

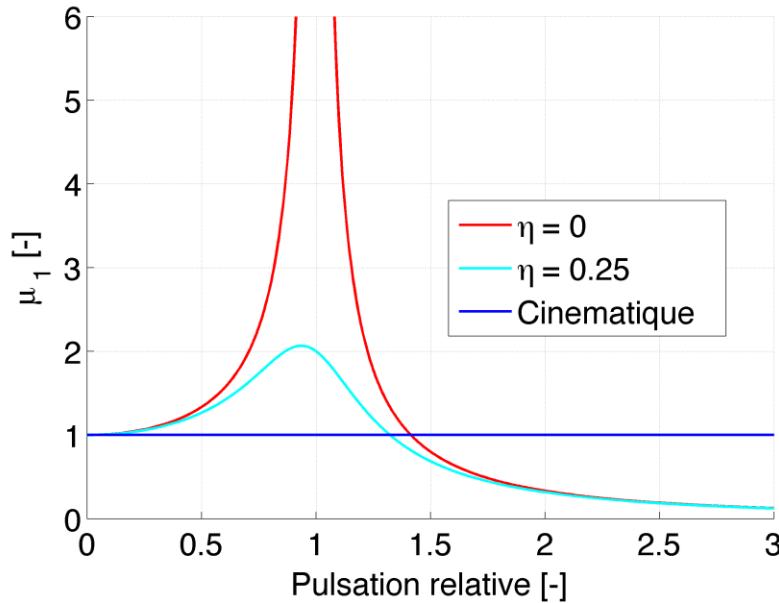
# Résumé

Modélisation  
dynamique

Prof. J. Schiffmann

# Modèle cinématique ou dynamique?

- Oscillateur élémentaire avec excitation harmonique
  - Quel est l'effort transmis par la rigidité?



Dynamique

$$Q_{R-D} = Qm_1 \cos(\omega t - \phi_1)$$

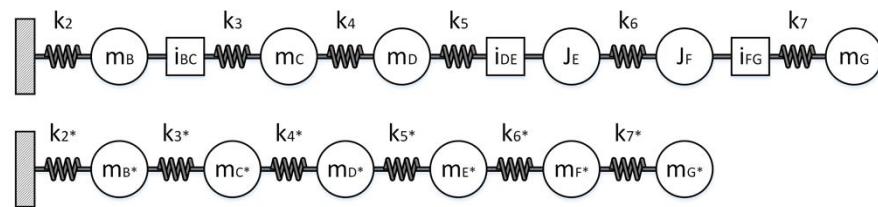
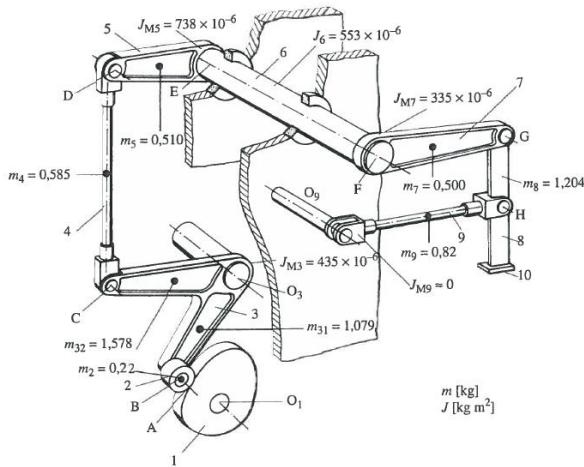
Cinématique

$$Q_{R-C} = Q \cos(\omega t)$$

# Modèle cinématique ou dynamique?

- Pour une excitation  $W \leq 0.22\omega_0$  on peut se contenter d'un modèle cinématique
- Au delà l'erreur sur l'amplitude du mouvement devient trop grande
- On peut estimer les fréquences propres en négligeant les amortissements sans erreur appréciable
- Il faut tenir compte de l'amortissement lorsqu'on se rapproche de la résonance et s'il existe une exigence par rapport au déphasage

- L'idée est de transformer le mécanisme en un réseau d'inerties reliées par des rigidités et amortissements
- Comment joindre les différents mouvements?



