

Résumé

Cinématique

Prof. J. Schiffmann

Chaînes cinématiques

- Composé d'organes effectuant des mouvements en translation et / ou rotation et à vitesses différentes
- La cinématique d'un tel système complexe s'exprime par **la réduction** de la cinématique aux **coordonnées menantes**
- **La réduction** d'un système mécanique permet d'exprimer les **énergies cinétique & potentielles** et **les efforts** en fonction de la/les **cordonnée/s menante/s**

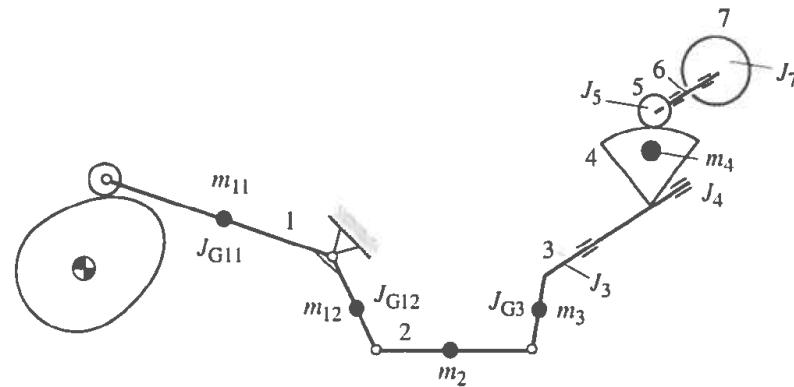


Figure 13.11 [Spinnler]

Equation de mouvement

- Par la méthodologie de Lagrange ($L = T - U$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

... et en utilisant les expressions pour T , U et Q^* en fonction des lois d'espace on trouve:

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}I'(q)\dot{q}^2 + U'(q) = Q_m^* - Q_e^*$$

Efforts d'accélération de l'inertie réduite Efforts moteurs
Efforts dus à la variation de l'inertie réduite en fonction de la coordonnée menante Efforts d'entrainement
Contribution de l'énergie potentielle

Discretisation des masses

- Loi de mouvement complexe complique la description mathématique
 - Placer les masses à des endroits où la loi est plus simple

- Principes d'équivalence

| | | | |
|--------------------|---------------------------|---|-----------------------|
| • Masse | $m = m_A + m_B$ | } | Equivalence statique |
| • Centre de masse | $m_A a = m_B b$ | | |
| • Moment d'inertie | $J_G = m_A a^2 + m_B b^2$ | | Equivalence dynamique |

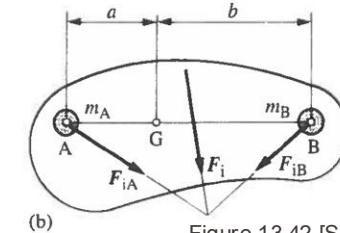
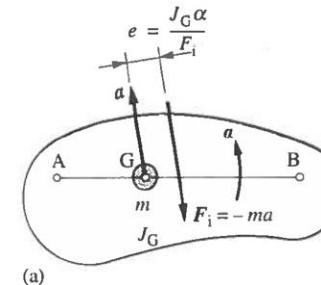


Figure 13.42 [Spinnler]

- L'effort d'inertie pour un corps solide

$$\vec{a}_r(P) = 0 \quad \vec{v}_r = 0$$

$$0 = \vec{F} - \underbrace{\left[m\vec{a}_a(A) + m\dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}) \right]}_{\vec{F}_{Inertie}}$$

Principe D'Alembert 

- Le principe D'Alembert impose

$$0 = \vec{F} + \vec{F}_{Inertie}$$

$$0 = \vec{M} + \vec{M}_{Inertie}$$

$$\vec{F}_{Inertie} = -ma_a$$

$$\vec{M}_{Inertie} = -J_G \alpha_a$$



Accélérations
imposées par les
lois d'espace



Dynamique des Systèmes Mécaniques

Limitations par les
efforts d'inertie

Prof. J. Schiffmann

Limitations par les efforts d'inertie

- Les efforts d'inertie chargent les éléments et limitent la transmission d'efforts utiles
 - Question: comment se comportent l'effort utile et la puissance utile en fonction de la vitesse du système?
- Les éléments sont chargés par
 - Une précontrainte
 - Une contrainte d'inertie
 - Une contrainte utile

$$\sigma_I = C_I \rho v^2$$

σ_0 Coefficient géométrique

$$\sigma_U = C_U F_u$$

Coefficient dépendant de la géométrie et de la sollicitation

Limitations par les efforts d'inertie

- Hypothèse: contraintes parallèles

- Critère de dimensionnement

$$\sigma_0 + \sigma_I + \sigma_U \leq \frac{\sigma_{Lim}}{S}$$

↑ Contrainte limite
S ↓ Coefficient de sécurité

$$\rightarrow \sigma_0 + C_I \rho v^2 + C_U F_U \leq \frac{\sigma_{Lim}}{S}$$

← Coefficient de sécurité

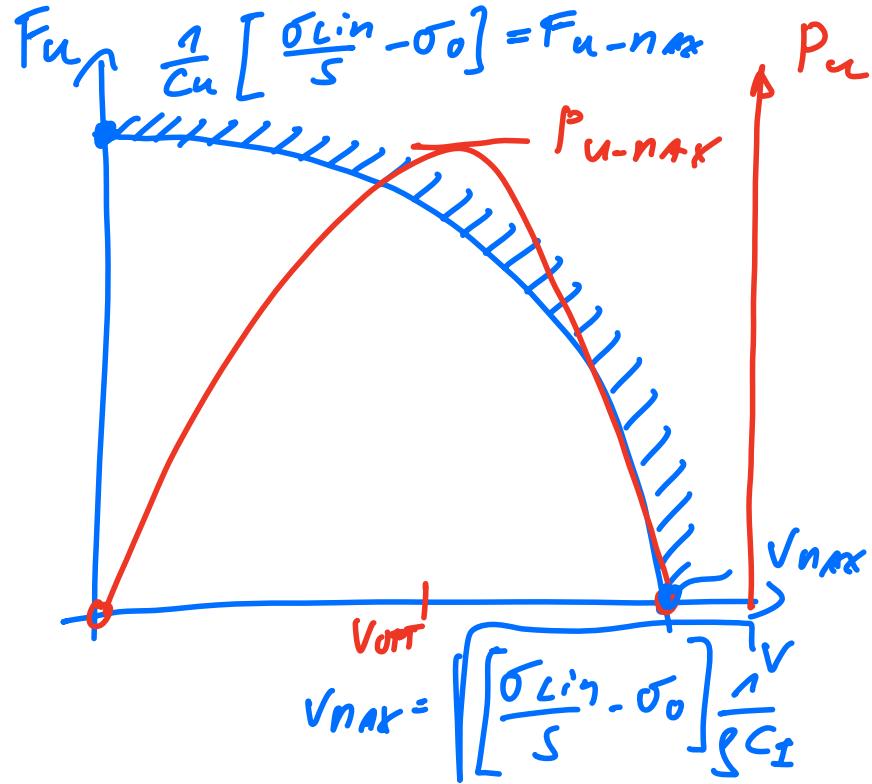
- L'effort et la puissance utiles deviennent:

$$F_U \leq F_{U-Adm} = \frac{1}{C_U} \left[\frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right]$$

$$P_U = F_{U-Adm} \cdot v = \frac{1}{C_U} \left[\frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right] \cdot v$$

Limitations par les efforts d'inertie

- Représentation graphique



$$F_U \leq F_{U-Adm} = \frac{1}{C_U} \left[\frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right]$$

$$P_U = F_{U-Adm} \cdot v = \frac{1}{C_U} \left[\frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right]$$

$$v_{opt} = \sqrt{\frac{1}{3\rho C_I} \left(\frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 \right)} = \sqrt{\frac{1}{3}} v_{Max}$$

$$F_{U-Opt} = \frac{2}{3} F_{U-Max}$$

$$P_{Max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} F_{U-Max} \cdot v_{Max}$$

Limitations par les efforts d'inertie

- Comment augmenter la puissance utile?

$$P_{\text{Max}} = \underbrace{\frac{2}{3C_U \sqrt{3C_I}}} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\sigma_{\text{lim}}}{S} - \sigma_0 \right)^3}$$

- Choisir un matériau léger ($\rho \downarrow$) et résistant ($\sigma_{\text{Lim}} \uparrow$)
- Précontrainte de la pièce ($\sigma_0 < 0$)
- Limiter le coefficient de sécurité S
- Modifier la conception de la pièce ($C_U \sqrt{C_I} \downarrow$)

Dynamique des Systèmes Mécaniques

Equilibrage des
efforts d'inertie

Prof. J. Schiffmann

Equilibrage des efforts d'inertie

- Equilibrage des efforts d'inertie des bielles de locomotives



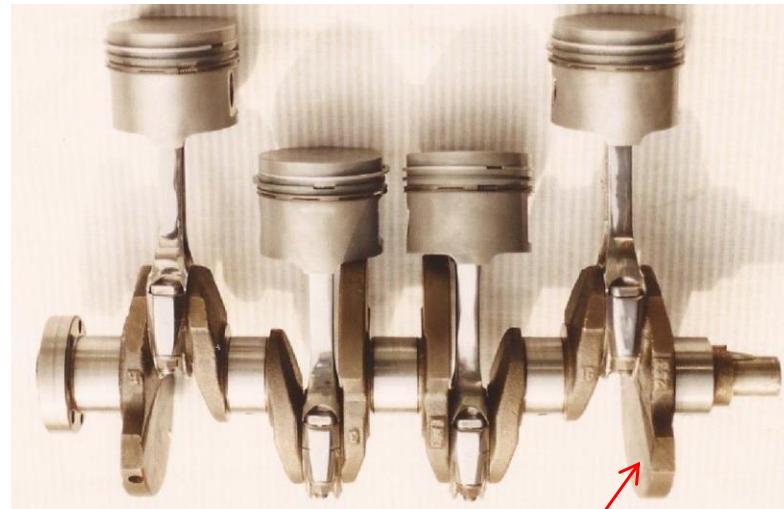
www.railpictures.net

Lorsque les bielles (en translation) entraînent les roues elles génèrent des efforts d'inertie

Les efforts d'inertie sont compensées par des contrepoids tournants avec les roues

Equilibrage des efforts d'inertie

- Equilibrage des efforts d'inertie d'un vilebrequin de moteur à combustion interne



Les efforts d'inertie des bielles tournantes sont compensés par des contrepoids tournant avec le vilebrequin

La force résultante

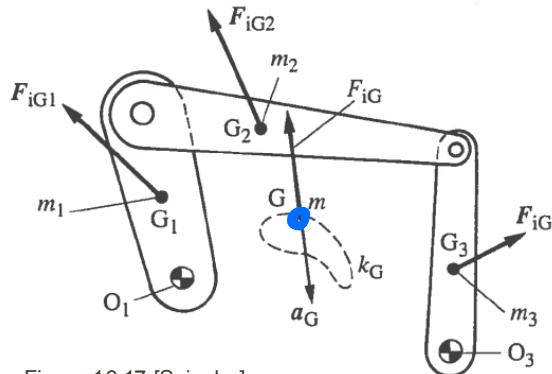


Figure 16.17 [Spinnler]

- Caractéristiques des efforts d'inertie
 - La résultante des n éléments est appliquée au centre de gravité G du mécanisme

$$m = \sum_{k=1}^n m_k$$

Masse du mécanisme

$$\vec{F}_I = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{Ik} = - \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = m \vec{a}_G$$

Accélération du centre de gravité du mécanisme

La force d'inertie résultante

- Les efforts d'inertie d'une chaîne cinématique plane à 1 degré de mobilité

$$\vec{F}_I = - \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = m \vec{a}_G$$

$$F_{I-x} = - \sum_{k=1}^n m_k [x''_{Gk}(q) \dot{q}^2(t) + x'_{Gk}(q) \ddot{q}(t)]$$

$$F_{I-y} = - \sum_{k=1}^n m_k [y''_{Gk}(q) \dot{q}^2(t) + y'_{Gk}(q) \ddot{q}(t)]$$

