EPFL

Dynamique des Systèmes Mécaniques

Résumé Cinématique

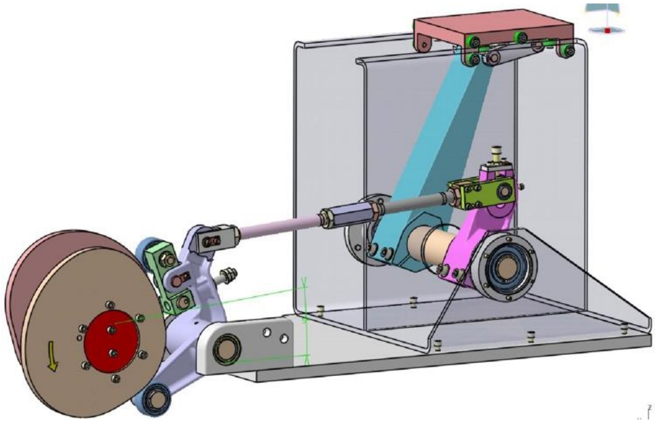
Prof. J. Schiffmann

École polytechnique fédérale de Lausanne

Cinématique

- La cinématique étudie le mouvement, la vitesse et l’accélération de points et de *corps rigides* dans l’espace

- Le mouvement est généralement limité par des contraintes géométriques:
  - Les degrés de mobilité
  - Les lois d’espace



Mécanisme pour introduction de feuilles de carton

Chaînes cinématiques

- Chaîne cinématique de machine

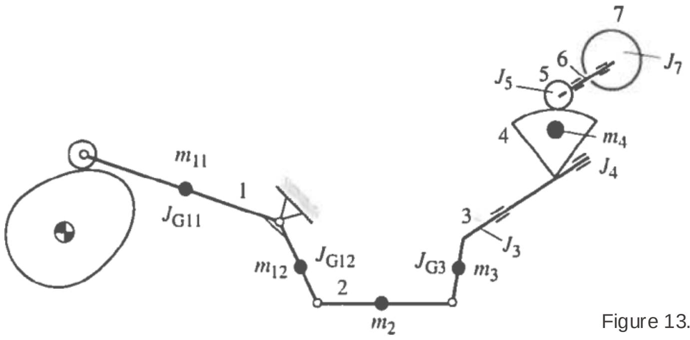


Figure 13.11 [Spinnler]

- Composée d'organes effectuant des mouvements en translation et/ou rotation et à vitesses différentes

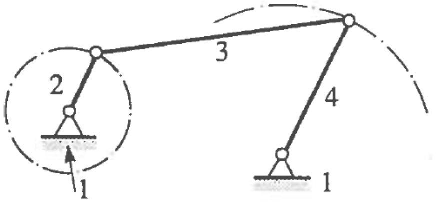
- La cinématique d'un tel système est déterminée par la réduction à la/les coordonnée/s menante/s

Etude cinématique

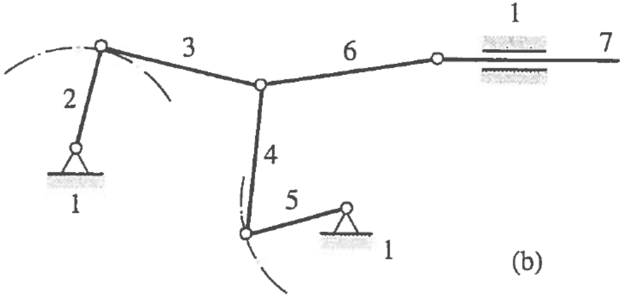
- Qu’est-ce qu’on étudie avec la cinématique? Quels sont les objectifs?
  - Identifier le degré de mobilité
  - Caractériser le mouvement des éléments
  - Déterminer les vitesses et les accélérations
  - Identifier l’équation de mouvement cinématique
    - Les efforts d’entraînement
  - Exprimer les efforts créés par les mouvements
    - Les efforts d’inertie

Degré de mobilité I

- Degré de mobilité d’une chaîne cinématique
  - Détermine le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour fixer tout élément dans l’espace
  - Déterminer les cordonnées menantes



