

# Résumé

Précision du  
mouvement

**Prof. J. Schiffmann**

# Précision de mouvement

- Souvent une machine doit exécuter un mouvement précis

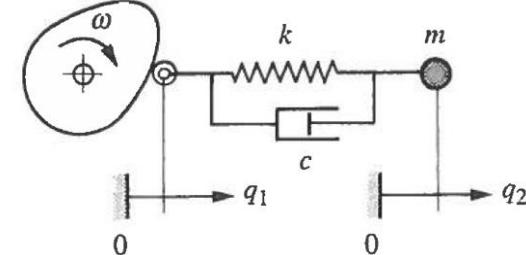
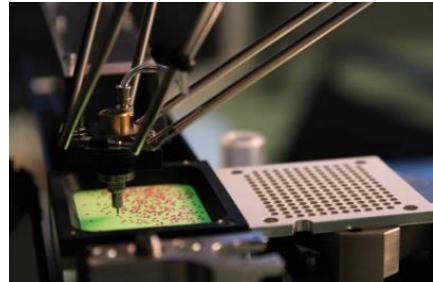
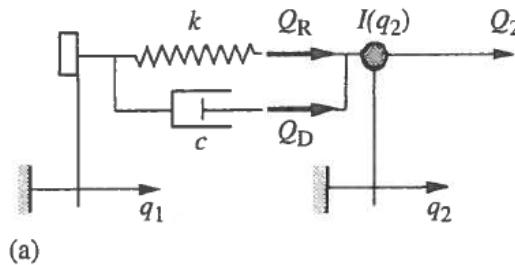
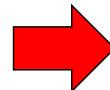
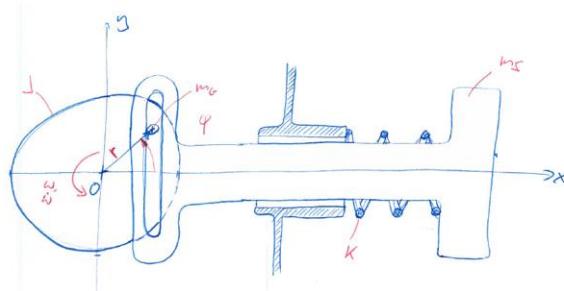


Figure 15.21  
[Spinnler]

- Un mécanisme précis veut que la différence entre le parcours utile  $q_2$  et sa commande  $q_1$  soit aussi faible que possible
- Mécanisme à commande positive**

# Réponse harmonique I

- Analyse de l'erreur de positionnement d'un système uniforme soumis à un mouvement harmonique



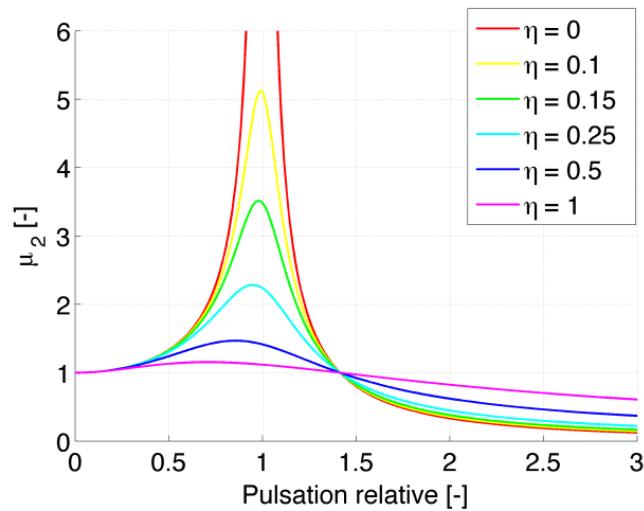
Extrait de la Figure 15.9  
[Spinnler]

$$I\ddot{q}_2 + c\dot{q}_2 + kq_2 = Q_2 + c\dot{q}_1 + kq_1$$

$$q_1 = \hat{q}_1 \sin \Omega t$$

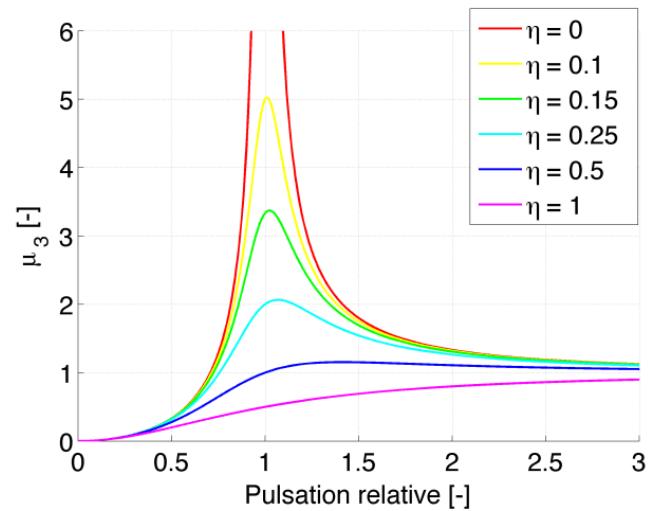
$$I\ddot{E} + c\dot{E} + kE = I\ddot{q}_1 + Q_2$$