Origine externe provenant
de la loi d'espace



$q(t)$ est le mouvement de
l'élément menant

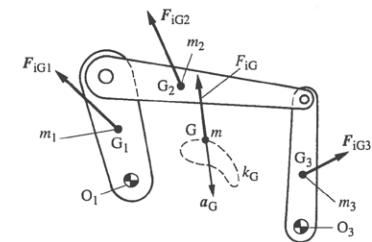


Figure 16.17 [Spinner]

Le moment d'inertie résultant

- Les efforts d'inertie d'une chaîne cinématique plane à 1 degré de mobilité

- Couple d'inertie appliqué au bâti

$$\underbrace{M_{IG}}_{\text{Mémo}} = - \sum_{k=1}^n J_{Gk} [\varphi''_{Gk}(q) \dot{q}^2(t) + \varphi'_{Gk}(q) \ddot{q}(t)]$$

- Auquel se rajoute le moment des forces d'inertie par rapport au point 0

$$M_{I0} = M_{IG} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_{Gk} \times \vec{F}_{Ik}$$

↑

Moment des forces d'inertie

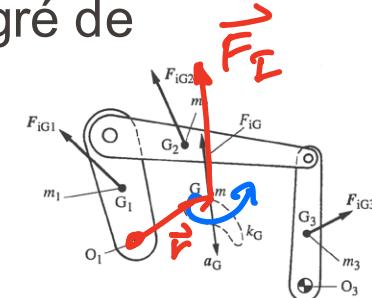


Figure 16.17 [Spinner]

- L'équilibrage a comme but d'annuler les efforts d'inertie
 - L'équilibrage parfait est atteint lorsque:

$$\vec{F}_I = 0$$

$$M_{I0} = 0$$

- Comment équilibrer les efforts d'inertie?
 - ① Modification de la distribution des masses des éléments mobiles
 - ② Ajouter des mécanismes auxiliaires qui compensent les efforts du mécanisme principal

Equilibrage des efforts II

①

Modification de la distribution des masses des éléments mobiles

- Les éléments sont intrinsèquement équilibrés
- Les organes de guidage sont déchargés
- Généralement le mécanisme est alourdi ($m & J \uparrow$)
→ dynamique du système en souffre!

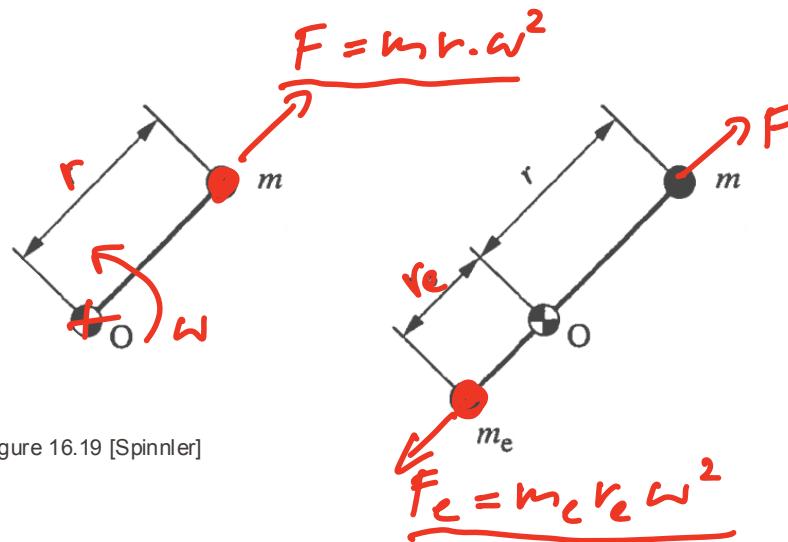
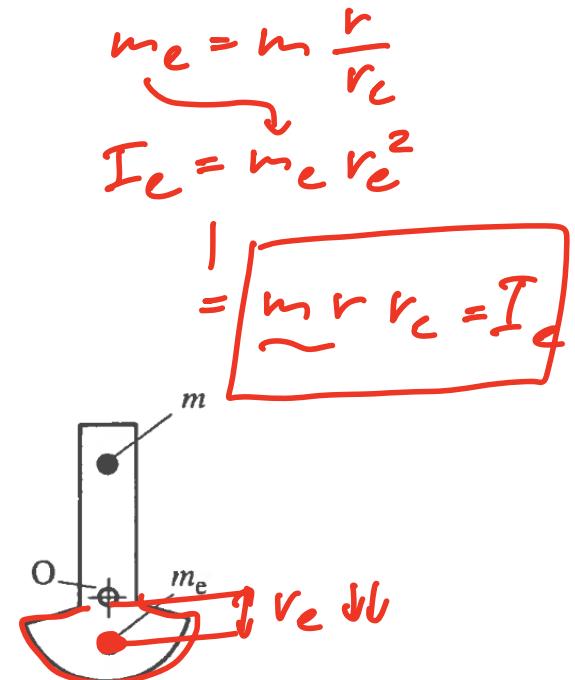


Figure 16.19 [Spinnler]





Equilibrage par mécanisme auxiliaire

- Un système à came permet de compenser les efforts d'inertie. Le profil de la came doit être adapté au mouvement du centre de gravité du système
- Le système auxiliaire complique, alourdit et renchérit le mécanisme

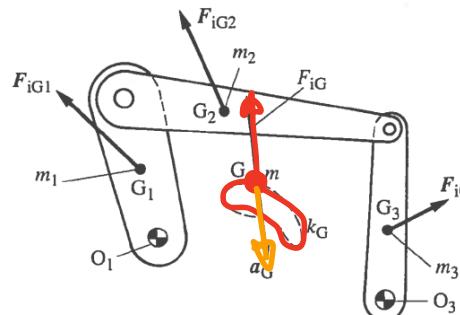


Figure 16.17 [Spinnler]

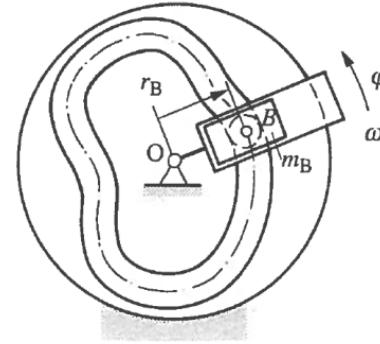


Figure 14.44 [Spinnler]

