

# Résumé

Cinématique

Prof. J. Schiffmann

- Composé d'organes effectuant des mouvements en translation et / ou rotation et à vitesses différentes

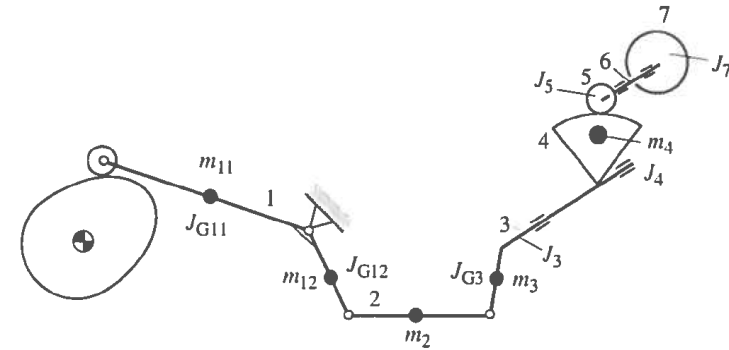


Figure 13.11 [Spinnler]

- La cinématique d'un tel système complexe s'exprime par **la réduction** de la cinématique aux **coordonnées menantes**
- La réduction** d'un système mécanique permet d'exprimer les **énergies cinétique & potentielles** et **les efforts** en fonction de la/les **coordonnée/s menante/s**

# Equation de mouvement

- Par la méthodologie de Lagrange ( $L = T - U$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

... et en utilisant les expressions pour T, U et  $Q^*$  en fonction des lois d'espace on trouve:

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}I'(q)\dot{q}^2 + U'(q) = Q_m^* - Q_e^*$$

Efforts d'accélération de l'inertie réduite  $\nearrow$   
 Efforts dus à la variation de l'inertie réduite en fonction de la coordonnée menante  $\nearrow$   
 Contribution de l'énergie potentielle  $\nearrow$   
 Efforts moteurs  $\nwarrow$   $Q_m^*$   
 Efforts d'entraînement  $\nwarrow$   $Q_e^*$

- Loi de mouvement complexe complique la description mathématique
  - Placer les masses à des endroits où la loi est plus simple
- Principes d'équivalence

- |                    |                           |                        |                         |
|--------------------|---------------------------|------------------------|-------------------------|
| • Masse            | $m = m_A + m_B$           | } Equivalence statique | } Equivalence dynamique |
| • Centre de masse  | $m_A a = m_B b$           |                        |                         |
| • Moment d'inertie | $J_G = m_A a^2 + m_B b^2$ |                        |                         |

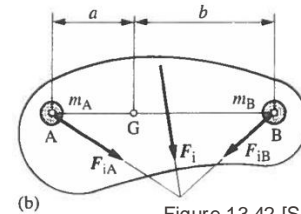
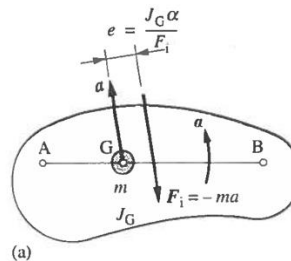


Figure 13.42 [Spinnler]

- L'effort d'inertie pour un corps solide

$$\vec{a}_r(P) = 0 \quad \vec{v}_r = 0$$

$$0 = \vec{F} - \underbrace{\left[ m\vec{a}_a(A) + m\dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}) \right]}_{\vec{F}_{Inertie}} \quad \rightarrow \text{Principe D'Alembert}$$

- Le principe D'Alembert impose

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{F} + \vec{F}_{Inertie} & \vec{F}_{Inertie} &= -ma_a \\ 0 &= \vec{M} + \vec{M}_{Inertie} & \vec{M}_{Inertie} &= -J_G\alpha_a \end{aligned} \quad \rightarrow \begin{array}{l} \text{Accélérations} \\ \text{imposées par les} \\ \text{lois d'espace} \end{array}$$



# **Dynamique des Systèmes Mécaniques**

**Limitations par les  
efforts d'inertie**

**Prof. J. Schiffmann**

# Limitations par les efforts d'inertie

- Les efforts d'inertie chargent les éléments et limitent la transmission d'efforts utiles
  - Question: comment se comportent l'effort utile et la puissance utile en fonction de la vitesse du système?
- Les éléments sont chargés par
  - Une précontrainte
  - Une contrainte d'inertie
  - Une contrainte utile

$$\sigma_0$$

↓ Coefficient géométrique

$$\sigma_I = C_I \rho v^2$$

$$\sigma_U = C_U F$$

↑ Coefficient dépendant de la géométrie et de la sollicitation



# Limitations par les efforts d'inertie

- Hypothèse: contraintes parallèles
  - Critère de dimensionnement

$$\sigma_0 + \sigma_I + \sigma_U \leq \frac{\sigma_{Lim}}{S} \leftarrow \text{Contrainte limite}$$

$$\sigma_0 + C_I \rho v^2 + C_U F_U \leq \frac{\sigma_{Lim}}{S} \leftarrow \text{Coefficient de sécurité}$$