- Comportement dynamique



$$q_2 = \hat{q}_1 \mu_2 \sin(\Omega t - \varphi_2)$$

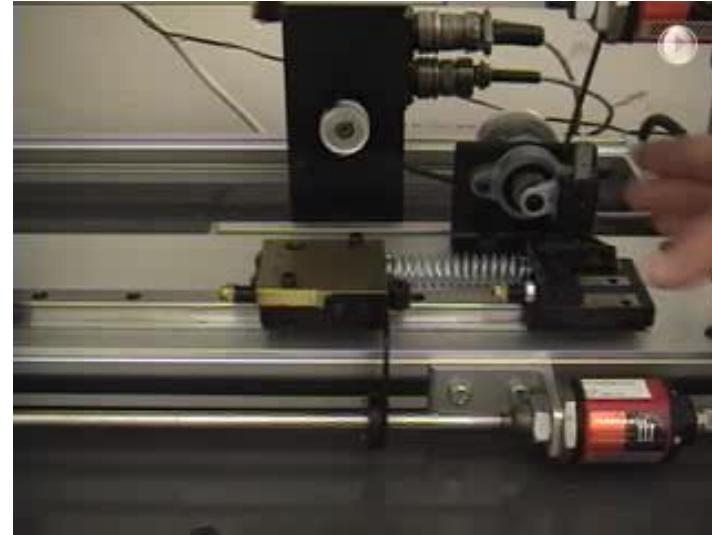
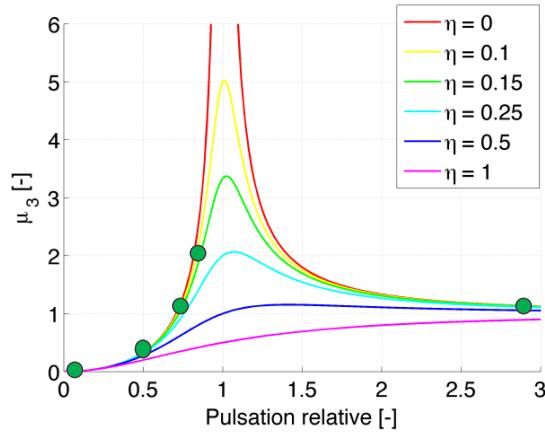
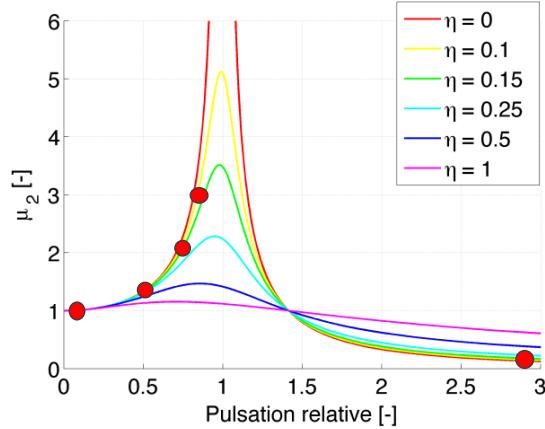
$$\mu_2 = \frac{\sqrt{1 + 4\eta^2\beta^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$



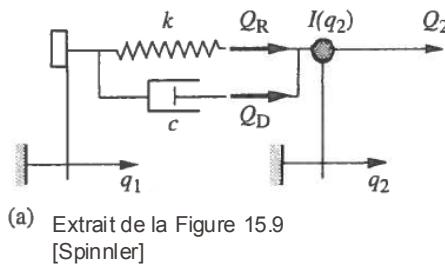
$$E = \hat{q}_1 \mu_3 \sin(\Omega t - \varphi_3)$$