Dynamique des Systèmes Mécaniques

Exemple: machine
à piston

Prof. J. Schiffmann

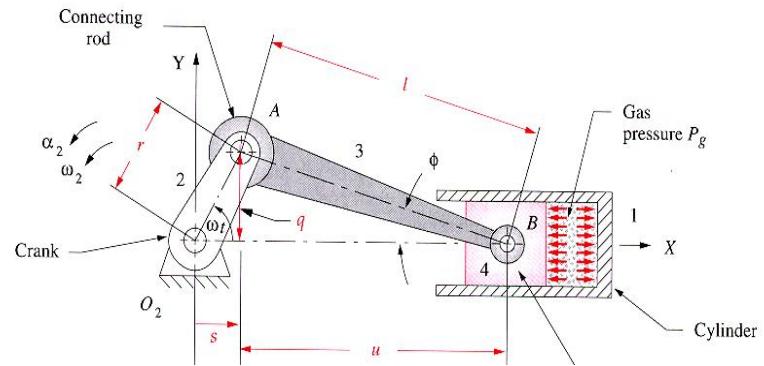
Exemple: Machines à piston I

- Calcul des efforts d'inertie
 - On cherche donc:

$$F_{I-x} = - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i$$

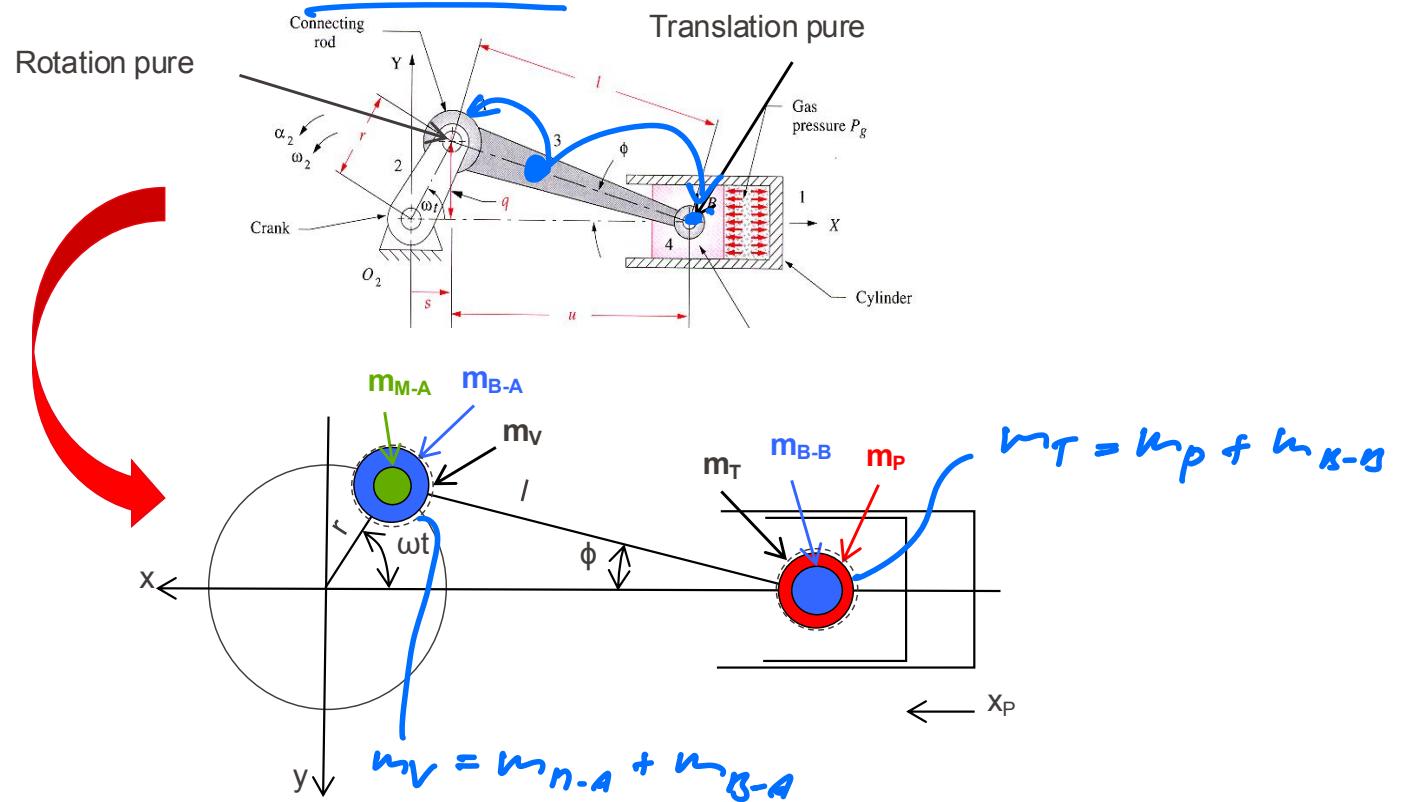
$$F_{I-y} = - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{y}_i$$

- Pour cela on doit exprimer les masses m_i des différents éléments et leur loi d'espace
- Les lois d'espace de la manivelle et du piston sont simples puisque elle représentent des rotations et translations pures
- La loi d'espace de la bielle correspond à une translation combinée avec une rotation



Exemple: Machines à piston II

- Discrétisation des masses (étape 1)



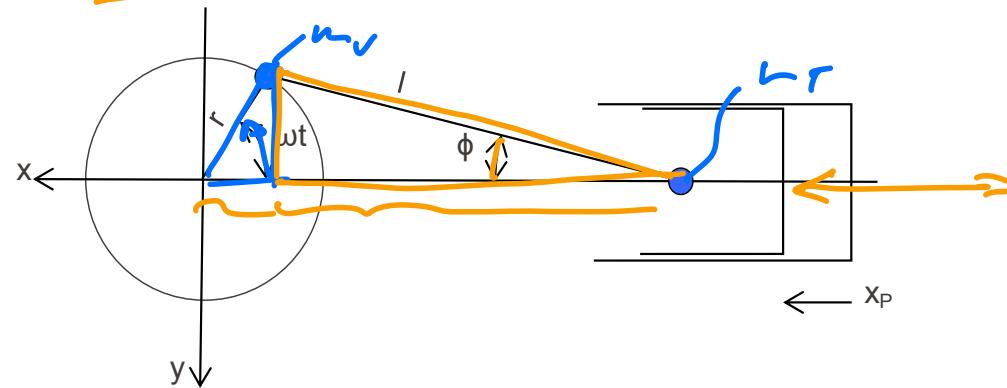
Exemple: Machines à piston III

- Lois d'espace du piston en translation (étape 2)

$$x_p = \left(r + \frac{r^2}{4l} \right) - r \left[\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t \right]$$

$$\dot{x}_p = r\omega \left[\sin \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2\omega t \right]$$

$$\ddot{x}_p = r\omega^2 \left[\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right]$$