# Quelques astuces de modélisation

- Lorsqu'une inertie est plus grande que son inertie voisine, on peut considérer que l'inertie lourde joue le rôle d'un encastrement
- Lorsque un mouvement est imposé à un élément d'une chaîne cinématique, ce point se comporte comme un encastrement
- Un élément plus rigide que les autres peut être considéré comme indéformable → les inerties qu'il relie en forment une inertie unique
- La configuration du modèle peut changer selon le régime de fonctionnement

?

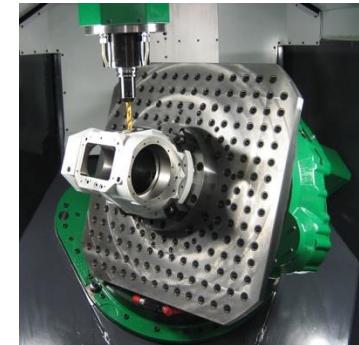
# Dynamique des Systèmes Mécaniques

Précision du  
mouvement

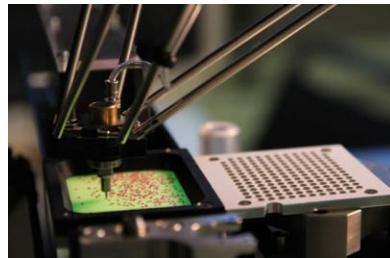
**Prof. J. Schiffmann**

- Souvent une machine doit exécuter un mouvement précis

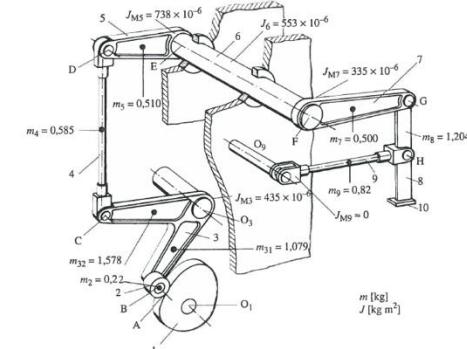
- Table d'une machine outil



- Pince de robot



- Transporteur de papier pour une imprimante





[www.csem.ch](http://www.csem.ch)

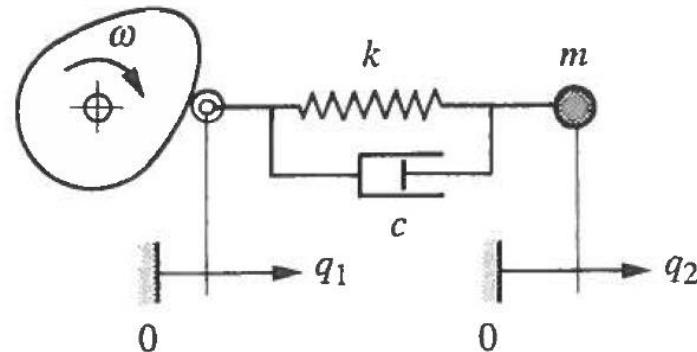
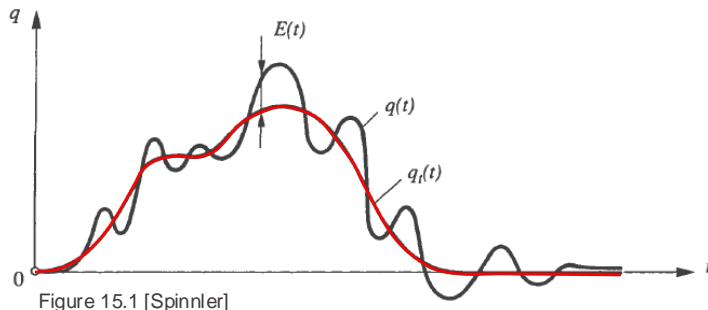


Figure 15.21 [Spinnler]