- L'effort et la puissance utiles deviennent:

$$F_U \leq F_{U-Adm} = \frac{1}{C_U} \left[ \frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right]$$

$$P_U = F_{U-Adm} \cdot v = \frac{1}{C_U} \left[ \frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right] \cdot v$$

# Limitations par les efforts d'inertie

- Représentation graphique

$$F_U \leq F_{U-Adm} = \frac{1}{C_U} \left[ \frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right]$$

$$P_U = F_{U-Adn} \cdot v = \frac{1}{C_U} \left[ \frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 - C_I \rho v^2 \right] v$$

$$v_{opt} = \sqrt{\frac{1}{3\rho C_I} \left( \frac{\sigma_{Lim}}{S} - \sigma_0 \right)} = \sqrt{\frac{1}{3}} v_{Max}$$

$$F_{U-Opt} = \frac{2}{3} F_{U-Max}$$

$$P_{Max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} F_{U-Max} \cdot v_{Max}$$

- Comment augmenter la puissance utile?

$$P_{\text{Max}} = \frac{2}{3C_U\sqrt{3C_I}} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( \frac{\sigma_{\text{lim}}}{S} - \sigma_0 \right)^3}$$

- Choisir un matériau léger ( $\rho \downarrow$ ) et résistant ( $\sigma_{\text{Lim}} \uparrow$ )
- Précontrainte de la pièce ( $\sigma_0 < 0$ )
- Limiter le coefficient de sécurité  $S$
- Modifier la conception de la pièce ( $C_U\sqrt{C_I} \downarrow$ )

# **Dynamique des Systèmes Mécaniques**

**Equilibrage des  
efforts d'inertie**

**Prof. J. Schiffmann**

# Equilibrage des efforts d'inertie

- Equilibrage des efforts d'inertie des bielles de locomotives



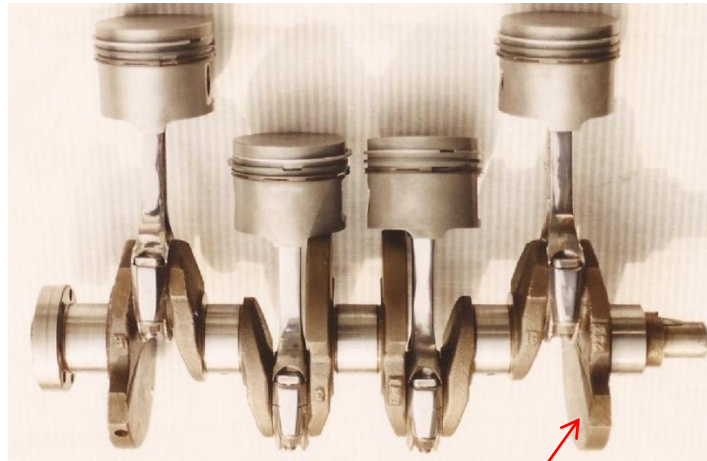
www.railpictures.net

Lorsque les bielles (en translation) entraînent les roues elles génèrent des efforts d'inertie

Les efforts d'inertie sont compensées par des contrepoids tournants avec les roues

# Equilibrage des efforts d'inertie

- Equilibrage des efforts d'inertie d'un vilebrequin de moteur à combustion interne



Les efforts d'inertie des bielles tournantes sont compensés par des contrepoids tournant avec le vilebrequin

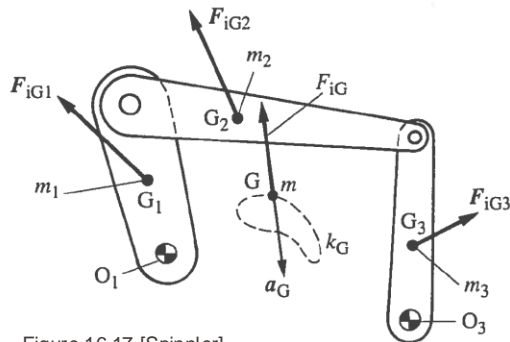


Figure 16.17 [Spinnler]