Exemple: Machines à piston IV

- Loi d'espace de la manivelle en rotation (étape 2)

$$\underline{x_v} = -r \cos \omega t$$

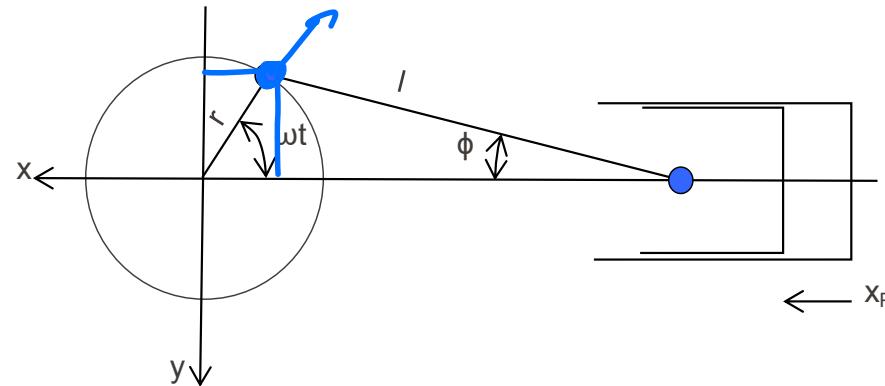
$$\dot{x_v} = -r\omega \sin \omega t$$

$$\underline{\ddot{x_v}} = r\omega^2 \cos \omega t$$

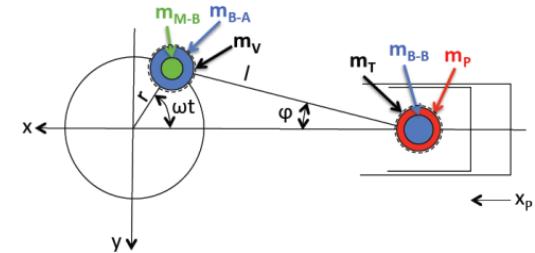
$$\underline{y_v} = -r \sin \omega t$$

$$\dot{y_v} = -r\omega \cos \omega t$$

$$\underline{\ddot{y_v}} = r\omega^2 \sin \omega t$$



Exemple: Machines à piston V



- Les forces d'inertie (étape 3)

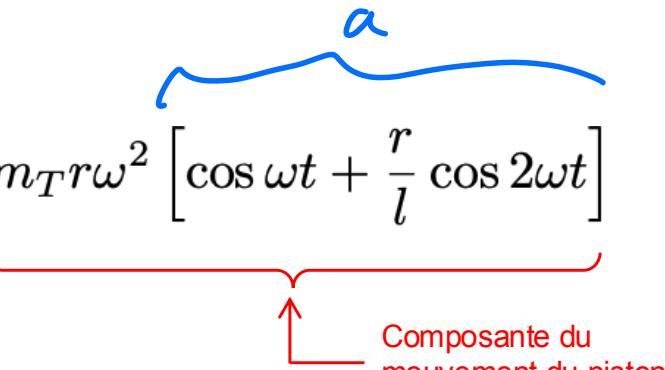
- Composées des effets des masses en rotation et en translation

$$F_{I-x} = -[m_V \ddot{x}_V + m_T \ddot{x}_P]$$

$$F_{I-y} = -[m_V \ddot{y}_V]$$

$$F_{I-x} = -m_V r \omega^2 \cos \omega t - m_T r \omega^2 \left[\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right]$$

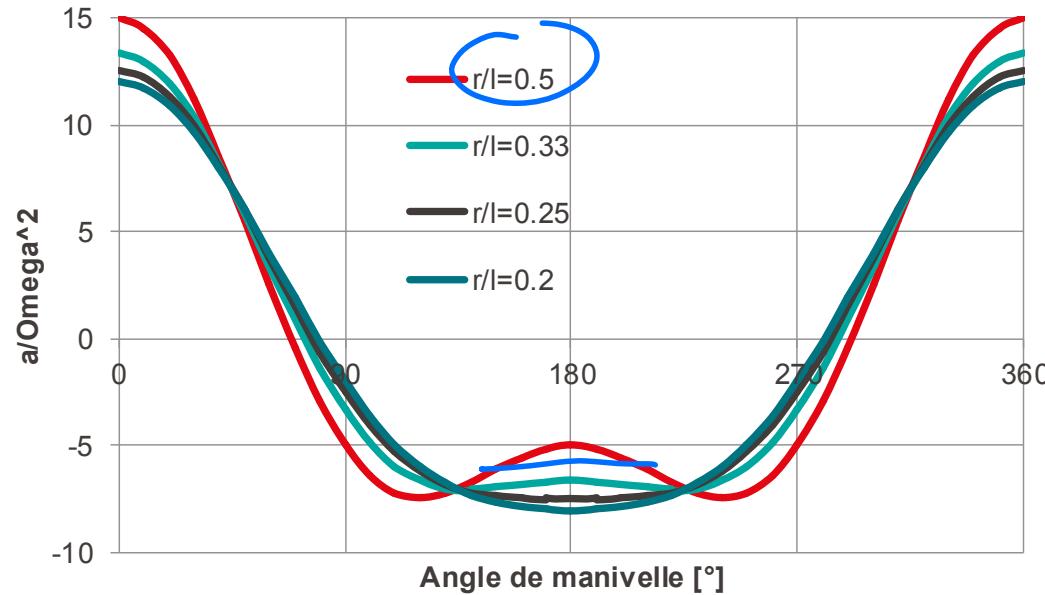
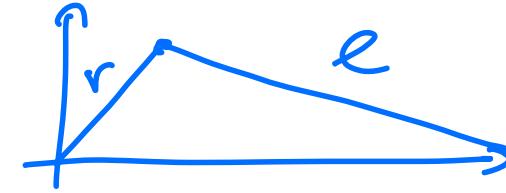
$$F_{I-y} = -m_V r \omega^2 \sin \omega t$$



