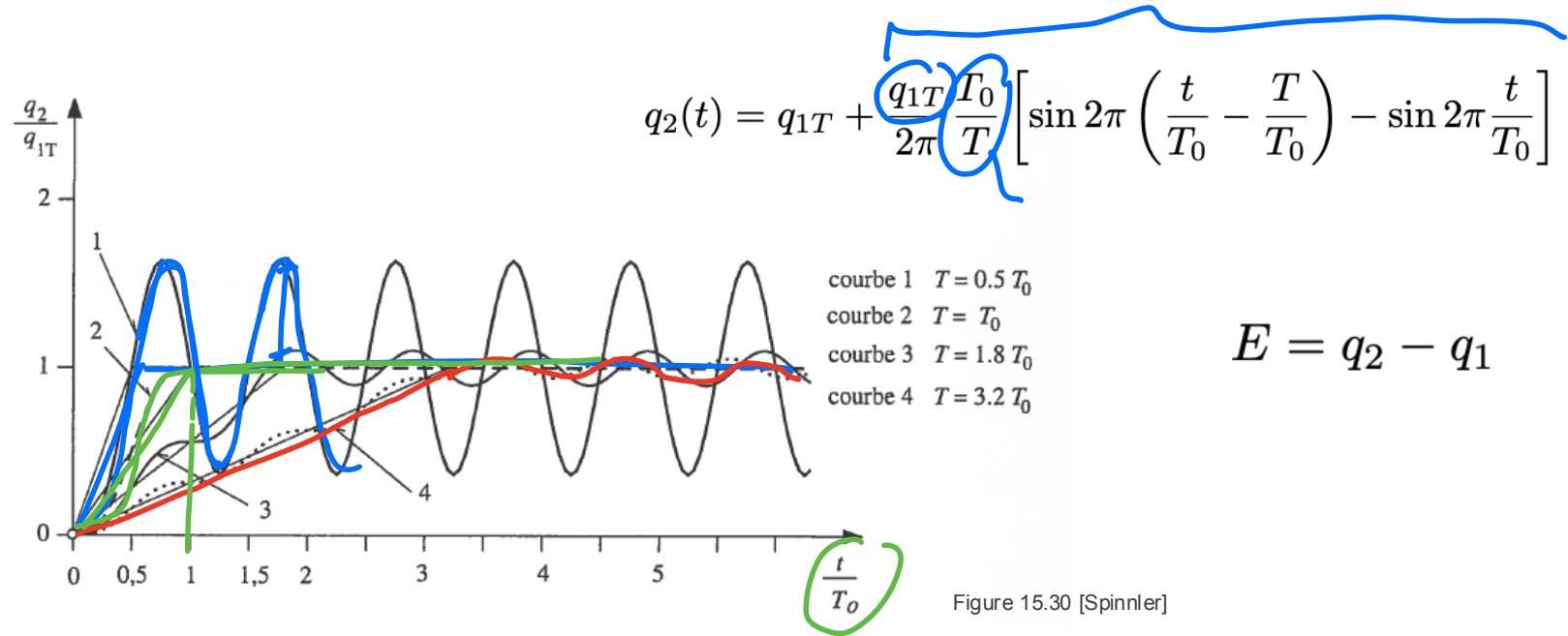
- Transformée Laplace inverse de: $Q_2 = \frac{q_{1T}}{T} \frac{1}{s^2} \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} [1 - e^{Ts}]$

$$t \in [0, T] \quad q_2(t) = \frac{q_{1T}}{T} \left[t - \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t) \right]$$

$$t \geq T \quad q_2(t) = \frac{q_{1T}}{T} \left[t - \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t) - (t - T) + \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 (t - T)) \right]$$

$$q_2(t) = q_{1T} + \frac{q_{1T}}{\omega_0^2 T} [-\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 (t - T))] \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$q_2(t) = q_{1T} + \underbrace{\frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T}{T_0} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right]}_E$$



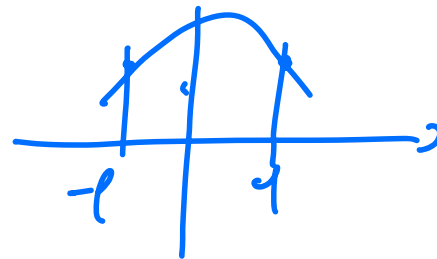
- L'amplitude de l'oscillation dans le palier diminue lorsque T/T_0 augmente
 - Montée de rampe plus lent
 - Période propre plus courte (augmentation de ω_0)
 - Pas d'oscillation si T/T_0 est un nombre entier