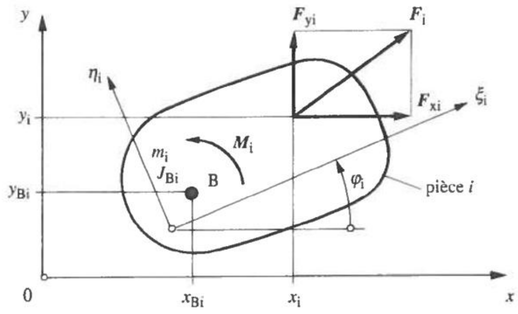
Quadrilatère articulé: système plan à 1 degré de mobilité



Système plan à 2 degrés de mobilité

Loi d’espace I

- La loi d’espace décrit intégralement le mouvement d’un élément



Exemple d’un mouvement plan d’une pièce à 3 degrés de liberté

Figure 14.3 [Spinnler]

- Lois d’espace du mouvement plan pour le corps *i* en fonction de *q(t)*

$$x_{Bi} = x_{Bi}(q)$$

$$y_{Bi} = y_{Bi}(q)$$

$$\varphi_{Bi} = \varphi_{Bi}(q)$$

Loi d'espace II

Exemple d'un mouvement plan d'une pièce
à 3 degrés de liberté

- La vitesse

$$\dot{x}_{Bi} = x'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$
$$\dot{y}_{Bi} = y'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$
$$\dot{\varphi}_{Bi} = \varphi'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$

$$x'_{Bi}(q) = \frac{dx_{Bi}}{dq}$$

- L'accélération

$$x''_{Bi}(q) = \frac{d^2x_{Bi}}{dq^2}$$

$$\ddot{x}_{Bi} = x''_{Bi}(q)\dot{q}^2(t) + x'_{Bi}(q)\ddot{q}(t)$$
$$\ddot{y}_{Bi} = y''_{Bi}(q)\dot{q}^2(t) + y'_{Bi}(q)\ddot{q}(t)$$
$$\ddot{\varphi}_{Bi} = \varphi''_{Bi}(q)\dot{q}^2(t) + \varphi'_{Bi}(q)\ddot{q}(t)$$

Fonctions géométriques liés au
mouvement imposé

Equation de mouvement I

- Formulation de Lagrange
  - Permet de facilement identifier les équations de mouvements de systèmes complexes
  - Cette formulation est fondée sur l'équilibre énergétique
    → Le Lagrangien L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) = Q_1^*$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) = Q_2^*$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) = Q_n^*$$

$$L = T - U$$

Energie potentielle

Energie cinétique

Equation de mouvement II

- Pour un système à 1 degré de mobilité

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q$$

- En utilisant les expressions pour T, U et $Q*$ on trouve l'équation de mouvement d'une chaîne cinématique à 1 degré de mobilité

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}I'(q)\dot{q}^2 + U'(q) = Q_m^* - Q_e^*$$

Efforts moteurs

Efforts d'entrainement

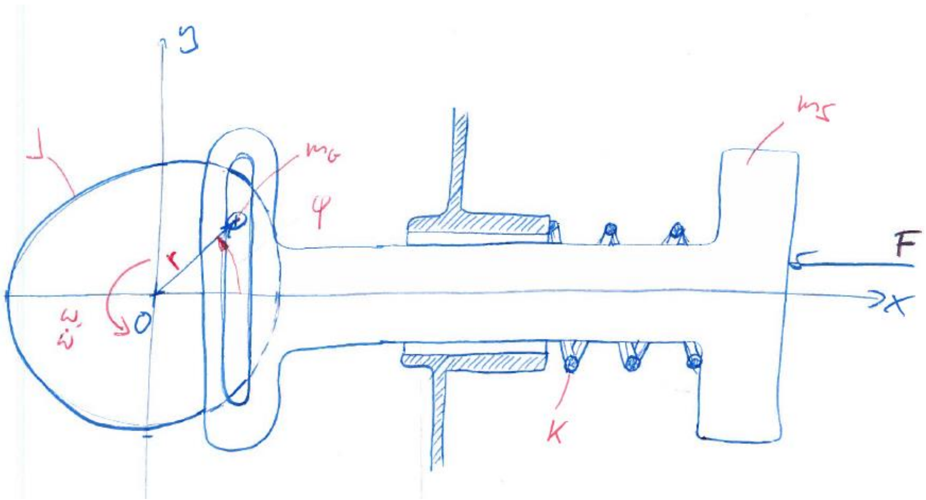
Efforts d'accélération de l'inertie réduite