Force centrifuge de la masse tournante (manivelle + bielle)

Exemple: Machines à piston VI

- Force oscillante: allure en fonction de r/l

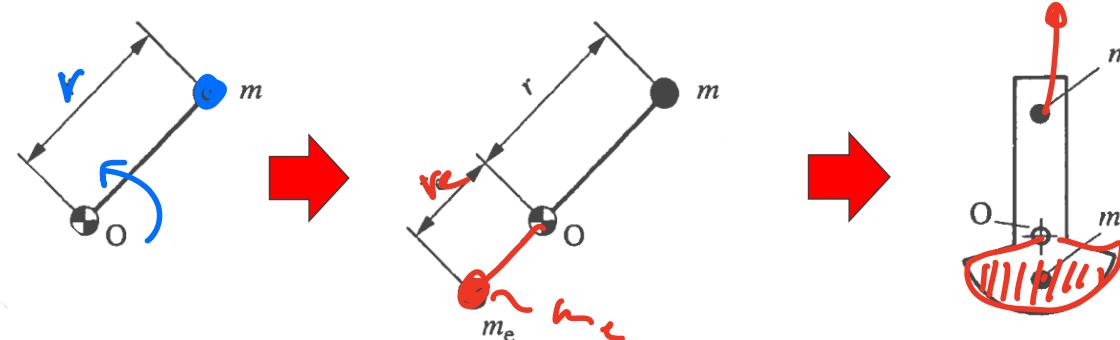


Exemple: Machines à piston VII

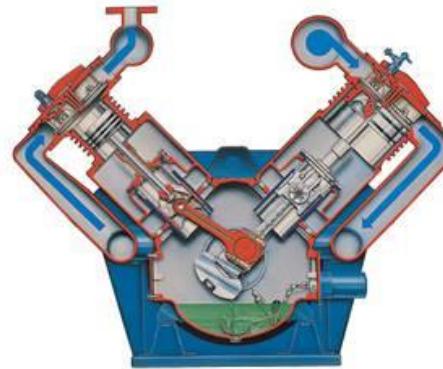
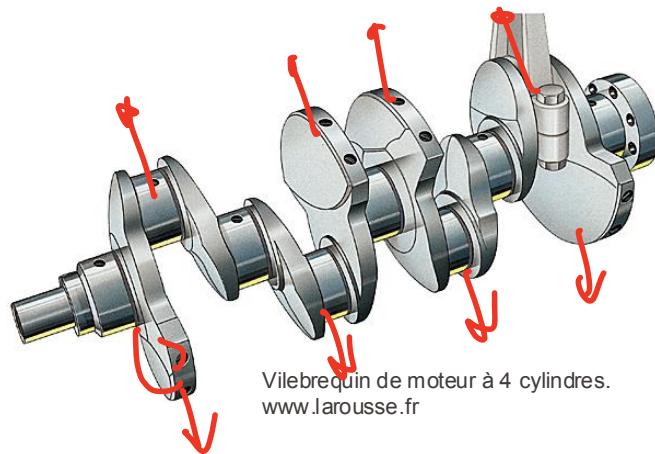
- Equilibrage de la **force centrifuge** (étape 4)

$$\begin{aligned} F_{I-x} &= -m_V r \omega^2 \cos \omega t - m_T r \omega^2 \left[\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right] \\ F_{I-y} &= -m_V r \omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

- Puisque il s'agit d'une force tournante d'intensité constante elle est facilement équilibrée par un simple ajout de masse



Exemples



Compresseur à piston.
www.compair-kompressoren.ch

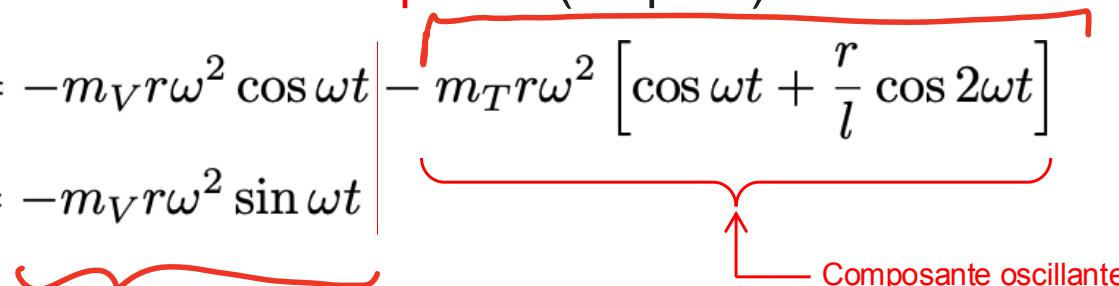


Exemple: Machines à piston VIII

- Equilibrage de la **force oscillante du piston** (étape 4)

$$\begin{aligned} F_{I-x} &= -m_V r \omega^2 \cos \omega t - m_T r \omega^2 \left[\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right] \\ F_{I-y} &= -m_V r \omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Composante oscillante



- La composante oscillante est composée d'une fondamentale (vitesse de rotation du vilebrequin) et d'une harmonique de 2^{ième} ordre
- Comment équilibrer une force oscillante?

