Dynamique des Systèmes Mécaniques

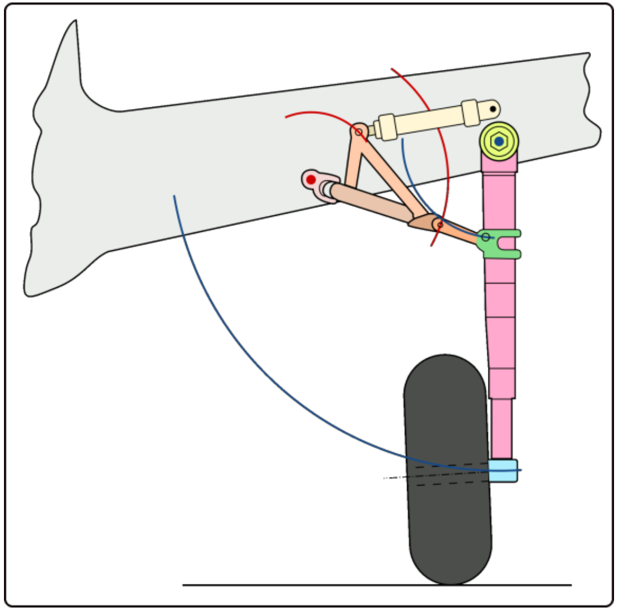
Modélisation

Prof. J. Schiffmann

École polytechnique fédérale de Lausanne

Modélisation en conception mécanique I

- Modèle mathématique permet de caractériser le fonctionnement d’un concept
  - Est-ce qu’on peut atteindre les spécifications avec ce concept? Quelles sont ses performances?
- Support pour le dimensionnement
  - Permet une analyse de sensibilité
  - Identifier les plages de fonctionnement
- Evite des surprises lors de la mise en service
  - Evite des coûts élevés et fait gagner du temps



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/46/Landing_gear_schematic-colored-animation.gif

Modélisation en conception mécanique II

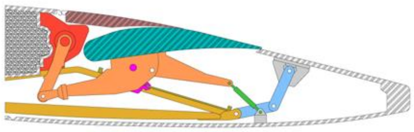
- La modélisation joue donc un rôle important dans la conception
  - Lors de la phase d'analyse d'une idée
  - Optimisation de la conception
- Un modèle peut inclure plus ou moins de détail, il est toujours basé sur des hypothèses simplificatrices
- Quel est le degré de précision nécessaire pour un modèle?
  - Ça dépend des objectifs et de ce qu'on cherche…

Types de modèles en conception mécanique

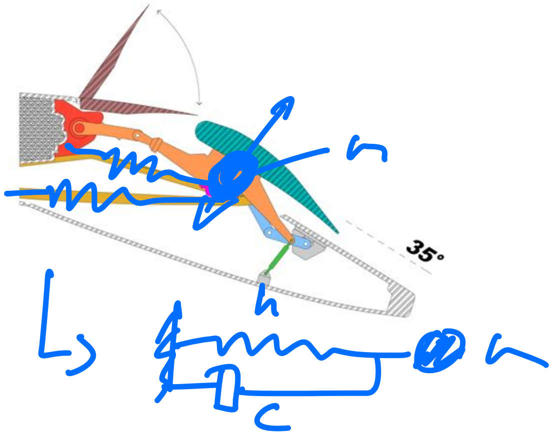
- Modèle statique
  - Les efforts d'inerties sont négligeables par rapport aux efforts statiques → satisfaisant pour les machines très lentes
- Modèle cinématique
  - Les éléments sont supposés indéformables
  - Tient compte des efforts d'inertie provoqués par les grands mouvements
- Modèle dynamique
  - Les éléments sont déformables
  - Tient compte des efforts d'inertie provoqués par les grand mouvements *<u>et</u>* par les mouvements de vibration

Modèle cinématique ou dynamique?

- Quand est-ce qu’il faut tenir compte de la déformation des pièces?
- Quand est-ce qu’on peut se contenter de les admettre comme indéformables?

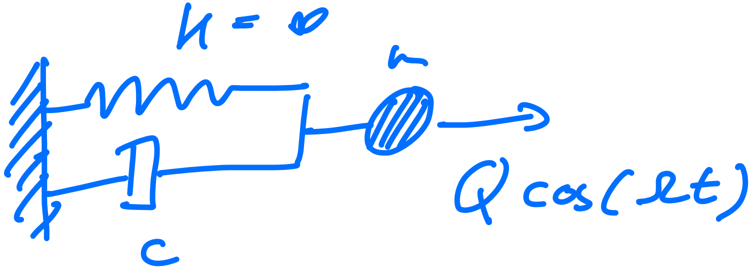


Mécanisme de flaps pour A320
http://en.wikipedia.org/wiki/Flap_%28aeronautics%29

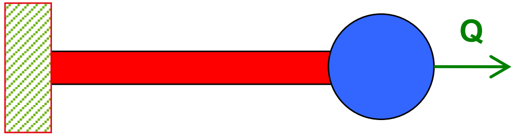


→ Analysons l’effort transmis par l’élement « rigidité » d’un oscillateur élémentaire pour répondre à ces questions

Modèle cinématique

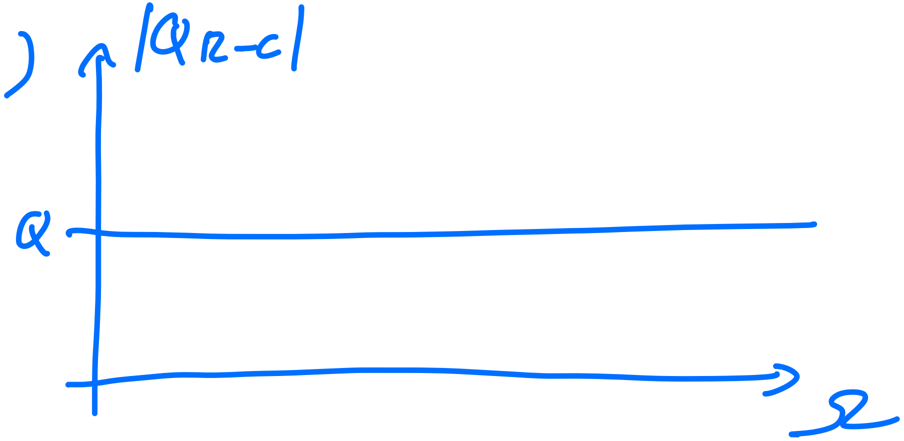


- Oscillateur élémentaire



  - L'effort transmis par l'élément « rigidité » lorsque la rigidité est infinie?