Contribution de l'énergie potentielle

Efforts dus à la variation de l'inertie réduite en fonction de la coordonnée menante

Exemple: Analyse cinématique du système à came

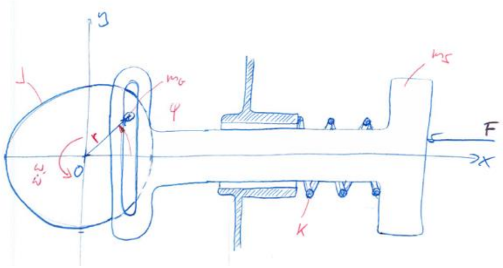
- N_{Rot} : 0 - 3'000 t/min
- F : négligeable
- m_S : 250 g
- m_G : 1 g
- J : $2 \cdot 10^{-5}$ kgm²
- r : 20 mm



Exemple: marche à suivre

- Analyse du système à came
  1. Déterminer le degré de mobilité
  2. Trouver l’équation de mouvement cinématique
     - Identifier les lois d’espace
     - Exprimer les énergies cinétique et potentielle
     - Appliquer la formulation des Lagrange
  3. Analyser les couples moteur et d’entraînement
     - Equilibrage de puissance nécessaire?
  4. Analyser les forces d’inertie
     - Equilibrage des efforts d’inertie nécessaire?

Exemple: degré de mobilité



Exemple: marche à suivre

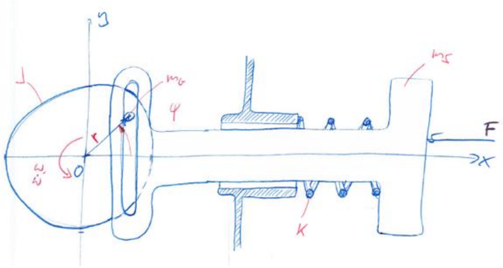
- Analyse du système à came
  1. Déterminer le degré de mobilité

  2. Trouver l'équation de mouvement cinématique
     - Identifier les lois d'espace
     - Exprimer les énergies cinétique et potentielle
     - Appliquer la formulation des Lagrange

  3. Analyser les couples moteur et d'entraînement
     - Equilibrage de puissance nécessaire?

  4. Analyser les forces d'inertie
     - Equilibrage des efforts d'inertie nécessaire?

Exemple: loi d'espace du suiveur



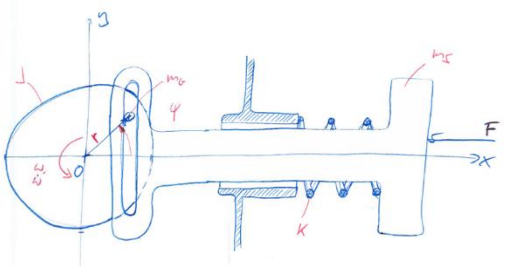
$$x_S = rcos(q)$$

$$\dot{x}_S = -rsin(q)\dot{q}$$

$$\ddot{x}_S = -rcos(q)\dot{q}^2 - rsin(q)\ddot{q}$$

$$y_S = \dot{y}_S = \ddot{y}_S = 0$$

Exemple: loi d’espace de la goupille



$$x_G = rcos(q) \qquad y_G = rsin(q)$$

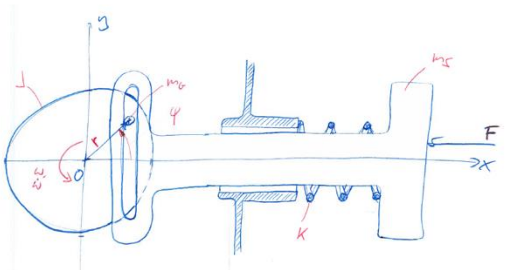
$$\dot{x}_G = -rsin(q)\dot{q} \qquad \dot{y}_G = rcos(q)\dot{q}$$

$$\ddot{x}_G = -rcos(q)\dot{q}^2 - rsin(q)\ddot{q} \qquad \ddot{y}_G = -rsin(q)\dot{q}^2 + rcos(q)\ddot{q}$$

- La vitesse absolue de la goupille devient:

$$v_G = \sqrt{\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2} = \sqrt{r^2 \sin^2(q)\dot{q}^2 + r^2 \cos^2(q)\dot{q}^2} = r\dot{q}$$

Exemple: énergies cin. & pot.



- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}J\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_G v_G^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{x}_s^2$$

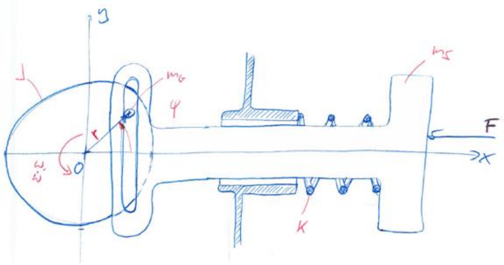
$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\left[J + m_G r^2 + m_S r^2 \sin^2(q)\right]}_{I(q)}\dot{q}^2 = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 \qquad \dot{x}_S = -r\,sin(q)\dot{q}$$

- Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx_K^2 \qquad x_K = -x_S + r = r\left[1 - cos(q)\right]$$

$$U = \frac{1}{2}kr^2\left[1 - cos(q)\right]^2$$

Exemple: efforts réduits



- Efforts extérieurs
  - M_m : couple moteur sur q
  - F : force sur suiveur

- Expression du travail virtuel des efforts:

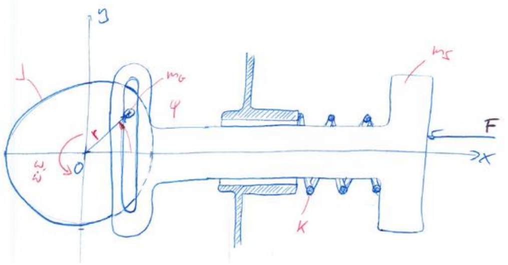
$$i = -\frac{1}{r\sin(q)}$$

Exemple: formulation de Lagrange

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}I'(q)\dot{q}^2 + U'(q) = Q^*_m - Q^*_e$$



Exemple: équation de mouvement

- Etape 2: équation de mouvement:

$$\underbrace{\left[J + m_G r^2 + m_S r^2 \sin^2 q\right] \ddot{q}}_{I\tilde{q}} +$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_S r^2 \dot{q}^2 \sin 2q}_{\frac{1}{2} I_{\hat{q}}^2} +$$

$$\underbrace{k r^2 (1 - \cos q) \sin q}_{U'} = \underbrace{M_m + F r \sin q}_{Q*}$$

Exemple: marche à suivre

- Analyse du système à came
  1. Déterminer le degré de mobilité
  2. Trouver l'équation de mouvement cinématique
     - Identifier les lois d'espace
     - Exprimer les énergies cinétique et potentielle
     - Appliquer la formulation des Lagrange
  3. Analyser les couples moteur et d'entraînement
     - Equilibrage de puissance nécessaire?
  4. Analyser les forces d'inertie
     - Equilibrage des efforts d'inertie nécessaire?

Exemple: couple d'entraînement

- Couple nécessaire pour une vitesse constante et zéro effort sur le suiveur

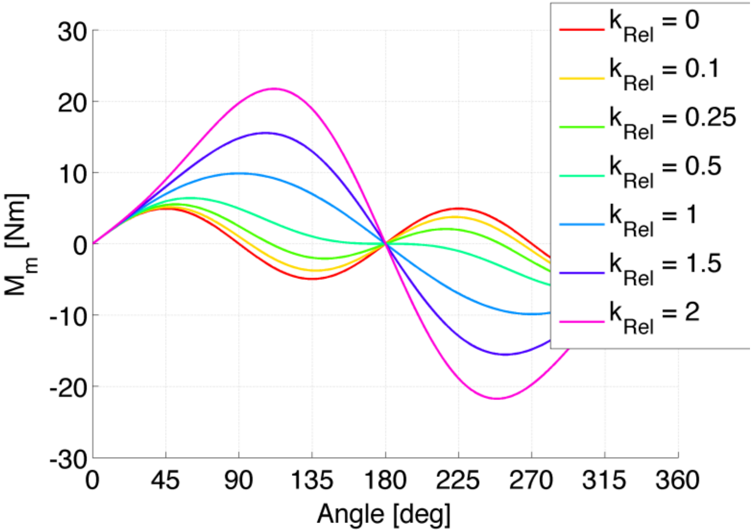
$$\frac{1}{2}m_S r^2 \dot{q}^2 sin(2q) + kr^2 sin(q) - \frac{1}{2}kr^2 \sin(2q) = M_m$$