$$\mu_3 = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

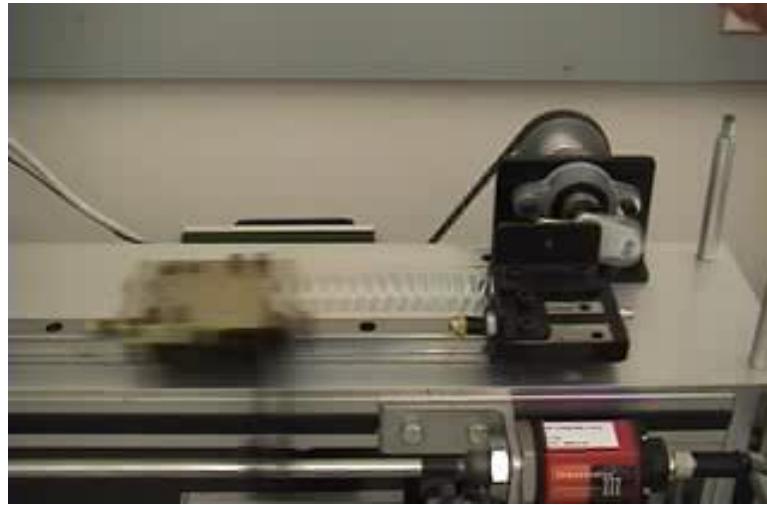
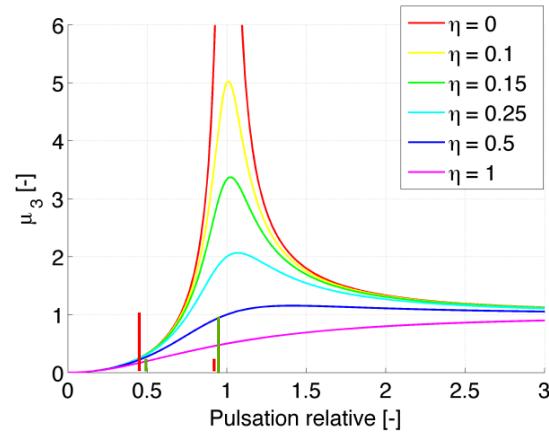
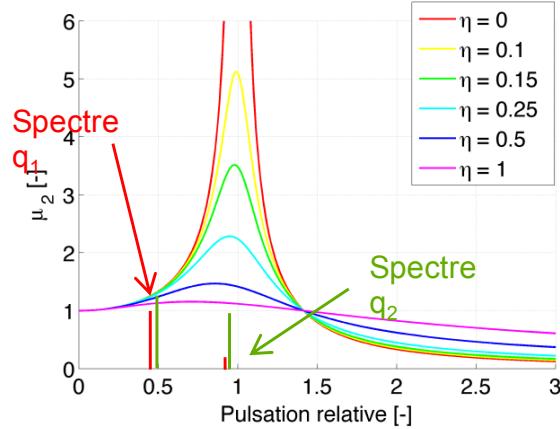
# Comportement dynamique



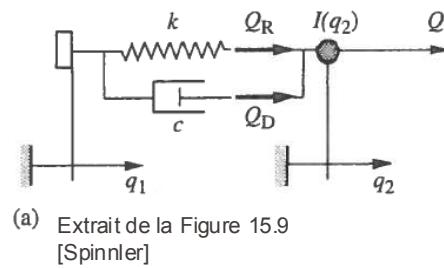
$$q_1 = \hat{q}_1 \sin \Omega t$$



# Comportement dynamique



$$q_1 = \hat{q}_1 \sin \Omega t + \frac{\hat{q}_1}{6} \sin 2\Omega t$$



# Sollicitation des structures I

- Quelle est la sollicitation dynamique qui agit sur la transmission d'une commande positive?

- Toute structure peut être modélisée par une rigidité ( $k$ ) et par une dissipation ( $c$ )

$$Q_R = kf$$

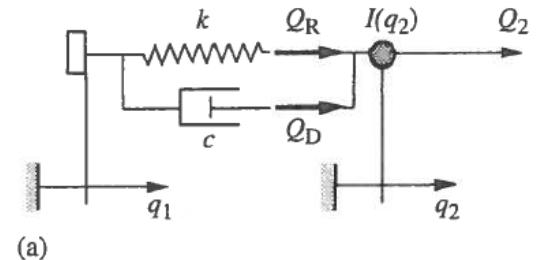
$$Q_D = cf$$

- L'effort transmis par le mécanisme devient:

$$Q = Q_R + Q_D = kf + kf$$

$$f = q_2 - q_1 = E$$

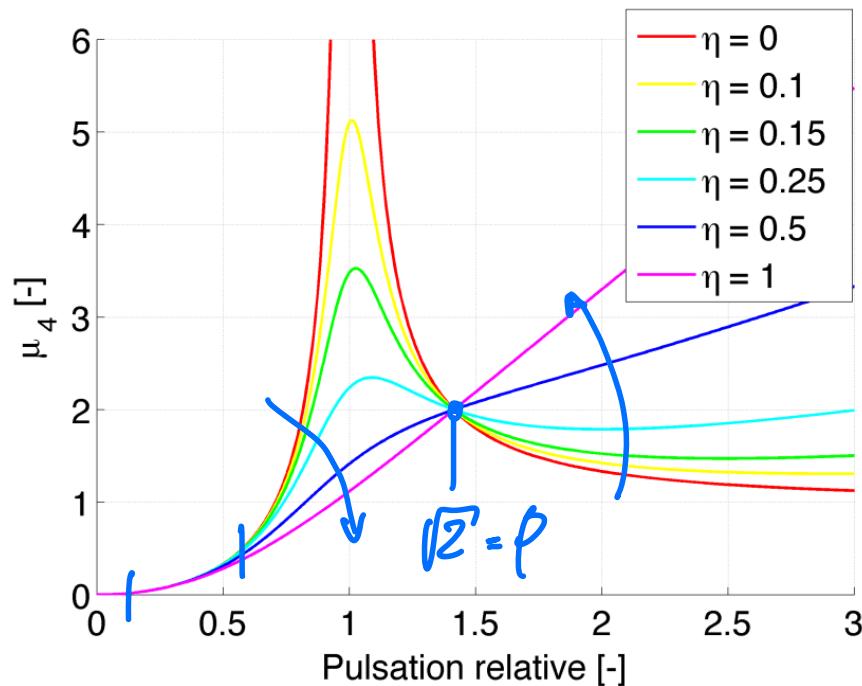
$$Q = kE + c\dot{E}$$



Extrait de la Figure 15.9 [Spinnler]

# Sollicitation des structures II

- Coefficient d'amplification de la sollicitation structurelle pour une excitation harmonique



$$Q = kE + c\dot{E}$$

$$Q = \hat{q}_1 k \mu_4 \sin(\Omega t - \varphi_2)$$

$$\mu_4 = \frac{\beta^2 \sqrt{1 + 4\eta^2\beta^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

- Quelques commentaires pour la conception
  - Les efforts structurels sont bas à faible vitesse
  - Lorsqu'on se rapproche de la pulsation propre les efforts augmentent rapidement et limitent la vitesse de fonctionnement
  - L'amortissement joue un rôle important dans la sollicitation des structures
  - L'effort des harmoniques dépasse souvent l'effort de la fondamentale même si le mouvement de l'harmonique de la commande est relativement petit
  - La sollicitation structurelle est approximativement proportionnelle à l'erreur de positionnement (pour  $n \downarrow$ )



# Dynamique des Systèmes Mécaniques

Mouvement  
apériodique

**Prof. J. Schiffmann**

- Souvent une machine doit effectuer un mouvement précis et apériodique

- Position de repos
- Déplacement
- Nouvelle position de repos

{

Discontinuités de mouvement excitent des vibrations superposés au mouvement théorique

- Exemple 1: Bras de robot de montage



# Mouvement apériodique II

- Exemple 2: chariot de pont roulant



- Mouvement de rampe tronquée

- Déplacement  $q_{1T}$  imposé à  $t = 0$  dans un temps  $T$  à vitesse constante avec des conditions initiales nulles

$$\begin{cases} q_1 = q_{1T} \frac{t}{T} & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ q_1 = q_{1T} & \text{pour } t \geq T \end{cases}$$

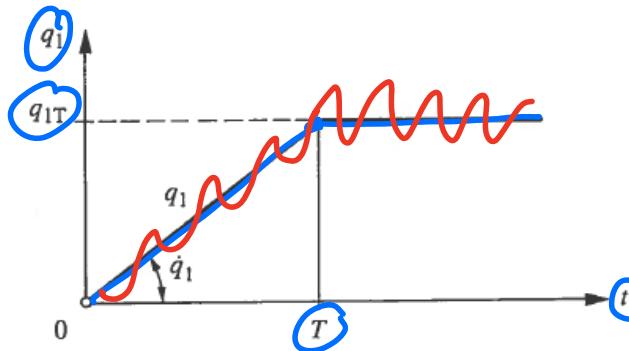


Figure 15.28 [Spinnler]

- Mouvement de rampe tronquée: les équations

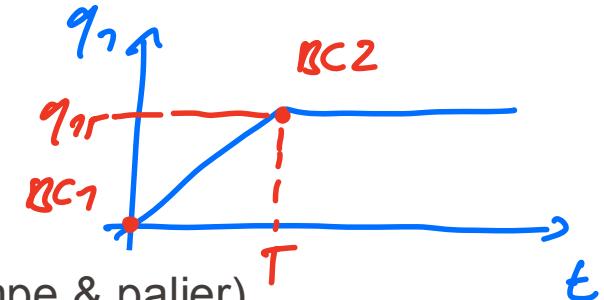
$$\widetilde{I}(q_2) \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} I'(q_2) \dot{q}_2^2 + c\dot{q}_2 + kq_2 = \cancel{Q}_2 + \cancel{c\dot{q}_1} + kq_1$$