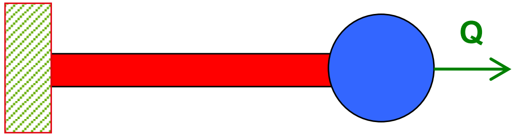
$$Q_{R-C} = Q\cos(\Omega t)$$



Modèle dynamique I

$$\Sigma F_i = I\ddot{q}$$

- Oscillateur élémentaire



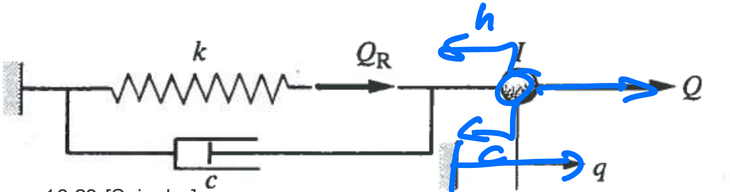


Figure 13.23 [Spinnler]

  - L'équation de mouvement

$$I[redacted] + c[redacted] + kq = Q\cos(\overset{\Omega}{W}t)$$

$$\overset{\omega}{W_0} = \sqrt{\frac{k}{I}} \qquad h = \frac{c}{2IW_0} = \eta$$

  - Avec la pulsation propre et le facteur d'amortissement

$$\frac{1}{W_0^2}[redacted] + \frac{2h}{W_0}[redacted] + q = \frac{Q}{k}\cos(\overset{\Omega}{W}t) \quad | \, k$$

$$Q_{R-D} = h \cdot q$$

Modèle dynamique II

- Oscillateur élémentaire
  - La rigidité transmet l'effort $Q_R = kq$

$$\frac{1}{W_0^2}$$ [redacted] $$_{R-D} + \frac{2h}{W_0}$$ [redacted] $$_{R-D} + Q_{R-D} = \underbrace{Q\cos(Wt)}$$

  - En régime permanent l'effort ressort devient

$\mu_1 \quad (\Omega t - \varphi_1)$

$$\underbrace{Q_{R-D} = Q\cancel{m_1}\cos(Wt - j_1)}$$

η, β

$$\mu_1\ \cancel{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - b^2\right)^2 + 4h^2 b^2}} \qquad \varphi_1\ j_1 = \tan^{-1}\left(\frac{4hb}{1 - b^2}\right) \qquad b = \frac{W}{W_0} = \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

β^2

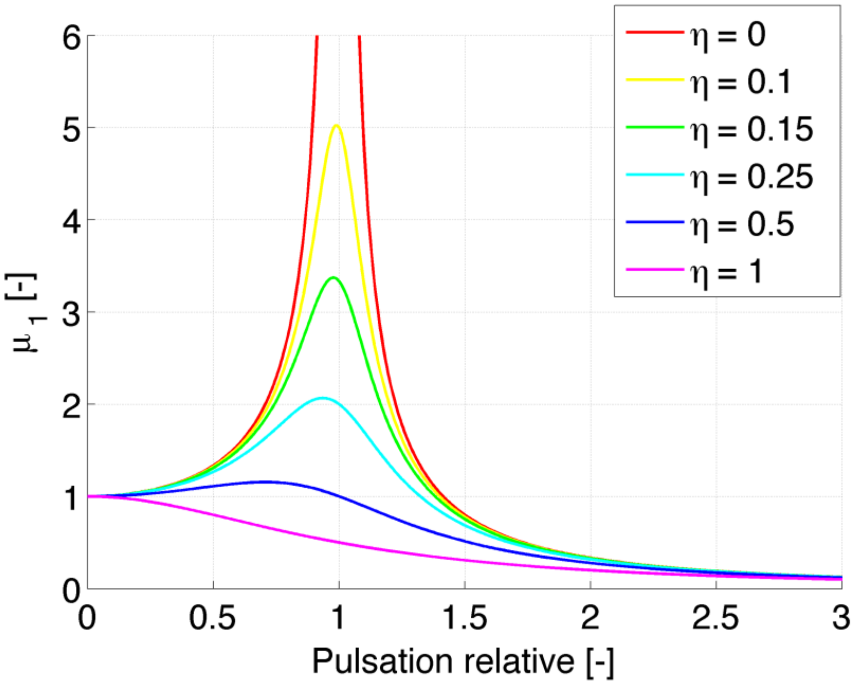
β

η

Dynamique de Systèmes Mécaniques

Modèle dynamique III

- Oscillateur élémentaire



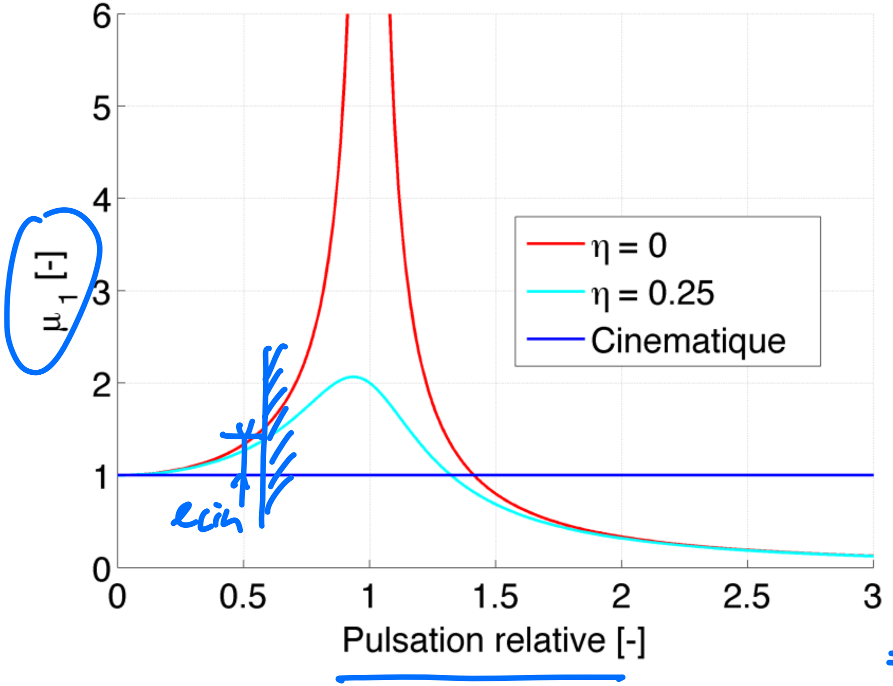
$$Q_{R-D} = Q\mu_1 \cos(\Omega t - \varphi_1)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