$$\frac{1}{2}r^2 sin(2q)\left[m_S \dot{q}^2 - k\right] + kr^2 sin(q) = M_m$$

Exemple: couple d'entraînement

- Choisir k pour minimiser la fluctuation de M_m
  - Pour ω constant:

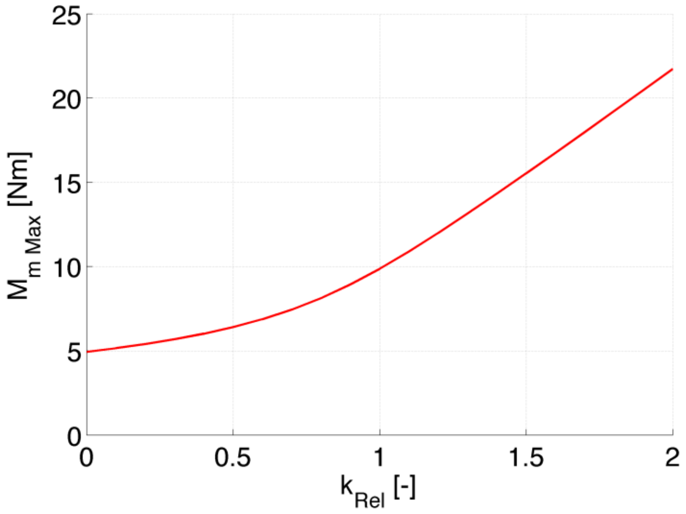
$$\frac{1}{2}r^2 sin(2q)\left[m_S\dot{q}^2 - k\right] + kr^2 sin(q) = M_m$$



$$k_{Rel} = \frac{k}{m_S\dot{q}^2}$$

Exemple: couple d'entraînement

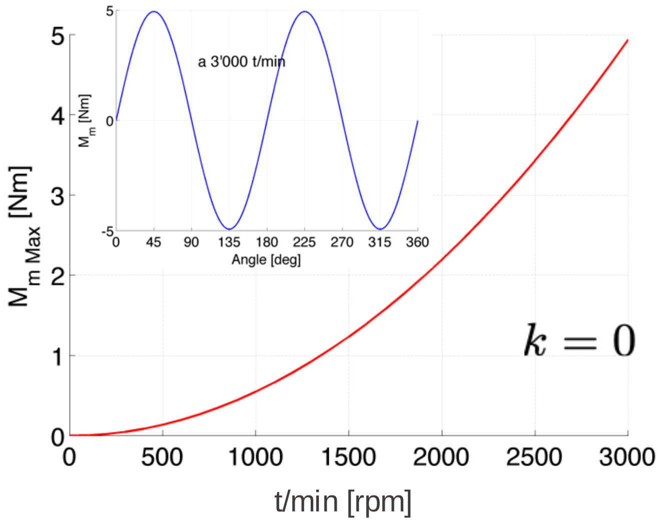
- Comment choisir k ?
  - Pour diminuer la fluctuation de couple il faut $k = 0$
  - Pour atteindre une vitesse de rotation constante le couple fourni par le moteur doit osciller!



$$k_{Rel} = \frac{k}{m_S \dot{q}^2}$$

Exemple: couple d'entraînement

- Comment évolue la fluctuation du couple avec la vitesse de rotation?
  - La non-uniformité du système introduit une forte dépendance de la variation du couple moteur en fonction de ω



$$k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} r^2 m_S \dot{q}^2 sin(2q) = M_m$$