- Un mécanisme précis veut que la différence entre le parcours utile  $q_2$  et sa commande  $q_1$  soit aussi faible que possible → nulle

# Sources d'erreur



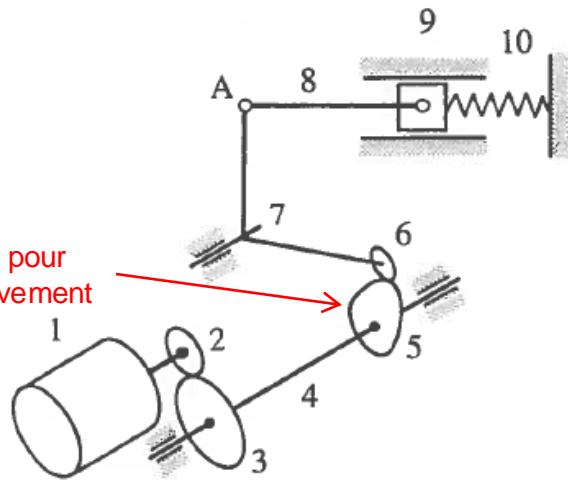
Comparaison entre mouvement théorique et mesuré

$$E(t) = q(t) - q_t(t)$$

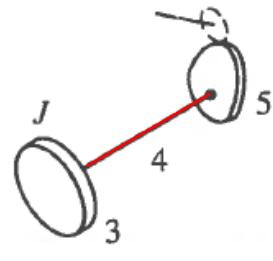
Erreur  
↓  
Mouvement théorique  
↑  
Mouvement réel

- Cinématique
  - Tolérances d'usinage, jeux, dilatation thermique,...
- Dynamique
  - Lorsque le spectre du mouvement est proche des fréquences propres du système → facteur d'amplification

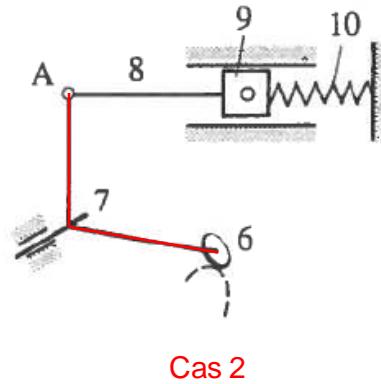
Came et suiveur pour imposer un mouvement



(a)



Cas 1



Cas 2

Extrait de la Figure 15.8 [Spinnler]

- **Cas 1:** Un élément souple mène un mécanisme non-uniforme
- **Cas 2:** Un élément souple mène un mécanisme uniforme

# Modèle dynamique I

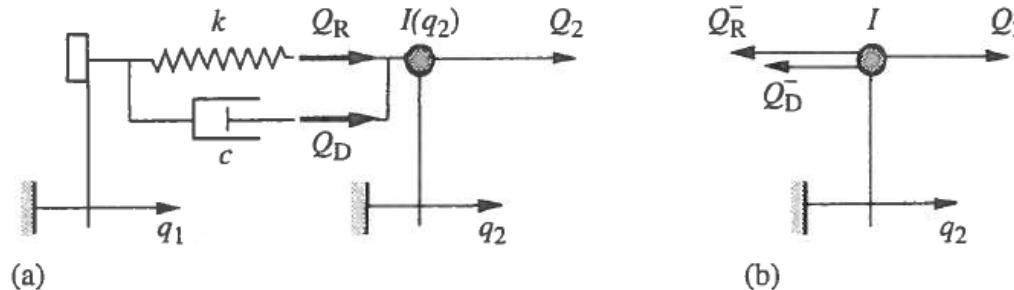


Figure 15.9 [Spinnler]

- Cas 1: le mécanisme mené par l'élément souple est supposé non-uniforme

$$I(q_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}I'\dot{q}_2^2 + U'(q_2) = Q^* \quad \begin{matrix} \text{Equation de mouvement du} \\ \text{système réduit à } q_2 \end{matrix}$$