$\beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

Comparaison I

- Comparaison entre les modèles



$= \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

Dynamique

$$Q_{R-D} = Q\mu_1 \cos(\Omega t - \varphi_1)$$

Cinématique

$$Q_{R-C} = Q\cos(\Omega t)$$

Erreur relative

$$e = \frac{Q_{R-D} - Q_{R-C}}{Q_{R-D}} = \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1}$$

Comparaison II

- Jusqu'à quelle pulsation relative peut-on appliquer le modèle cinématique?
  - Une erreur limite permet le définition de μ_{Lim} et β_{Lim}

$$\mu_{1Lim} = \frac{1}{1 - |e_{Lim}|} = \frac{1}{1-\beta^2}\Big|_{\eta=0} \Rightarrow \beta_{Lim} = \sqrt{e_{Lim}}\Big|_{\eta=0}$$

  - Le modèle cinématique ne tient pas compte de la nature vibratoire mais fournit un résultat acceptable lorsque

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{\Omega_{Lim} \leq \omega_0 \cdot \sqrt{e_{Lim}}}$$

Comparaison III

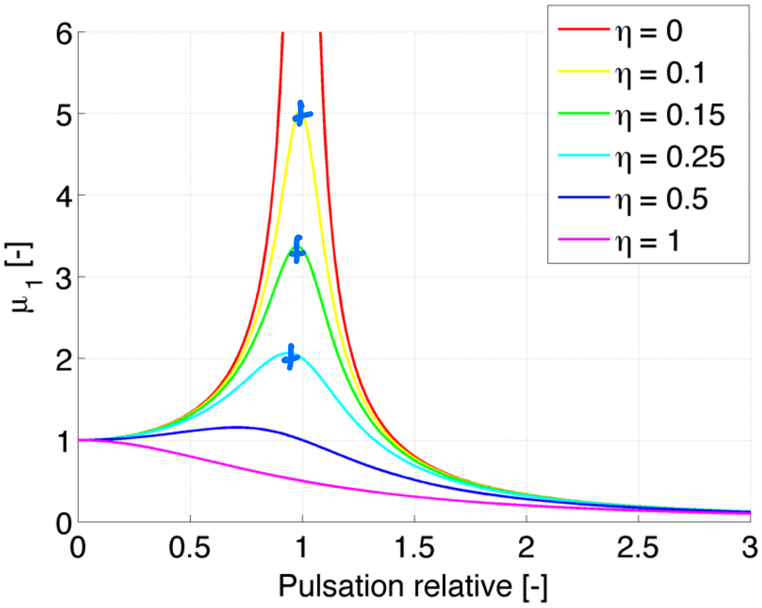
- Jusqu'à quelle pulsation relative peut-on appliquer le modèle cinématique?

e_{Lim}		1%	5%	10%
β_{Lim}	$\eta=0$	0.1	0.224	0.316
	$\eta=0.1$	0.101	0.226	0.320
	$\eta=0.2$	0.104	0.234	0.331

- L'amortissement influence peu le β_{Lim}
- Le modèle cinématique s'écarte fortement lorsque la pulsation relative s'approche de la pulsation propre ω_0
- Pour une excitation $W \leq 0.22 W_0$ on peut se contenter d'un modèle cinématique (erreur de 5%) Ω

Effet de l'amortissement I

- Négliger l'amortissement pour estimer la pulsation propre ?



Pulsation propre de l'oscillateur amorti

$$W_1 = W_0\sqrt{1 - h^2}$$

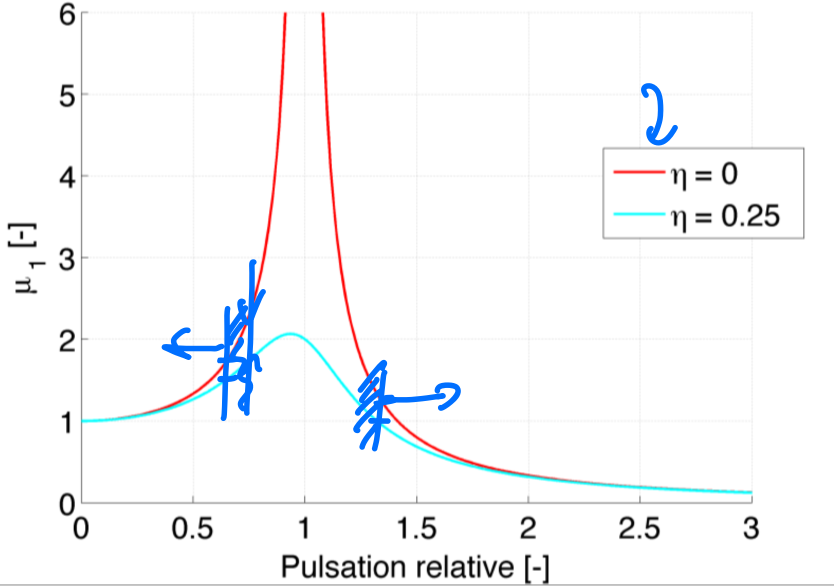
Pour un $\eta = 0.2$

$$W_1 = 0.98\,W_0$$

- Il est raisonnable de négliger l'amortissement pour une estimation la pulsation propre

Effet de l'amortissement II

- Négliger l'amortissement en régime forcé ?