Exemple: équilibrage de puissance

- Par l'ajout d'un système à came

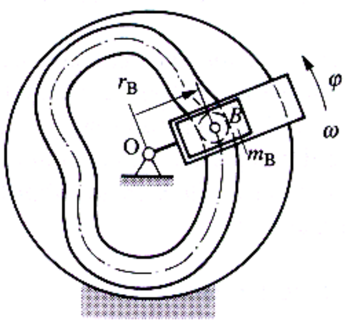
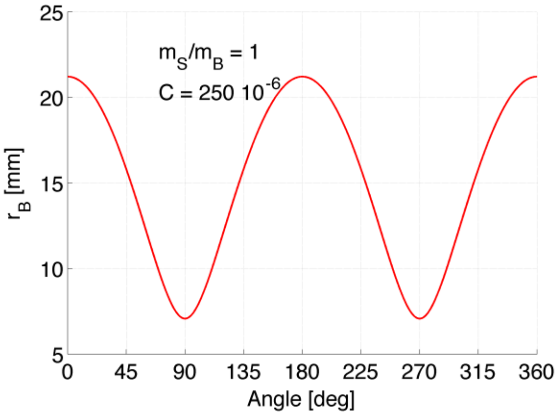


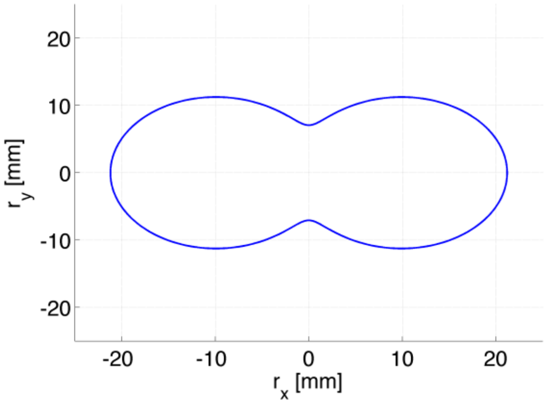
Figure 14.44 [Spinnler]

Exemple: équilibrage de puissance

- Equilibrage de puissance à ω constant
  - On obtient pour les deux mécanismes

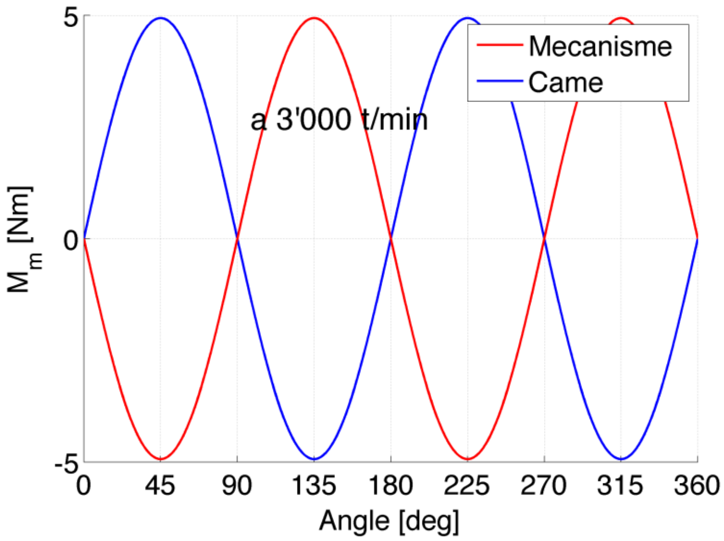
$$\frac{1}{2}m_S r^2 \omega^2 sin(2\omega t) + \frac{1}{2}\frac{dJ_B}{d\varphi}\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_B = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{m_S}{m_B}r^2 \cos 2\omega t + C}$$





Exemple: équilibrage de puissance

- Equilibrage de puissance à ω constant
  - Avec la came auxiliaire on arrive donc à compenser le couple résultant de la non-uniformité du système original



Exemple: marche à suivre

- Analyse du système à came
  1. Déterminer le degré de mobilité
  2. Trouver l'équation de mouvement cinématique
     - Identifier les lois d'espace
     - Exprimer les énergies cinétique et potentielle
     - Appliquer la formulation des Lagrange
  3. Analyser les couples moteur et d'entraînement
     - Equilibrage de puissance nécessaire?
  4. Analyser les forces d'inertie
     - Equilibrage des efforts d'inertie nécessaire?