↑ Efforts extérieurs

$$I(q_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}I'\dot{q}_2^2 = Q_2 - Q_R - Q_D$$

$$I(q_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}I'\dot{q}_2^2 = Q_2 - Q_R - Q_D$$

$$I(q_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}I'(q_2)\dot{q}_2^2 = Q_2 - \underbrace{k(q_2 - q_1)}_{Q_R} - \underbrace{c(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)}_{Q_D}$$

$$I(q_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}I'(q_2)\dot{q}_2^2 + cq_2 + kq_2 = Q_2 + c\dot{q}_1 + kq_1$$

- Avec  $E = q_2 - q_1$  et  $q_2 = E + q_1$  :

$$I(q_1 + E) \left( \ddot{q}_1 + \ddot{E} \right) + \frac{1}{2}I'(q_1 + E) \left( \dot{q}_1 + \dot{E} \right)^2 + c\dot{E} + kE = Q_2$$

- Erreur dynamique  $E = q_2 - q_1$

$$I(q_1 + E) \left( \ddot{q}_1 + \ddot{E} \right) + \frac{1}{2} I'(q_1 + E) \left( \dot{q}_1 + \dot{E} \right)^2 + c\dot{E} + kE = Q_2$$

- Equation différentielle non-linéaire délicate
- On note que l'inertie dépend également de l'erreur
- L'équation peut être simplifiée par un développement de Taylor autour de  $q_1$ :

$$I(q_2) = I(q_1 + E)$$

$$I(q_2) = I(q_1) + I'(q_1)E + \frac{1}{2} I''(q_1)E^2 + \dots$$

Attention: vibrations paramétriques

- On obtient avec:

$$\begin{aligned} I(q_1) \ddot{E} + [c + \overbrace{I'(q_1) \dot{q}_1}^{\text{Attention: vibrations paramétriques}}] \dot{E} + \left[ k + \overbrace{\frac{1}{2} I''(q_1) \dot{q}_1^2 + I'(q_1) \ddot{q}_1}^{\text{Attention: vibrations paramétriques}} \right] E \\ = -\frac{1}{2} I'(q_1) \dot{q}_1^2 - I(q_1) \ddot{q}_1 + Q_2 \end{aligned}$$

- Une équation différentielle linéarisée avec des coefficients variables dépendants seulement de la commande  $q_1$
- Lorsque la non-uniformité est faible on peut simplifier davantage

- Cas 2: le mécanisme mené est uniforme

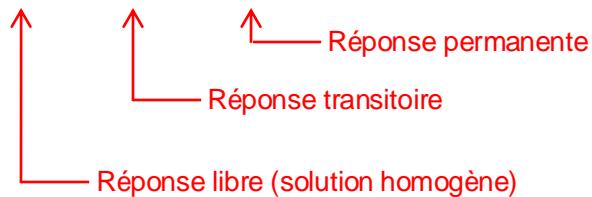
- On obtient des équations linéaires à coefficients constants

$$I\ddot{E} + c\dot{E} + kE = -I\ddot{q}_1 + Q_2$$

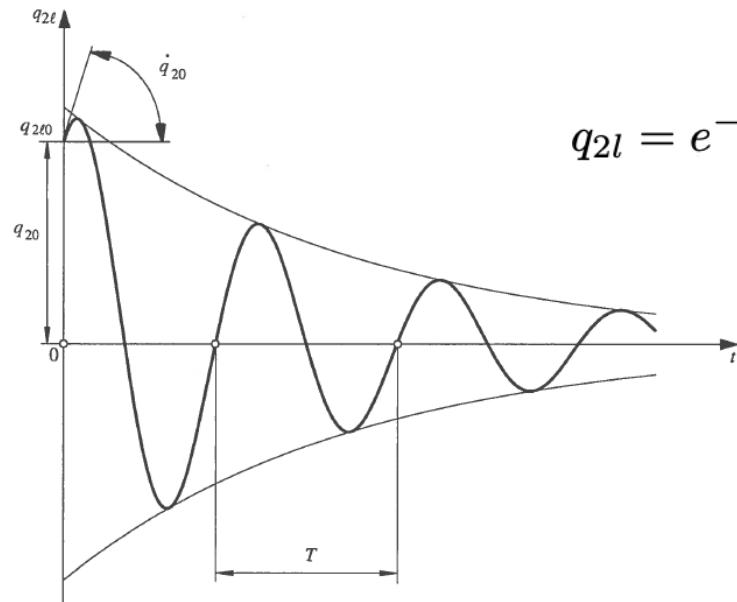
$$I\ddot{q}_2 + cq_2 + kq_2 = Q_2 + c\dot{q}_1 + kq_1$$