En négligeant l'amortissement:

- On commet une erreur par excès
- On introduit une erreur de phase substantielle

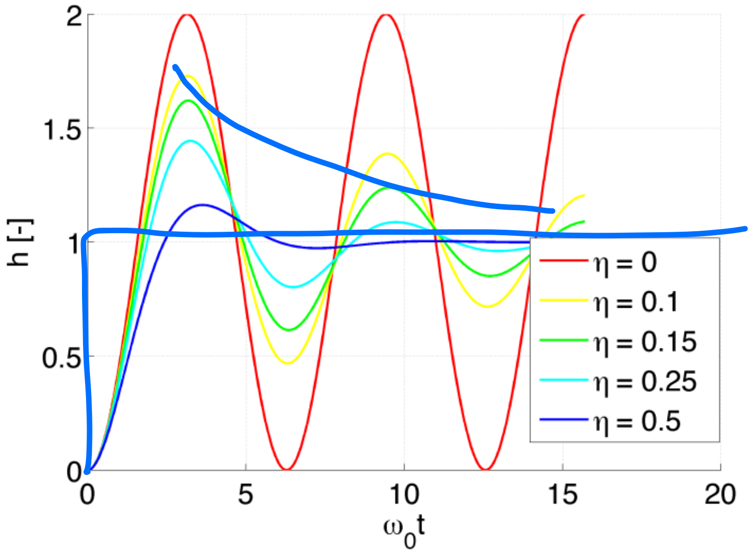
- Pour une erreur admissible il existe deux plages où l'on peut négliger l'amortissement

Effet de l’amortissement III

- Négliger l’amortissement lors d’un saut indiciel
  - La réponse d’un oscillateur amorti à saut indiciel:

$$q = \frac{Q}{k} h(t)$$

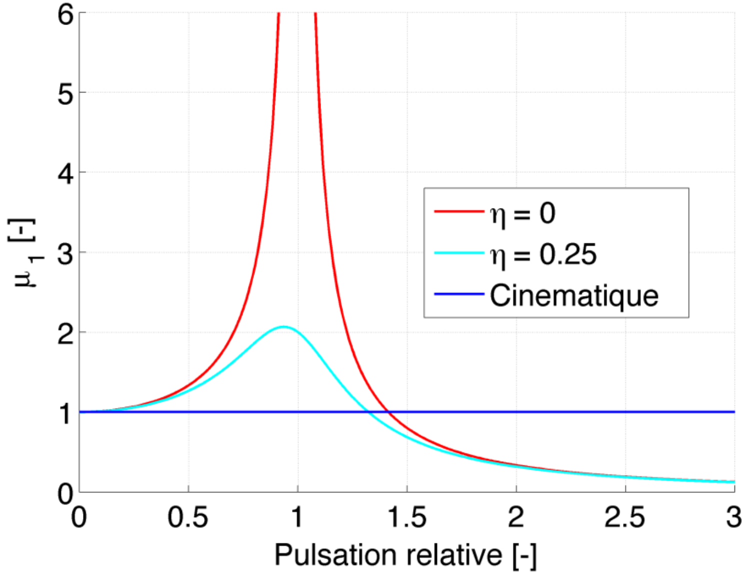
$$h(t) = 1 - e^{-hW_0 t}\left(\cos W_1 t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin W_1 t\right)$$



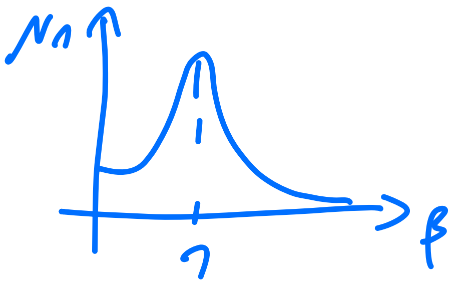
L’amortisseur diminue progressivement l’amplitude de l’oscillation superposée & transitoire

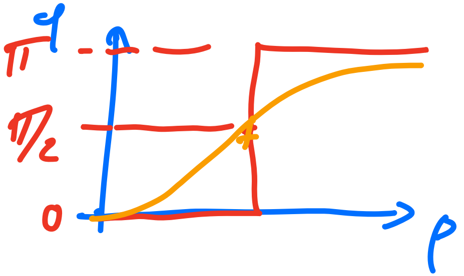
Conclusions I

- Modèle cinématique vs. dynamique
  - Pour une excitation $W \leq 0.22 w_0$ on peut se contenter d'un modèle cinématique
  - Au-delà l'erreur sur l'amplitude du mouvement devient trop grande



Conclusions II





- Le rôle de l'amortissement d'un modèle dynamique
  - On peut estimer les fréquences propres en négligeant les amortissements sans erreur appréciable
  - L'amortissement amortit les régimes transitoires
  - Il faut tenir compte de l'amortissement lorsqu'on se rapproche de la résonance et s'il existe une exigence par rapport au déphasage

Dynamique des Systèmes Mécaniques

Discrétisation dynamique

Prof. J. Schiffmann

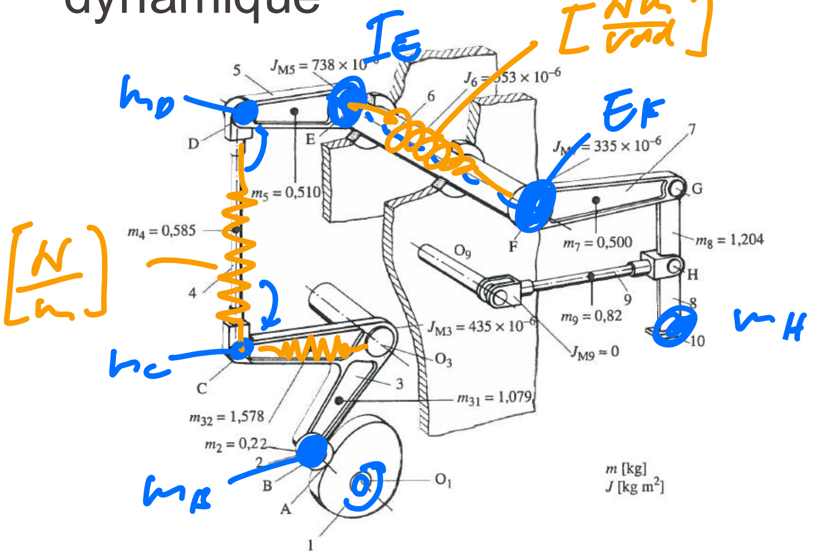
École polytechnique fédérale de Lausanne