Efforts d'inertie I

$$0 = \vec{F} - \underbrace{\left[m\vec{a}_a(A) + m\dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP})\right]}_{\vec{F}_{Inertie}}$$

- Tout corps soumis à une loi de mouvement oppose un effort résistant → effort d'inertie
- L'effort d'inertie charge le corps conjointement avec l'effort utile
- Les deux efforts (utile et inertie) limitent la vitesse du système
- L'effort d'inertie est un effort mesuré dans le repère A

Efforts d'inertie II

- Comment calculer les efforts d'inertie d'une pièce dans une chaîne cinématique?

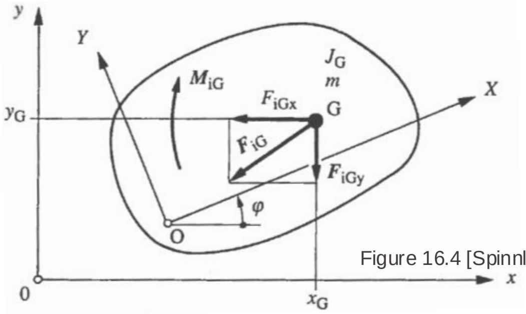


Figure 16.4 [Spinnler]

  - Le principe D'Alembert impose

$$0 = \vec{F} + \vec{F}_{Inertie} \qquad \vec{F}_{Inertie} = -m a_a$$

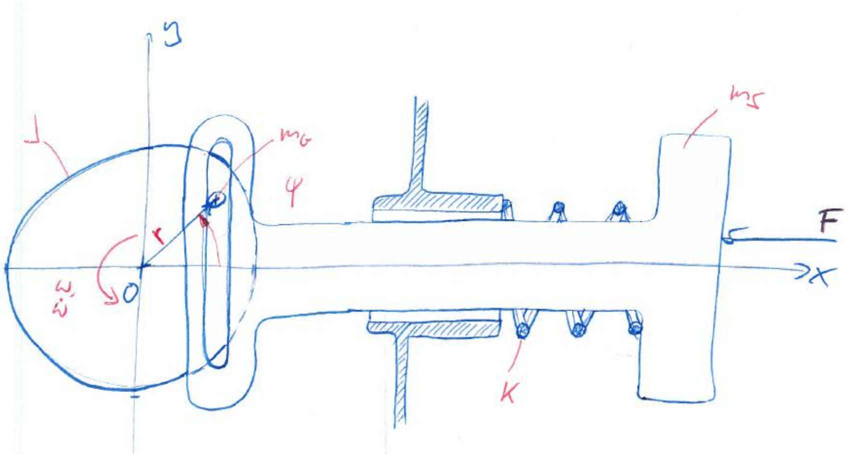
$$0 = \vec{M} + \vec{M}_{Inertie} \qquad \vec{M}_{Inertie} = -J_G \alpha_a$$

Accélérations imposées par les lois d'espace

  - Les efforts d'inertie se déduisent des lois d'espace

Exemple: forces d'inertie

- La goupille et le suiveur génèrent des forces d'inertie
- A vitesse constante le disque n'en génère pas



Exemple: forces d'inertie

- Goupille

$$\vec{F}_G = -m_G a_G = -m_G \begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(q)\dot{q}^2 + r\sin(q)\ddot{q} \\ r\sin(q)\dot{q}^2 - \cos(q)\ddot{q} \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_G = m_G r \dot{q}^2 \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix}$$

- Equilibrage

$$\vec{F}_G = m_G r \dot{q}^2 \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix} + m_E r_E \dot{q}^2 \begin{bmatrix} \cos(q+\pi) \\ \sin(q+\pi) \end{bmatrix}$$