- Hypothèses: (1) amortissement  $c$  nul, (2) effort  $Q_2$  nul, (3) système uniforme

$$I \ddot{q}_2 + kq_2 = uq_1 \quad | \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{q}_2 + q_2 = q_1$$

- La solution  $q_2$  est calculée en deux étapes (rampe & palier)

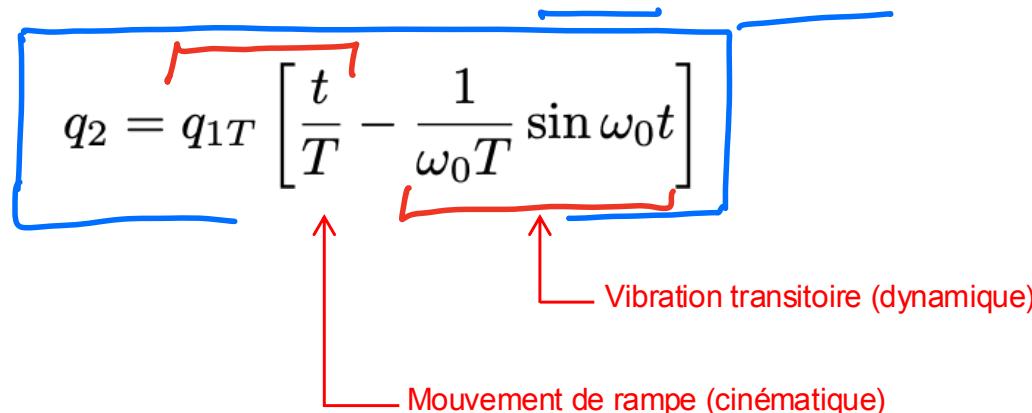


■ Mouvement de rampe tronquée: **rampe**

- Solution particulière:

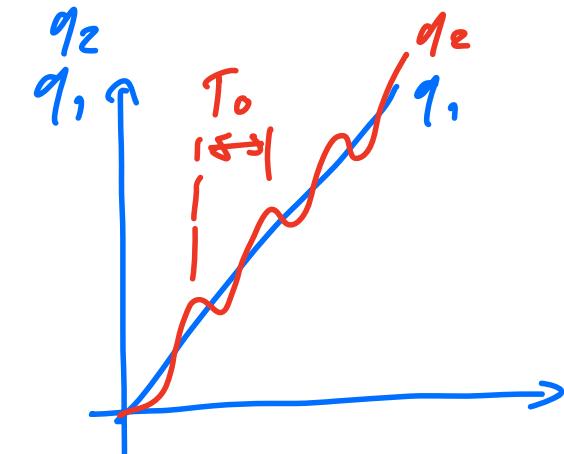
$$q_{2P} = q_{1T} \frac{t}{T}$$

- Avec les conditions initiales:  $q_2(t_0) = \dot{q}_2(t_0) = 0$



Solution homogène:

$$q_{2H} = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$



■ Situation en fin de rampe

- A la fin de la rampe ( $t = T$ ) on obtient les conditions initiales  $q_2(T)$ ,  $\dot{q}_2(T)$  pour le mouvement dans le palier

$$q_2 = q_{1T} \left[ 1 - \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0 T} \right]$$

$$\dot{q}_2 = \frac{q_{1T}}{T} [1 - \cos \omega_0 T]$$

$$q_2(T) = q_{1T}$$

$$\dot{q}_2(T) = 0$$

$$\omega_0 T = 2\pi \cdot n$$

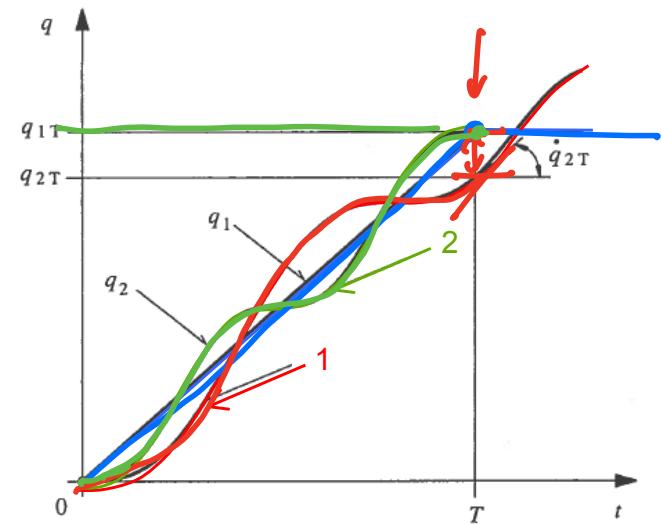


Figure 15.29 [Spinner]