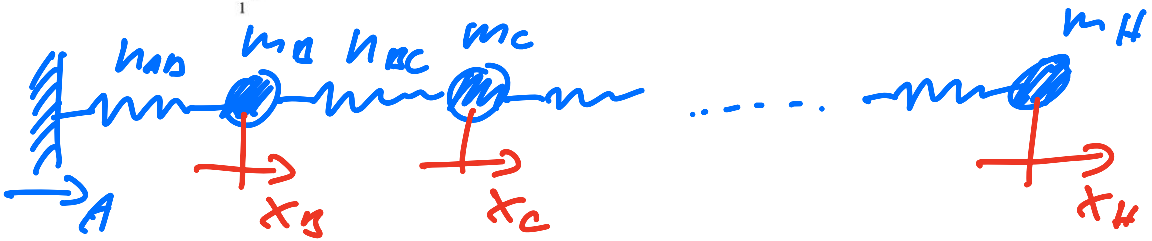
Discrétisation dynamique I

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \rightarrow \frac{F}{\Delta l} = k$$

- Discrétiser les inerties et les rigidités pour calculer son comportement dynamique





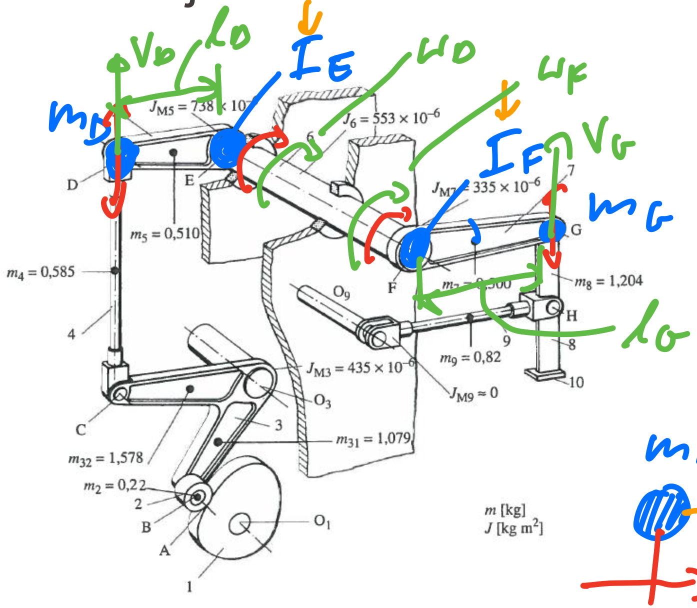
Discrétisation dynamique II

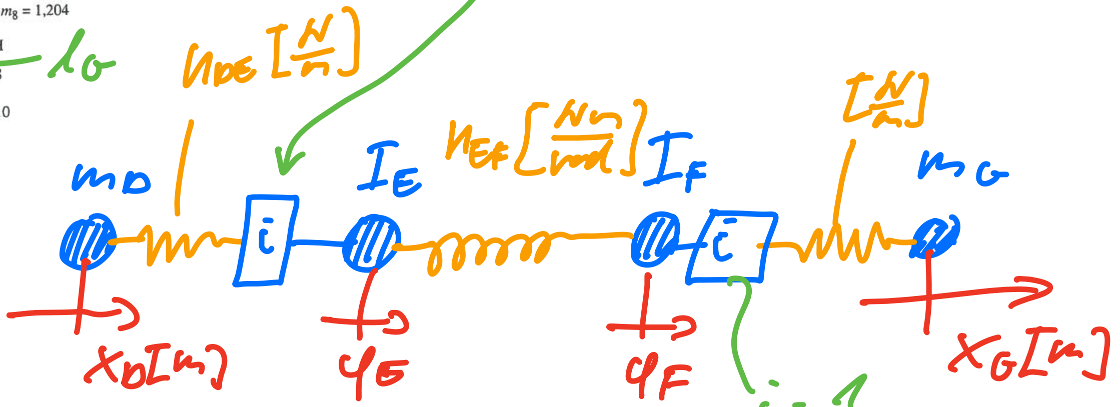
$$\omega_F \cdot l_G = V_G \qquad i = \frac{\omega_F}{V_G} = \frac{1}{l_G}$$

$$V_D = l_D \, \omega_D$$

$$i = \frac{V_D}{\omega_D} = l_D$$

- Comment joindre les différents mouvements?

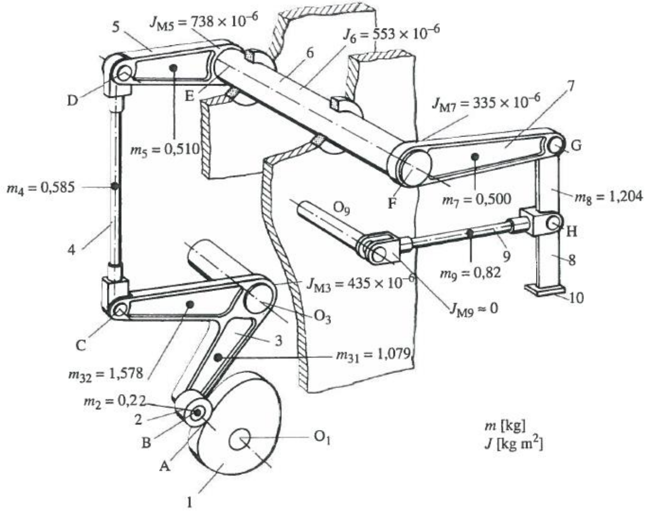


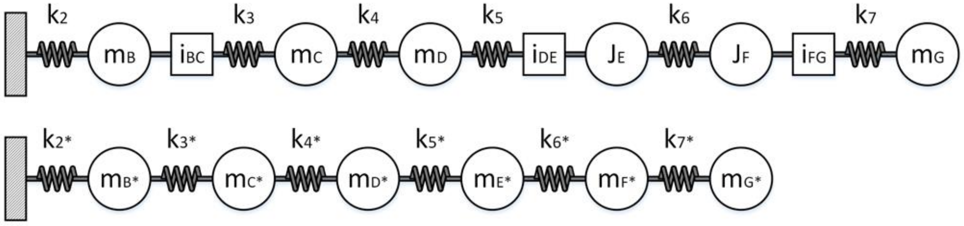


$$i = \frac{1}{l_G}$$

Discrétisation dynamique III

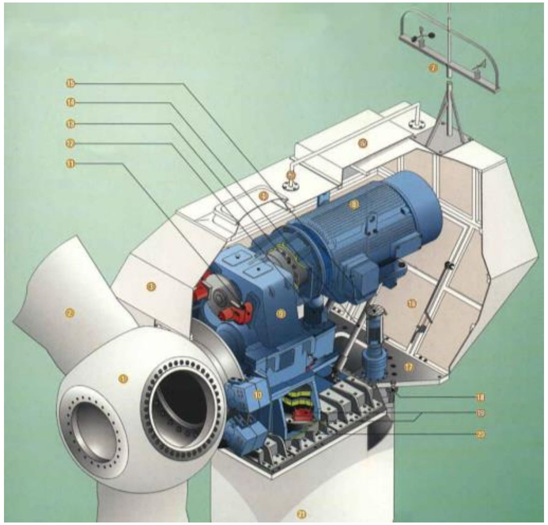
- Comment joindre les différents mouvements?
  - Par la réduction dynamique