- La solution pour la réponse dynamique devient:

$$q_2 = q_{2l} + q_{2t} + q_{2p}$$



- Réponse libre
  - Vibration amortie dépend des conditions initiales



$$q_{2t} = e^{-\lambda t} \left[ q_{20} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{q}_{20}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right]$$

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2}$$

$$\lambda = \eta \omega_0$$

Extrait de la Figure 15.10 [Spinnler]

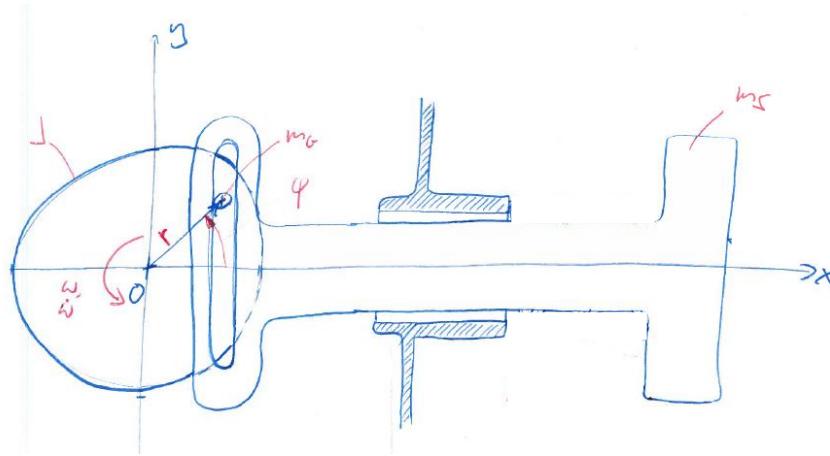
- Réponse transitoire

- Correspond à une vibration amortie avec la même forme que la réponse libre
  - Nait lors d'une discontinuité de la commande  $q_1$  ou de la force excitatrice  $Q_2$

- Réponse permanente

- Solution particulière lorsque les réponses transitoire et libre sont complètement amorties

# Exemple

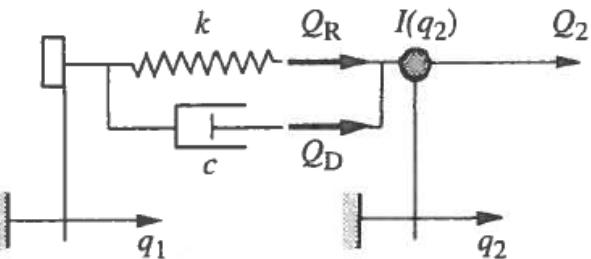
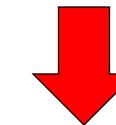
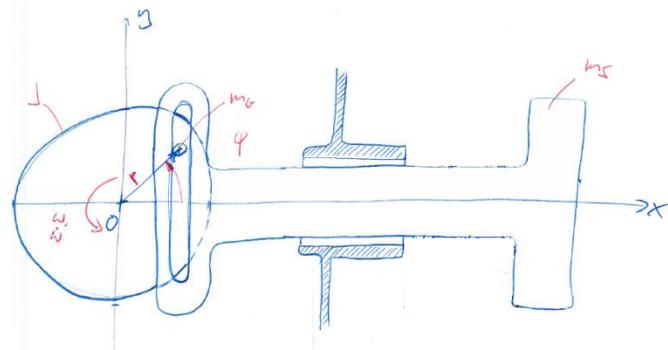


$$x_S = r \cos \Omega t$$

- Analysons l'erreur de positionnement d'un système uniforme soumis à un mouvement harmonique