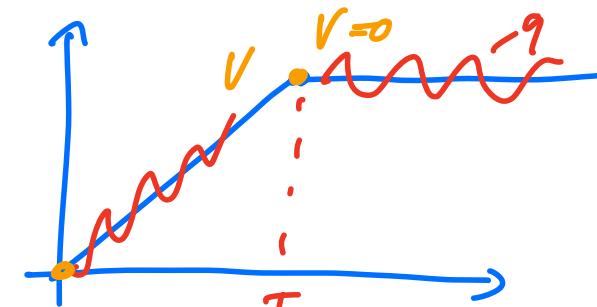
# Mouvement apériodique VI

## Mouvement de rampe tronquée: palier

- En utilisant les conditions en fin de rampe comme condition initiales pour le palier on obtient:

$$q_2(t) = q_{1T} + \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right]$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



- La modification abrupte du mouvement après la rampe amorce une nouvelle vibration qui se superpose à la vibration transitoire résultante de l'initialisation de la rampe

# Solution alternative par Laplace I

- Equation de mouvement

$$\rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{q}_2 + q_2 = f(t) \quad \mathcal{I}$$

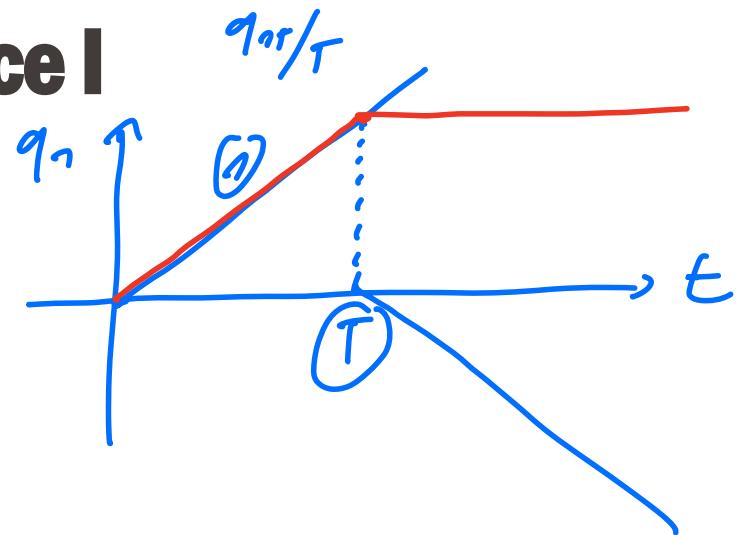
- Transformée de Laplace

$$\rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} Q_2(s) s^2 + Q_2(s) - [s q_2(0) + \dot{q}_2(0)] = F(s)$$

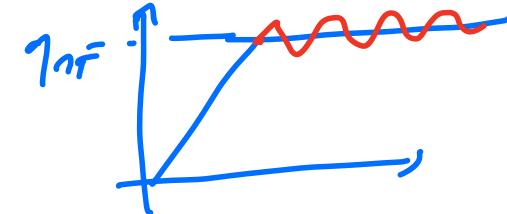
- Commande

$$F(s) = \frac{q_{1T}}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{q_{1T}}{T} \frac{1}{s^2} e^{-Ts}$$

$$Q_2(s) = \frac{q_{1T}}{T} \frac{1}{s^2} \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} [1 - e^{-Ts}]$$



# Solution alternative par Laplace II



- Transformée Laplace inverse de:  $Q_2 = \frac{q_1 T}{T} \frac{1}{s^2} \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} [1 - e^{Ts}]$

$$t \in [0, T] \quad q_2(t) = \frac{q_1 T}{T} \left[ t - \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0^2 t) \right]$$