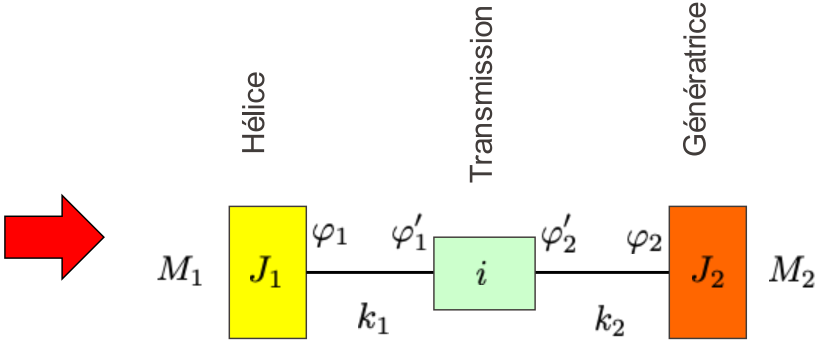


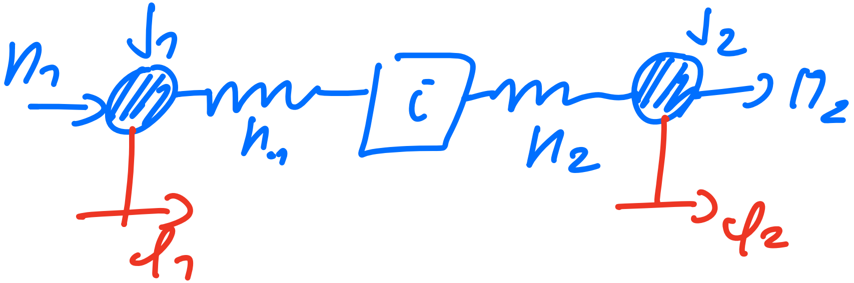
Modèle dynamique: exemple I

- Centrale éolienne (à vide)



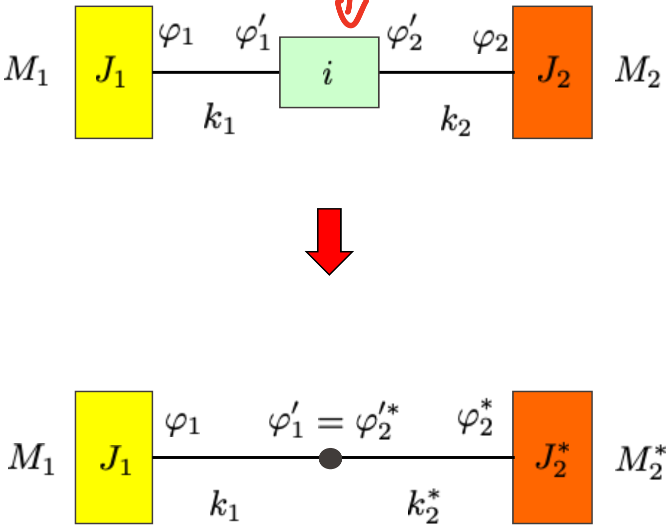
Groupe hélice-générateur d'une centrale éolienne (www.hi-windkraft.de)





Principe de réduction I

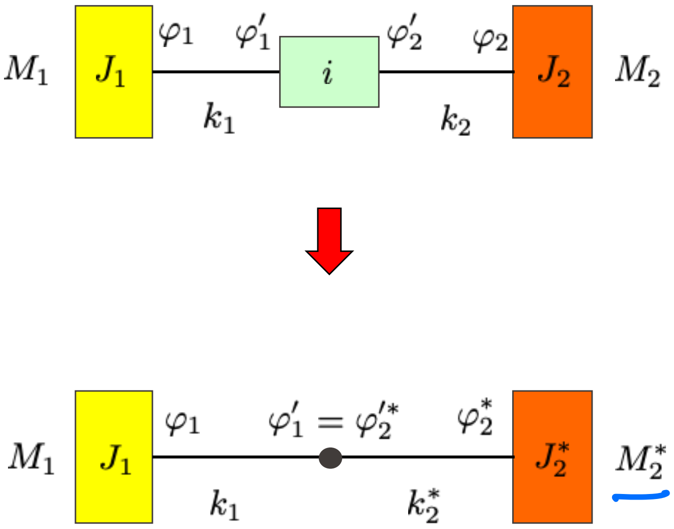
- Système à 2 degrés de liberté avec transmission
  - Réduction à la coordonnée d'entrée 1



$$i = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2}$$

Principe de réduction II

- Réduction d'un effort
  - Principe de conservation de la puissance transmise



$$M_2 \dot{\varphi}_2 = M_2^* \cdot \dot{\varphi}_2^*$$

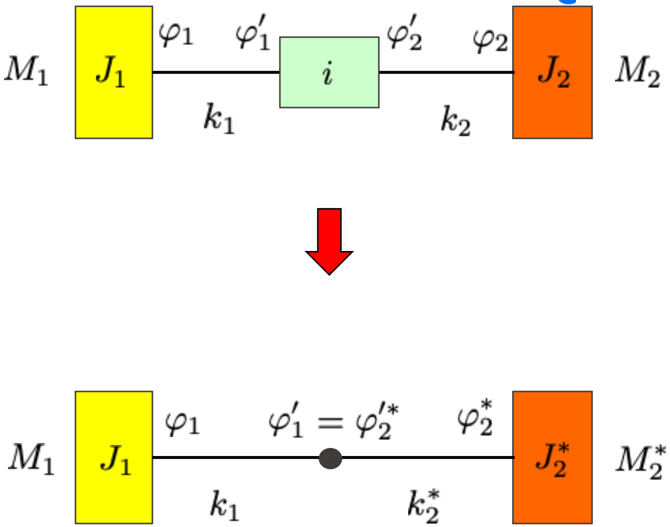
$$M_2^* = M_2 \cdot \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_2^*} = M_2 \cdot \underbrace{\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1}}_{1/i}$$

$$\dot{\varphi}_2^* = \dot{\varphi}_1$$

$$\boxed{M_2^* = M_2 \cdot \frac{1}{i}}$$

Principe de réduction III

- Réduction d’une inertie
  - Principe de conservation de l’énergie cinétique



$$\frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} J_2^* \cdot \dot{\varphi}_2^{*2}$$