- Erreur dynamique résiduelle:

$$E = \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right]$$

- L'erreur s'annule lorsque q_{1T}/T est nul ou si T/T_0 est un nombre entier
- On trouve l'erreur maximale en posant:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$



■ Erreur dynamique résiduelle:

- On trouve l'erreur maximale:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q_1 T}{T} \left[\cos 2\pi \left(\frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \cos 2\pi \frac{t}{T_0} \right] = 0$$

- L'équation est satisfaite si:

- Si T/T_0 est un nombre entier (\rightarrow minima locaux)
- Si

$$2\pi \left(\frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) = -2\pi \frac{t}{T_0}$$

$$\frac{t}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{T}{T_0}$$

$$\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$$

à injecter dans E

- Erreur dynamique résiduelle:

- On trouve l'erreur maximale pour: $\frac{t}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{T}{T_0}$

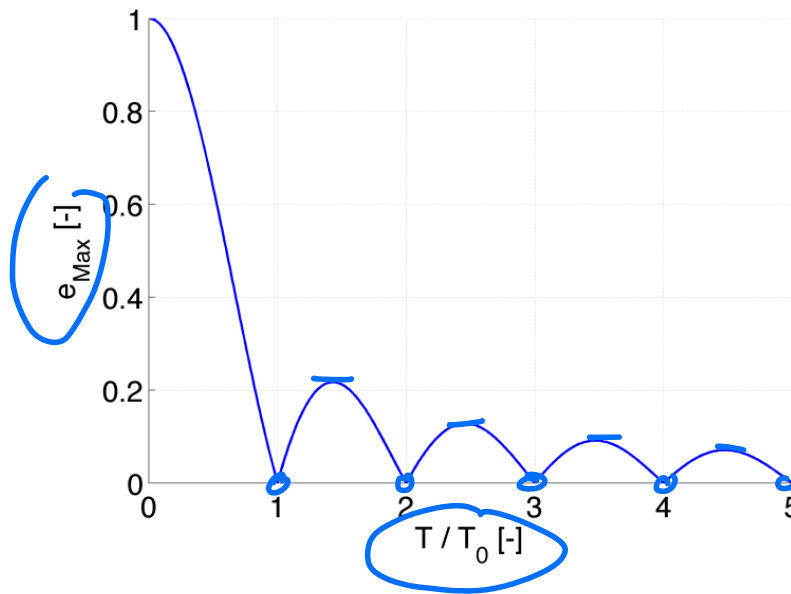
$$\rightarrow E_{\max} = \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[\sin 2\pi \left(\frac{1}{2} \frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \left(\frac{1}{2} \frac{T}{T_0} \right) \right]$$

$$E_{\max} = \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[\sin \left(-\pi \frac{T}{T_0} \right) - \sin \left(\pi \frac{T}{T_0} \right) \right]$$

$$E_{\max} = -\frac{q_{1T}}{\pi} \frac{T_0}{T} \sin \left(\pi \frac{T}{T_0} \right)$$

$$|e_{Max}| = \frac{|E_{\max}|}{q_{1T}} = \frac{\left| \sin \pi \frac{T}{T_0} \right|}{\pi \frac{T}{T_0}}$$

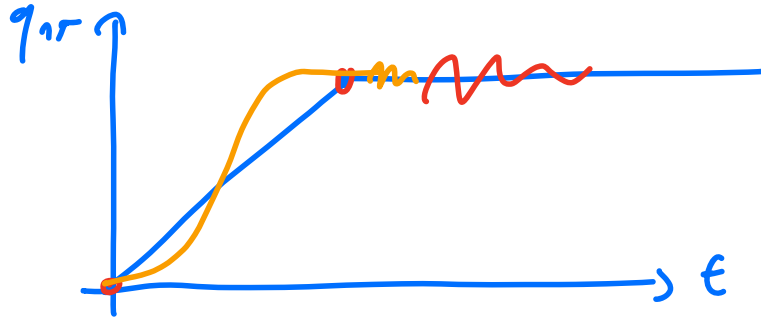
- Erreur dynamique résiduelle (3)



$$|e_{Max}| = \frac{|E_{max}|}{q_1 T} = \frac{\left| \sin \pi \frac{T}{T_0} \right|}{\pi \frac{T}{T_0}}$$

$e_{Max} < 10\%$ pour $T/T_0 > 3$
 $e_{Max} < 5\%$ pour $T/T_0 > 6$

- On diminue l'erreur relative en réduisant la vitesse de la rampe et/ou en diminuant la période propre T_0 ($\rightarrow \omega_0$)



- Calculer l'erreur et l'effort structurel d'un système à came
- Erreur dans le palier après une rampe tronquée en cosinus inverse
- Erreur de positionnement d'une masse suspendue par un palan