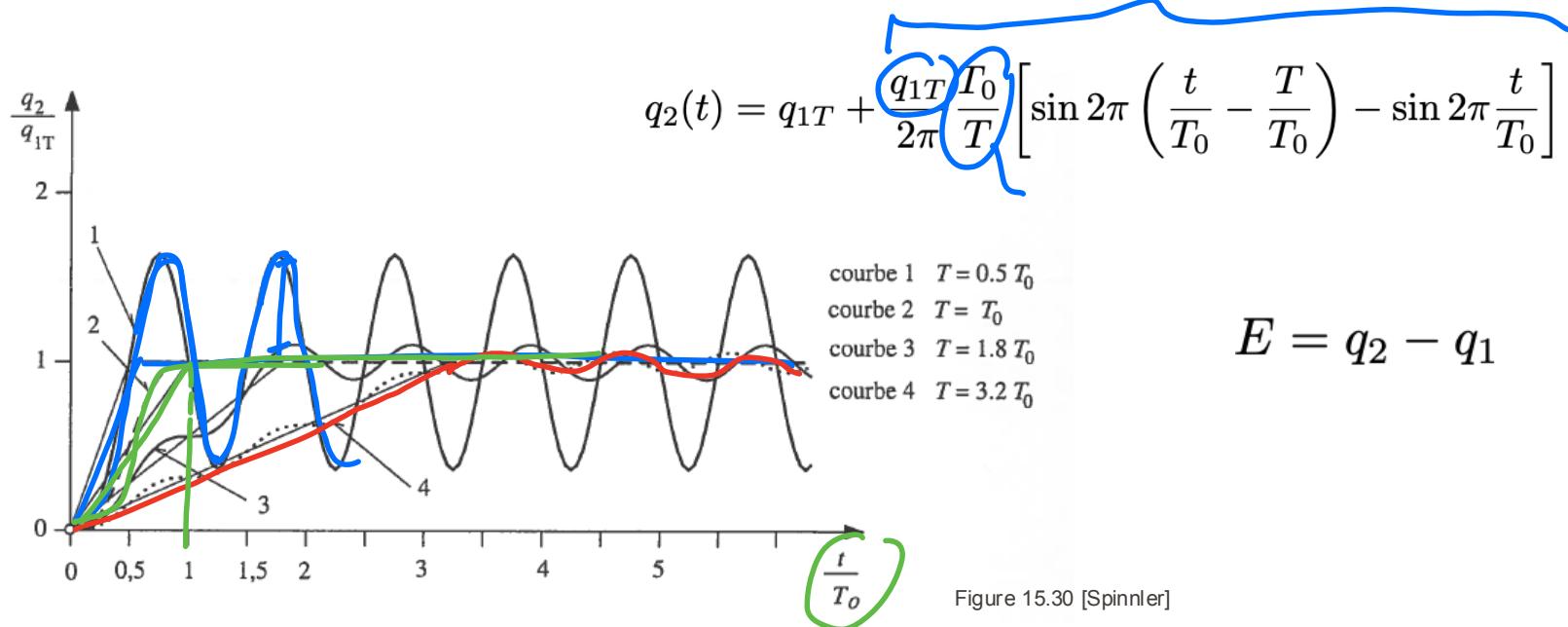
$$t \geq T \quad q_2(t) = \frac{q_1 T}{T} \left[ t - \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0^2 t) - (t - T) + \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0^2 (t - T)) \right]$$

$$q_2(t) = q_1 T + \frac{q_1 T}{\omega_0^2 T} [-\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 (t - T))] \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$q_2(t) = q_1 T + \frac{q_1 T}{2\pi} \frac{T}{T_0} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right]$$

E

# Mouvement apériodique VII



- L'amplitude de l'oscillation dans le palier diminue lorsque  $T/T_0$  augmente
  - Montée de rampe plus lent
  - Période propre plus courte (augmentation de  $\omega_0$ )
  - Pas d'oscillation si  $T/T_0$  est un nombre entier

- Erreur dynamique résiduelle:

$$E = \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right]$$

- L'erreur s'annule lorsque  $q_{1T}/T$  est nul ou si  $T/T_0$  est un nombre entier
- On trouve l'erreur maximale en posant:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

- Erreur dynamique résiduelle:
  - On trouve l'erreur maximale:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q_1 T}{T} \left[ \cos 2\pi \left( \frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \cos 2\pi \frac{t}{T_0} \right] = 0$$

- L'équation est satisfaite si:
  - Si  $T/T_0$  est un nombre entier ( $\rightarrow$  minima locaux)
  - Si

$$2\pi \left( \frac{t}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) = -2\pi \frac{t}{T_0}$$



$$\frac{t}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{T}{T_0}$$

$$\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$$

à injecter dans E

# Mouvement apériodique X

- Erreur dynamique résiduelle:

- On trouve l'erreur maximale pour:

$$\frac{t}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{T}{T_0}$$

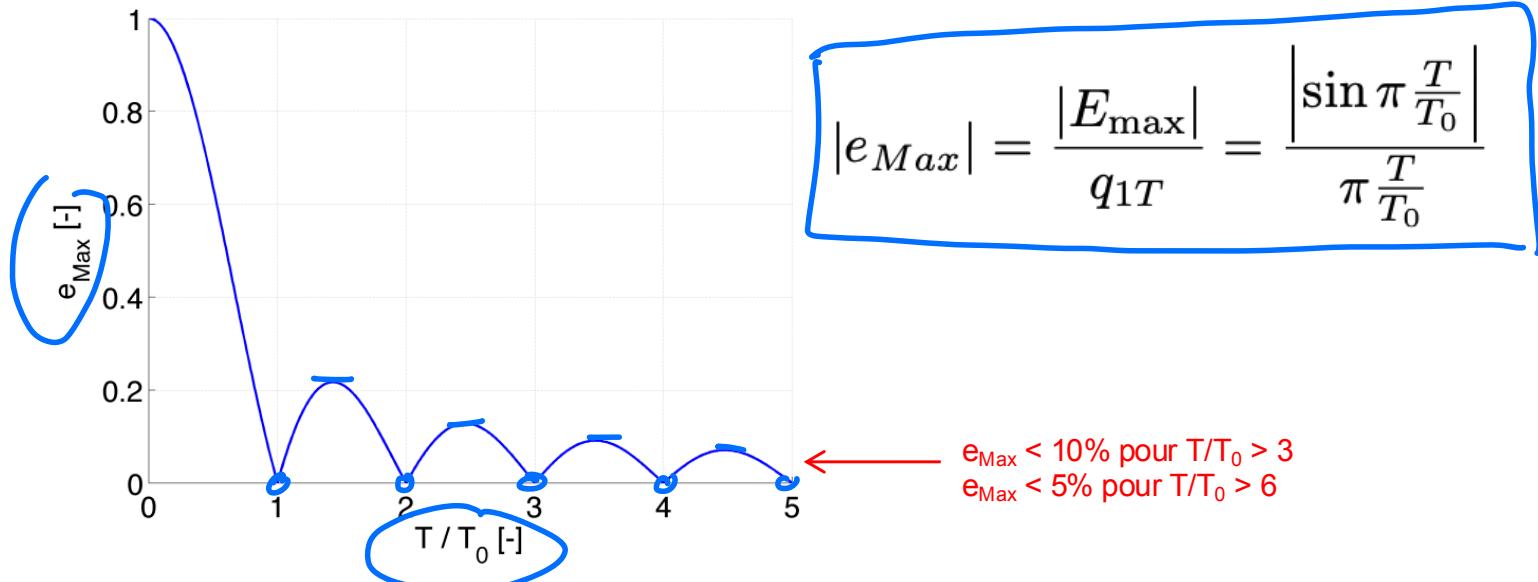
$$\rightarrow E_{\max} = \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[ \sin 2\pi \left( \frac{1}{2} \frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} \right) - \sin 2\pi \left( \frac{1}{2} \frac{T}{T_0} \right) \right]$$

$$E_{\max} = \frac{q_{1T}}{2\pi} \frac{T_0}{T} \left[ \sin \left( -\pi \frac{T}{T_0} \right) - \sin \left( \pi \frac{T}{T_0} \right) \right]$$

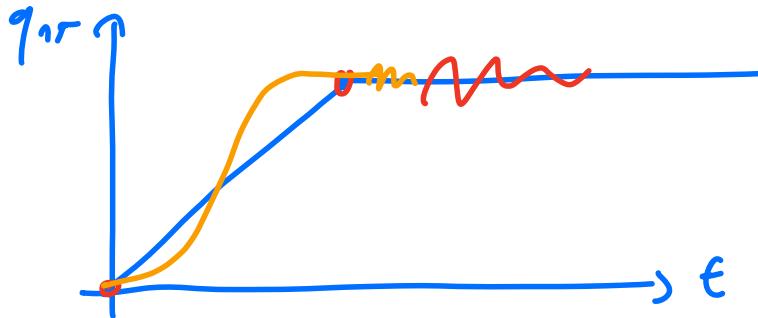
$$E_{\max} = -\frac{q_{1T}}{\pi} \frac{T_0}{T} \sin \left( \pi \frac{T}{T_0} \right)$$

$$|e_{Max}| = \frac{|E_{\max}|}{q_{1T}} = \frac{\left| \sin \pi \frac{T}{T_0} \right|}{\pi \frac{T}{T_0}}$$

- Erreur dynamique résiduelle (3)



- On diminue l'erreur relative en réduisant la vitesse de la rampe et/ou en diminuant la période propre  $T_0$  ( $\rightarrow \omega_0$  ⑥)



- Calculer l'erreur et l'effort structurel d'un système à came
- Erreur dans le palier après une rampe tronquée en cosinus inverse
- Erreur de positionnement d'une masse suspendue par un palan