Exemple: Machines à piston IX

- Caractérisation de la **force oscillante du piston**
 - Une force oscillante peut être représentée par deux forces contrarotatives

$$m_T r \omega^2 \cos(\omega t) = \underbrace{\frac{m_T r \omega^2}{2} \cos(\omega t)}_{\text{CO. RUT.}} + \underbrace{\frac{m_T r \omega^2}{2} \cos(-\omega t)}_{\text{CONTRE-A-RUT.}}$$

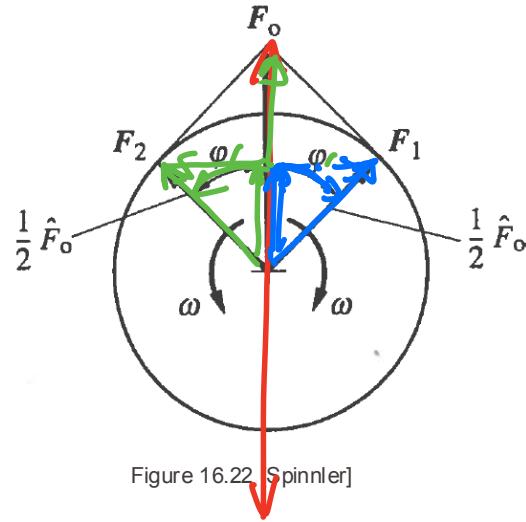


Figure 16.22 [Spinner]

Exemple: Machines à piston X

- Caractérisation de la **force oscillante du piston**
 - La décomposition de la force oscillante en deux composantes s'applique également à la force harmonique de 2^{ième} ordre

$$\frac{m_T r \omega^2}{2} \cos(\pm \omega t) \longrightarrow$$

$$\frac{m_T r \omega^2}{2} \frac{r}{l} \cos(\pm 2\omega t) \longrightarrow$$

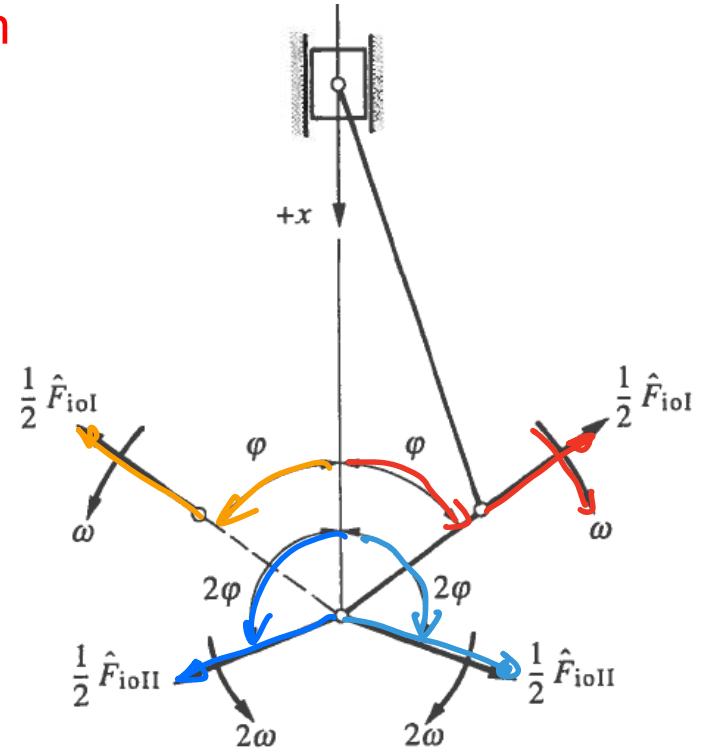


Figure 16.23 [Spinner]

Exemple: Machines à piston XI

- Equilibrage de la force oscillante du piston
 - Il n'est donc pas possible d'équilibrer entièrement une force d'inertie oscillante par un simple ajout de masse sur l'arbre tournant
 - L'ajout d'une masse sur le vilebrequin permet de réduire la composante fondamentale de la force d'inertie de 50%
 - Il subsiste néanmoins une force d'inertie tournant en sens inverse d'une intensité de 50% de la force oscillante
 - Il subsiste également l'intégralité de la composante harmonique de 2^{ème} ordre

Exemple: Machines à piston XII

■ Equilibrage de Lanchester

- Il est possible de parfaitement équilibrer la fondamentale oscillante avec deux masses contrarotatives entraînées par le vilebrequin avec $i = 1$
- Les masses sont calées de manière à compenser d'inertie oscillante
- On note que cet équilibrage ne décharge pas les organes de guidage de la machine

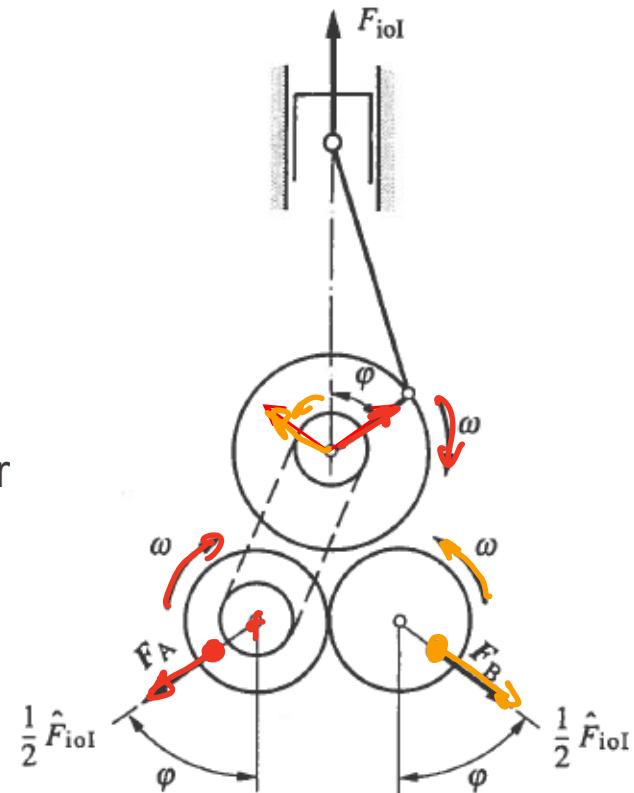


Figure 16.24 [Spinnler]

Exemple: Machines à piston XIII

■ Equilibrage de Lanchester

- Il est possible d'équilibrer l'harmonique de 2^{ième} ordre en ajoutant des masses contrarotatives entraînées par le vilebrequin avec $i = 0.5$