# Exemple: modèle dynamique

- Le suiveur n'est plus un élément indéformable
  - Rigidité  $k$  entre la commande et le positionnement utile
  - La commande  $q_1$  correspond à une excitation harmonique



(a)

Extrait de la Figure 15.9 [Spinner]

# Exemple: réponse harmonique I

- L'équation de mouvement générique du mécanisme:

$$I(q_2) \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} I'(q_2) \dot{q}_2^2 + cq_2 + kq_2 = Q_2 + cq_1 + kq_1$$

$$I(q_1 + E) (\ddot{q}_1 + \ddot{E}) + \frac{1}{2} I'(q_1 + E) (\dot{q}_1 + \dot{E})^2 + c\dot{E} + kE = Q_2$$

- Elément souple mène un mécanisme uniforme:

$$I\ddot{q}_2 + cq_2 + kq_2 = Q_2 + cq_1 + kq_1 \quad \text{← Position utile } q_2$$

$$I\ddot{E} + c\dot{E} + kE = -I\ddot{q}_1 + Q_2 \quad \text{← Erreur de positionnement } E$$

# Exemple: réponse harmonique II

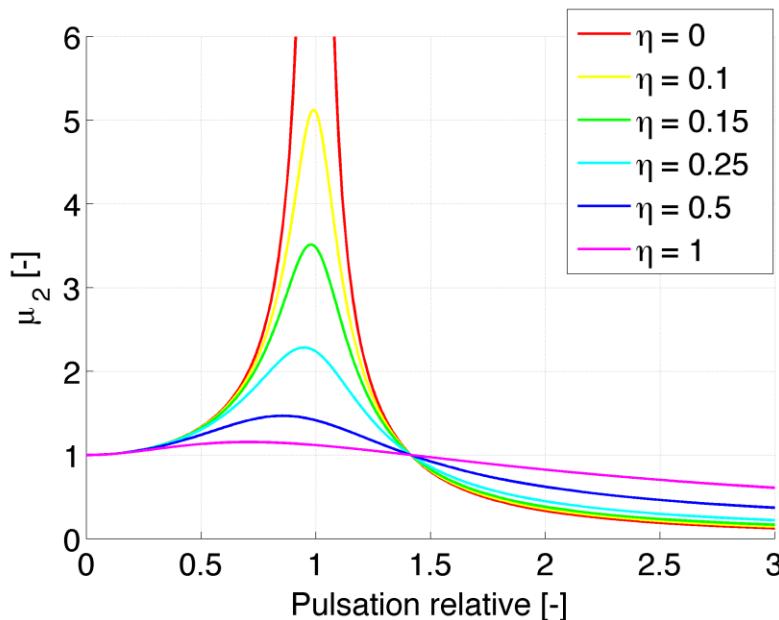
- Excitation harmonique du mouvement utile  $q_2$ 
  - Avec la commande:  $q_1 = \hat{q}_1 \sin(\Omega t)$
  - La position utile prend la forme:  $q_2 = \hat{q}_1 \mu_2 \sin(\Omega t - \varphi_2)$

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{1 + 4\eta^2\beta^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$
$$\beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{2\eta\beta^3}{1 + (4\eta^2 - 1)\beta^2} \right]$$

# Exemple: réponse harmonique III

- Coefficient d'amplification dynamique de la position utile  $q_2$



$$q_2 = \hat{q}_1 \mu_2 \sin(\Omega t - \varphi_2)$$

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{1 + 4\eta^2\beta^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

- Excitation harmonique de l'erreur  $E$

- Avec la commande:  $q_1 = \hat{q}_1 \sin(\Omega t)$
- L'erreur prend la forme:

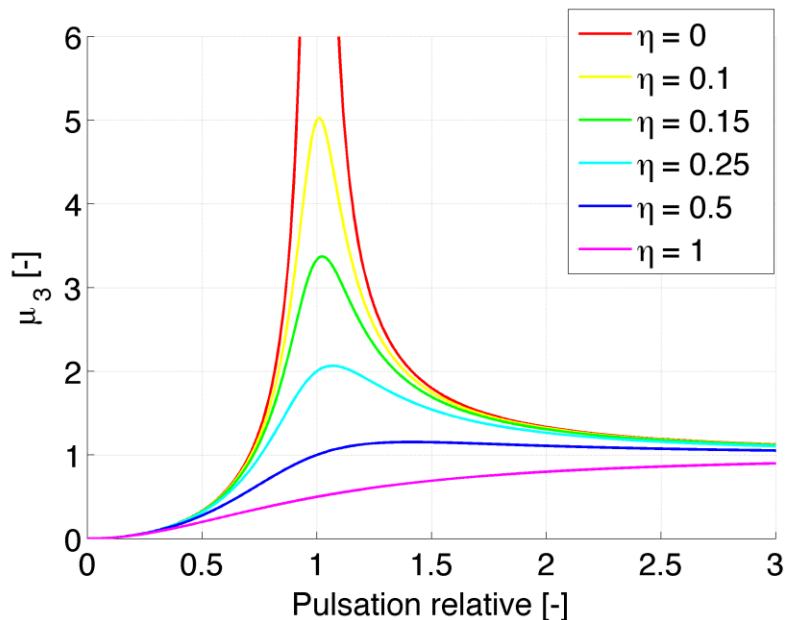
$$E = q_2 - q_1 = \hat{q}_1 \mu_2 \sin(\Omega t - \varphi_2) - \hat{q}_1 \sin(\Omega t) = \hat{q}_1 \mu_3 \sin(\Omega t - \varphi_3)$$

$$\mu_3 = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

$$\varphi_3 = \tan^{-1} \left[ \frac{2\eta\beta}{1 - \beta^2} \right]$$

# Exemple: réponse harmonique V

- Coefficient d'amplification dynamique de l'erreur  $E$



$$E = \hat{q}_1 \mu_3 \sin(\Omega t - \varphi_3)$$

$$\mu_3 = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

# Mouvement périodique I

- Analysons l'erreur de positionnement d'un système uniforme soumis à un mouvement périodique

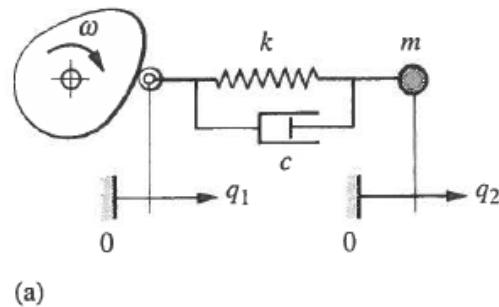
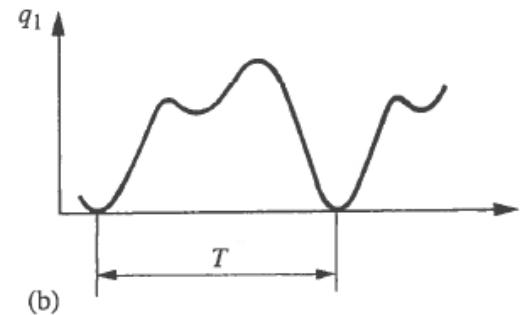


Figure 15.21 [Spinnler]



- Le signal est composé d'une fondamentale et d'une série d'harmoniques superposées

- Etape 1: analyse de signal

- Analyse de la commande par une décomposition du signal en série de Fourier:

$$q_1 = q_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\Omega t) + B_m \sin(m\Omega t)$$

$$q_1 = q_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \sin(m\Omega t + \alpha_m)$$

$$\alpha_m = \tan^{-1} \left[ \frac{A_m}{B_m} \right]$$



La composante calculée avec  $m = 1$   
est la **fondamentale**

## ▪ Etape 2: calcul de la réponse

- Puisque on a décomposé le signal de la commande en une série d'excitations harmoniques la réponse totale est aisément trouvée:

Réponse harmonique

$$E = \hat{q}_1 \mu_3 \sin(\Omega t - \varphi_3)$$

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \mu_3 \sin(m\Omega t + \alpha_m - \varphi_3)$$

$$\mu_3 = \frac{m^2 \beta^2}{\sqrt{(1 - m^2 \beta^2)^2 + 4\eta^2 m^2 \beta^2}} \quad \varphi_3 = \tan^{-1} \left[ \frac{2\eta m \beta}{1 - m^2 \beta^2} \right]$$

## ▪ Commentaires

- Un mécanisme réel exécute le mouvement cinématique (théorique) seulement à basse vitesse
- Une résonance se produit lorsque:  $m\Omega = \omega_0$
- Lorsqu'on augmente la vitesse d'une machine l'excitation se rapproche des pulsations propres
- Le facteur d'amplification  $\mu_i$  introduit une distorsion de la réponse à un spectre d'excitation et écarte le mouvement utile du mouvement souhaité
- Une commande avec une infinité d'harmoniques donne toujours lieu à des vibrations → étudier le spectre de la commande et limiter les harmoniques

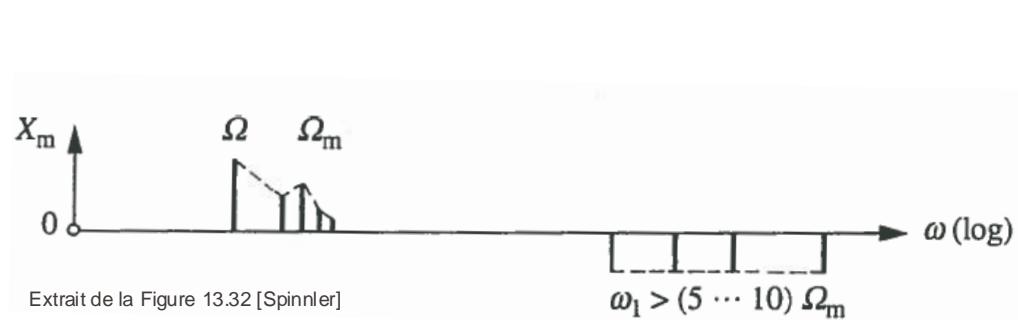
## ■ Commentaires

- Les mécanismes réels sont souvent non-uniformes
  - Les rigidités et les inerties réduites dépendent de la position
  - Les fréquences propres évoluent donc aussi avec la position du mécanisme
- Une non-uniformité périodique peut introduire des vibrations paramétriques qui présentent un caractère d'instabilité
  - Exemple: «pompage» d'une balançoire

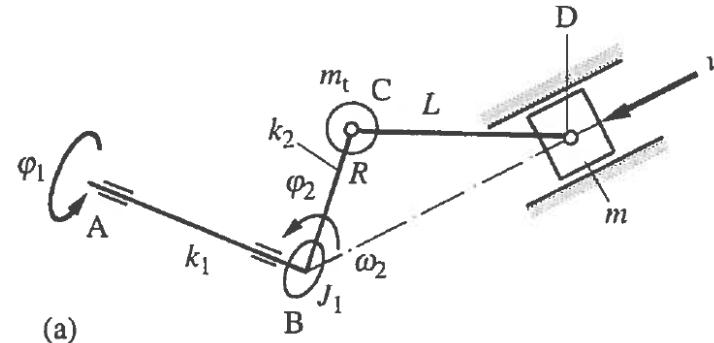


## ■ Commentaires

- Le spectre d'excitation périodique d'un mécanisme de précision doit se trouver bien en dessous de la pulsation propre la plus basse pour obtenir des mouvement précis
- Pour étudier l'erreur dynamique on peut souvent se contenter d'un modèle à 1 – 2 degrés de liberté



- Fréquence propre d'un mécanisme à piston



(a)

- Réponse permanente d'un suiveur de came