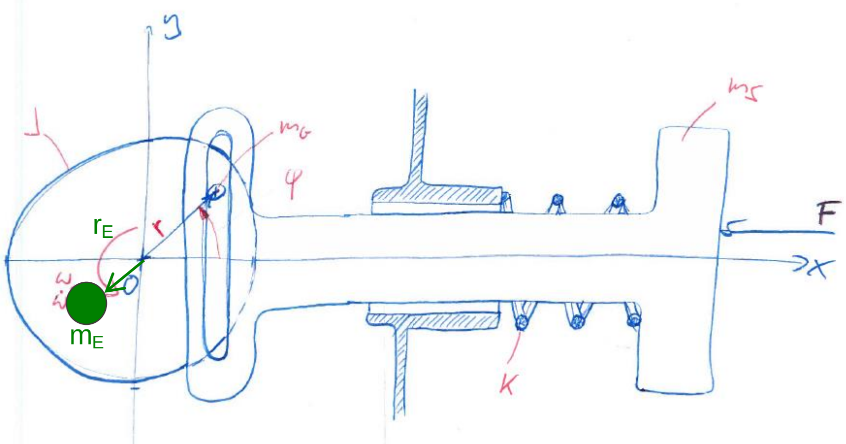
$$\Rightarrow \quad m_G r = m_E r_E$$

Exemple: forces d'inertie

- Equilibrage de la force d'inertie de la goupille

$$\vec{F}_G = m_G r \omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} = m_G r \omega^2 e^{i\omega t} \qquad \left|\vec{F}_G\right| = 1.97N$$

- Equilibrable par un contrepoids où: $m_G r = m_E r_E$



Exemple: forces d'inertie

- Suiveur

$$\vec{F}_S = -m_S a_S = -m_S \begin{bmatrix} \ddot{x}_S \\ \ddot{y}_S \end{bmatrix} = m_S \begin{bmatrix} r\cos(q)\dot{q}^2 + r\sin(q)\ddot{q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_S = -m_S r \dot{q}^2 \begin{bmatrix} \cos(q) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemple: forces d'inertie

- Equilibrage de la force d'inertie du suiveur
  - Il s'agit d'une force oscillatoire et non pas rotative
  - Une force oscillatoire peut être décomposée en deux forces: (1) co-rotative et (2) contra-rotative

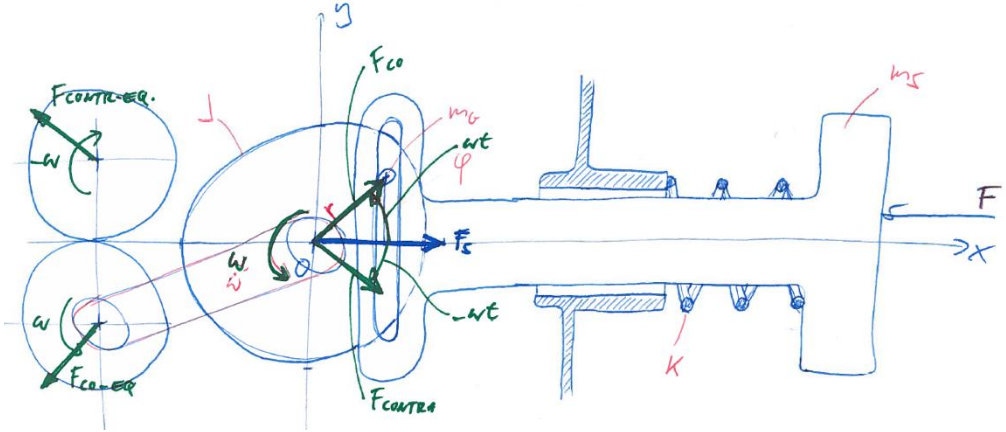
$$m_S r\omega^2 \cos(\omega t) = m_S r\omega^2 \frac{1}{2} [\cos(\omega t) + \cos(-\omega t)]$$

Exemple: forces d'inertie

- Equilibrage de la force d'inertie du suiveur

$$m_S r\omega^2 \cos(\omega t) = m_S r\omega^2 \frac{1}{2}\left[\cos(\omega t) + \cos(-\omega t)\right]$$

  - L'équilibrage complet se fait avec deux arbres contrarotatifs qui équilibrent les deux forces → Lanchester



Conclusion: étude cinématique

- Concerne les corps rigides uniquement
- Donne une approche systématique pour:
  - Connaître le degré de mobilité
  - Caractériser le mouvement des éléments
  - Déterminer les vitesses et les accélérations
  - Identifier l'équation de mouvement cinématique
  - Exprimer efforts moteur et d'entraînement
  - Exprimer les efforts d'inertie
  - Equilibrage de puissance
  - Equilibrage des efforts d'inertie