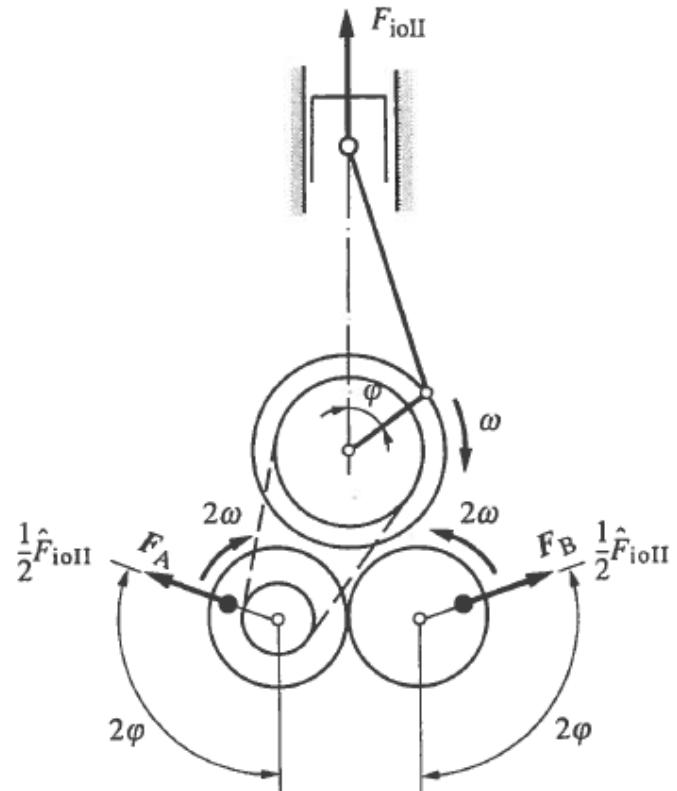
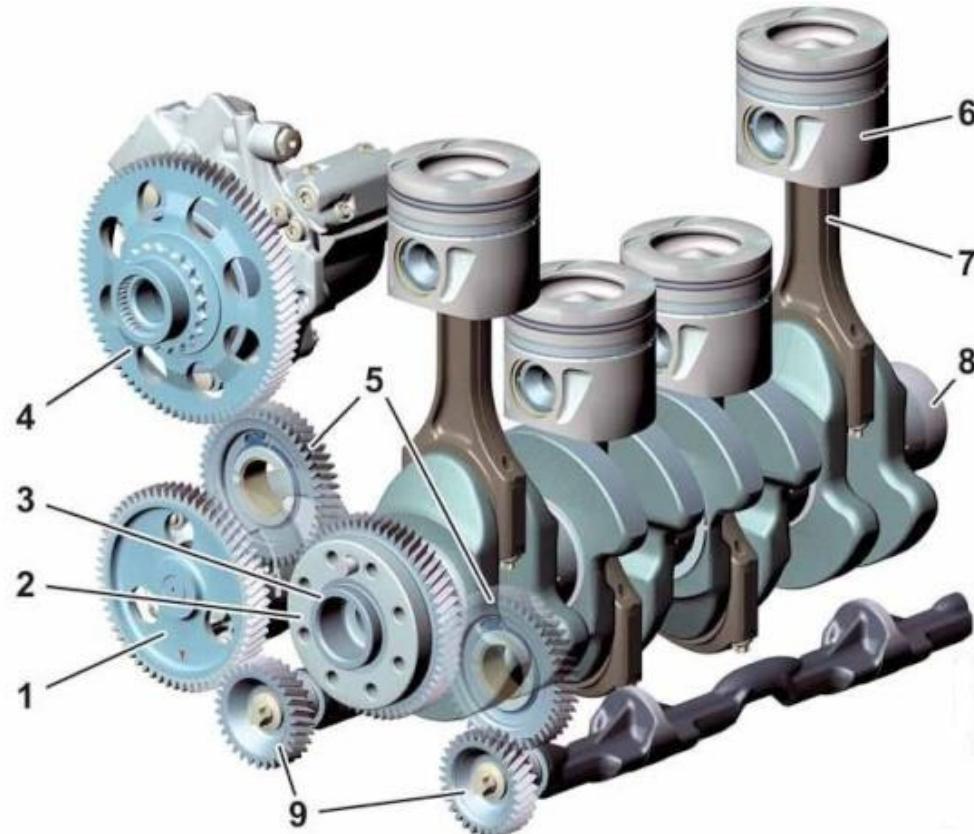


Figure 16.26 [Spinner]

Exemples



Equilibrage Lanchester de 2^{ième} ordre

Exemple: moteur bicylindre

- Equilibrage des composantes de 1^{er} ordre
 - Les composantes des forces de 1^{er} ordre co-rotatives sont équilibrées par des masses tournantes sur le vilebrequin
 - Les composantes des forces de 1^{er} ordre contrarotatives sont équilibrées par des masses tournant à sens inverse
 - Les masses auxiliaires compensent les composantes contrarotatives

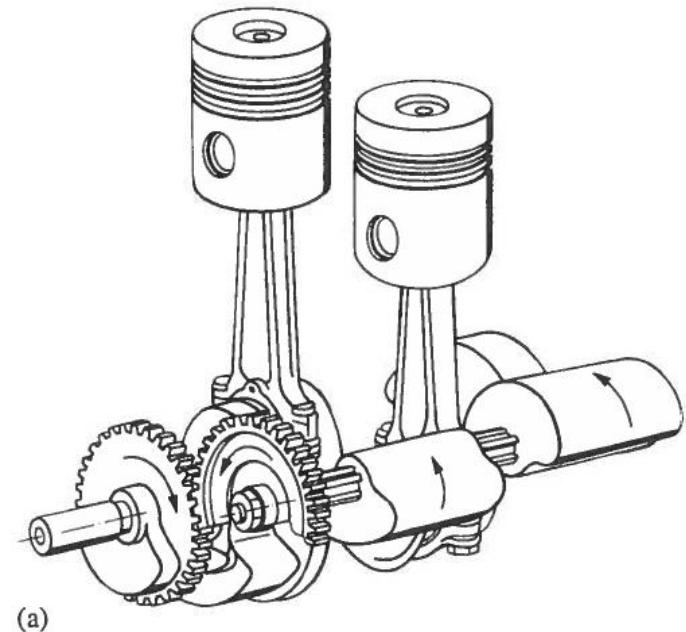


Figure 16.31 [Spinnler]

- Compresseur à piston
- Equilibrage d'un entraînement par hélice
- Equilibrage d'un moteur 4 cylindres plat