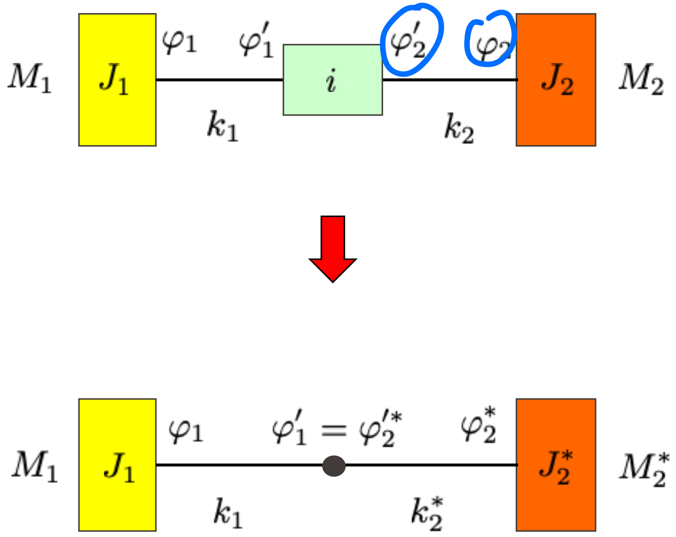
$$J_2^* = J_2 \frac{\dot{\varphi}_2^2}{\dot{\varphi}_2^{*2}} \longrightarrow \frac{1}{i^2}$$

$$\dot{\varphi}_2^* \rightarrow \dot{\varphi}_1$$

$$\boxed{J_2^* = J_2 \cdot \frac{1}{i^2}}$$

Principe de réduction IV

- Réduction d'une rigidité
  - Principe de conservation de l'énergie potentielle



$$\frac{1}{2} k_2 \underbrace{(\varphi_2 - \varphi_2')}_{\Delta\varphi_2}{}^2 = \frac{1}{2} k_2^* \underbrace{(\varphi_2^* - \varphi_2'^*)}_{\Delta\varphi_2^*}{}^2$$

$$k_2^* = k_2 \frac{\Delta\varphi_2^2}{\Delta\varphi_2^{*2}} \approx k_2 \left(\frac{\dot\varphi_2}{\dot\varphi_2^*}\right)^2$$

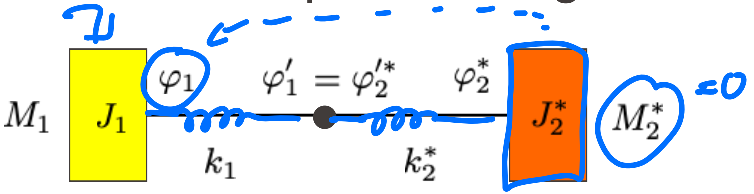
↳ i

$$\boxed{k_2^* = k_2 \cdot \frac{1}{i^2}}$$

- Approche valide seulement pour déformations faibles !

Modèle dynamique: exemple II

- Deux inerties reliés par deux rigidités



$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2^*}}$$

  - Système à 2 degrés de mobilité

$$\underbrace{M_1 = J_1\ddot{\varphi}_1 + k_{eq}\left(\varphi_1 - \varphi_2^*\right)}_{\text{EQ } 1} \qquad \underbrace{\cancel{M_2^*} = J_2^*\ddot{\varphi}_2^* + k_{eq}\left(\varphi_2^* - \varphi_1\right)}_{\text{EQ } 2} \qquad \frac{EQ_1}{J_1} - \frac{EQ_2}{J_2}$$

$$\frac{M_1}{J_1}\left(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2^*\right) + k_{eq}\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2^*}\right)\left(\varphi_1 - \varphi_2^*\right) \qquad \underbrace{\psi = \varphi_1 - \varphi_2^*}$$

$$\boxed{\ddot{\Psi} + \underbrace{k_{eq}\frac{J_1 + J_2^*}{J_1 J_2^*}}_{\rightarrow \omega_0}\Psi = \frac{M_1}{J_1}}$$

Discrétisation dynamique IV

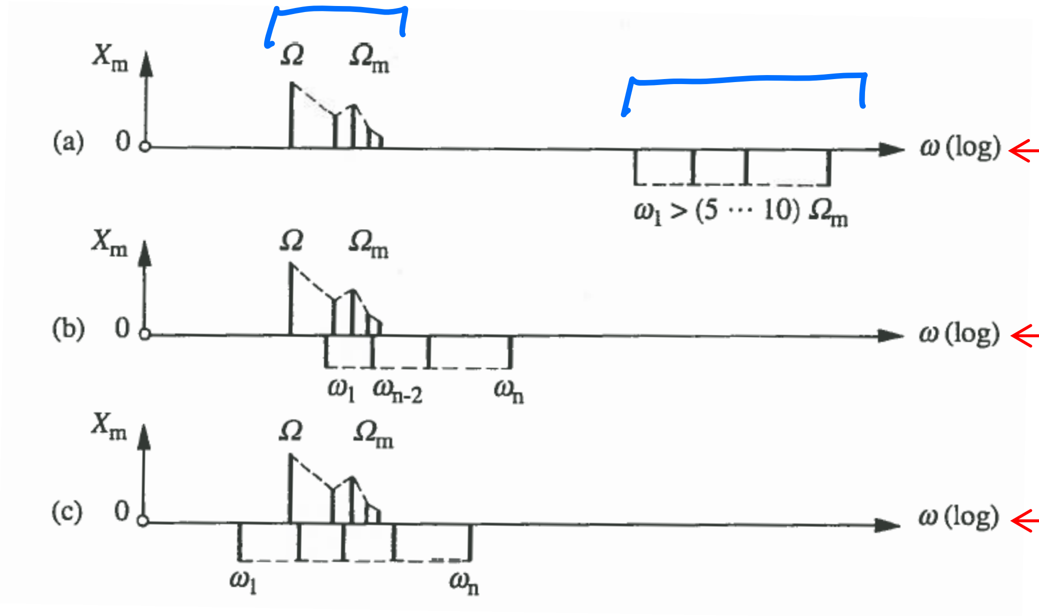
- Commentaires
  - L’analyse du comportement dynamique d’une machine exige une discrétisation des inerties et des rigidités → degrés de liberté!
  - Un grand nombre de degrés de liberté augmente la proximité d’un modèle au comportement réel. Il augmente aussi la complexité et le temps de calcul
  - Il faut trouver le bon compromis entre un modèle très fin mais complexe et un modèle simpliste mais trop grossier

Discrétisation dynamique V

- Comment déterminer le nombre de degrés de liberté idéal d'un modèle dynamique? Quelques directives:
  - Généralement on modélise un système de manière que le modèle offre deux fréquences propres au-delà du spectre d'excitation
  - Le nombre de degrés de liberté idéal d'un modèle dynamique dépend du spectre d'excitation
  - Souvent 3-8 degrés de liberté sont suffisants. Il faut soigner le calcul des inerties et des rigidités → modèles cinématiques

Discrétisation dynamique VI

- Le nombre de degrés de liberté par rapport du spectre d’excitation



Le calcul cinématique est suffisant

Des résonances sont probables. Calcul dynamique

Régime surcritique. Calcul dynamique

Figure 13.32 [Spinnler]

Discrétisation dynamique VII

- Quelques astuces de modélisation (1)
  - Lorsqu'une inertie est plus grande que son inertie voisine, on peut considérer que l'inertie lourde joue le rôle d'un encastrement → exemple $m_1 \gg m_2 \,\&\, m_3$

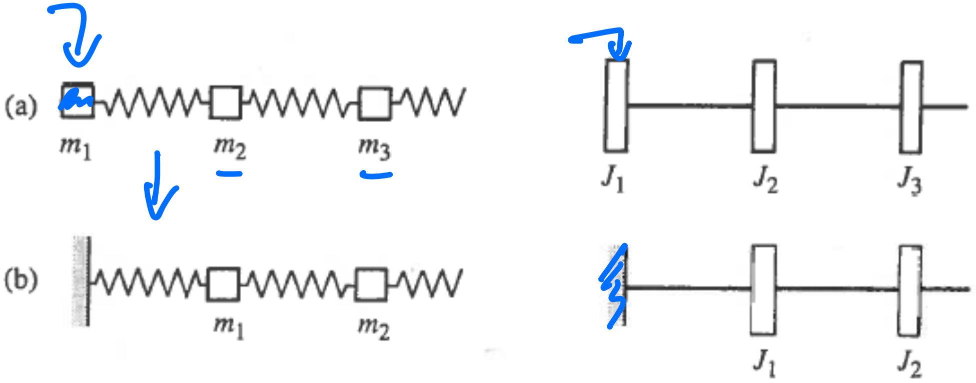


Figure 13.34 [Spinnler]

  - Lorsque un mouvement est imposé à un élément d'une chaîne cinématique, ce point se comporte comme un encastrement

Discrétisation dynamique VIII

- Quelques astuces de modélisation (2)
  - Un élément plus rigide que les autres peut être considéré comme indéformable → les inerties qu'il relie en forment une inertie unique

  - La configuration du modèle peut changer selon le régime de fonctionnement (p. ex. un frein)

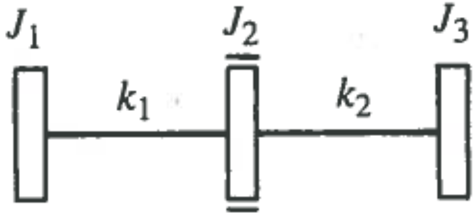
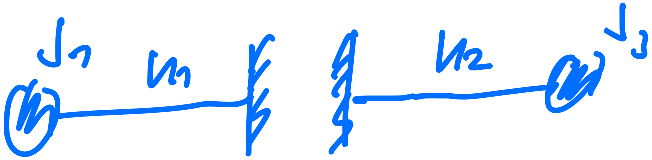


Figure 13.36 [Spinnler]



Méthode pour estimer ω_0

- Pour simplifier le modèle il faut connaître la pulsation propre la plus basse → ceci nécessite un modèle préalable détaillé

  - Comment faire? → utiliser des méthodes d'approximation

$$\omega^*_{Est} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i^{*2}} \right)^{-1/2} \leq \omega_{1-real}$$

Pulsations propres obtenues par de modèles simplifiés

Méthode pour estimer ω_0

- Méthode 1
  - Ne conserver qu’une inertie à la fois et annuler les autres
- Méthode 2
  - Ne conserver qu’une rigidité à la fois en considérant les autres comme indéformables

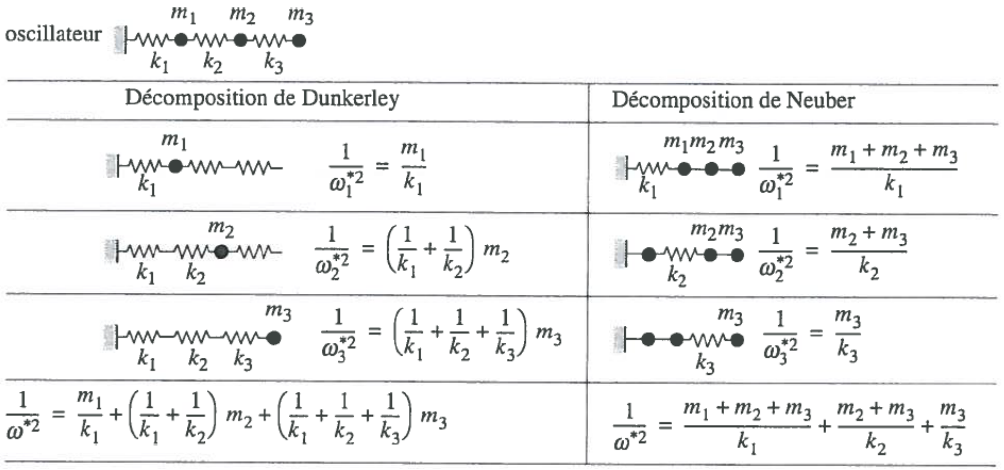


Figure 13.40 [Spinnler]

Exercices

- Discrétisation d'une manivelle
- Mécanisme d'un transporteur
- Machine scroll co-rotative