- Caractéristiques des efforts d'inertie
  - La résultante des  $n$  éléments est appliquée au centre de gravité  $G$  du mécanisme

$$m = \sum_{k=1}^n m_k$$

$$\vec{F}_I = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{Ik} = - \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = m \vec{a}_G$$

↑ Masse du  
mécanisme

Accélération du centre de  
gravité du mécanisme ↑

- Les efforts d'inertie d'une chaîne cinématique plane à 1 degré de mobilité

$$\vec{F}_I = - \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = m \vec{a}_G$$

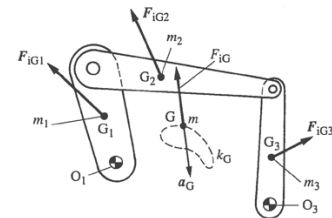


Figure 16.17 [Spinnler]

$$F_{I-x} = - \sum_{k=1}^n m_k [x''_{Gk}(q) \dot{q}^2(t) + x'_{Gk}(q) \ddot{q}(t)]$$

$$F_{I-y} = - \sum_{k=1}^n m_k [y''_{Gk}(q) \dot{q}^2(t) + y'_{Gk}(q) \ddot{q}(t)]$$

Origine externe provenant  
de la loi d'espace

Origine interne provenant de  
l'accélération du mouvement  
menant



- Les efforts d'inertie d'une chaîne cinématique plane à 1 degré de mobilité

- Couple d'inertie appliqué au bâti

$$M_{IG} = - \sum_{k=1}^n J_{Gk} [\varphi''_{Gk}(q) \dot{q}^2(t) + \varphi'_{Gk}(q) \ddot{q}(t)]$$

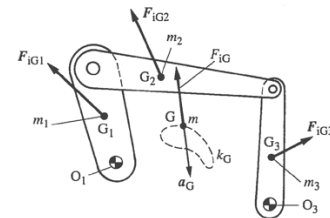


Figure 16.17 [Spinnler]

- Auquel se rajoute le moment des forces d'inertie par rapport au point 0

$$M_{I0} = M_{IG} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_{Gk} \times \vec{F}_{Ik}$$



Moment des forces  
d'inertie

- L'équilibrage a comme but d'annuler les efforts d'inertie
  - L'équilibrage parfait est atteint lorsque:

$$\vec{F}_I = 0 \quad M_{I0} = 0$$

- Comment équilibrer les efforts d'inertie?
  - Modification de la distribution des masses des éléments mobiles
  - Ajouter des mécanismes auxiliaires qui compensent les efforts du mécanisme principal

- Modification de la distribution des masses des éléments mobiles
  - Les éléments sont intrinsèquement équilibrés
  - Les organes de guidage sont déchargés
  - Généralement le mécanisme est alourdi ( $m$  &  $J \uparrow$ )  
→ dynamique du système en souffre!

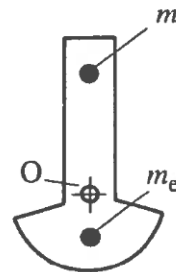
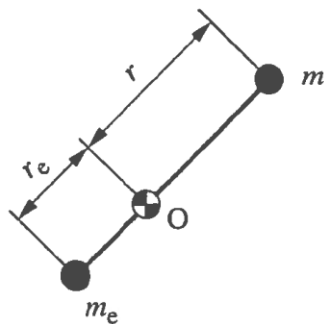
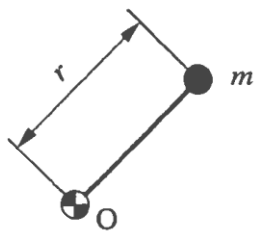


Figure 16.19 [Spinnler]

- Equilibrage par mécanisme auxiliaire
  - Un système à came permet de compenser les efforts d'inertie. Le profil de la came doit être adapté au mouvement du centre de gravité du système
  - Le système auxiliaire complique, alourdit et renchérit le mécanisme

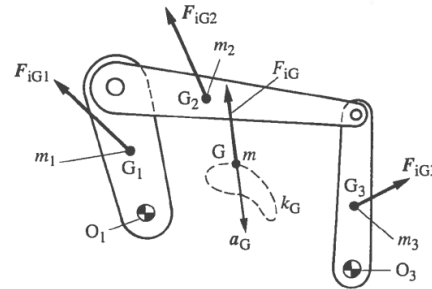


Figure 16.17 [Spinnler]

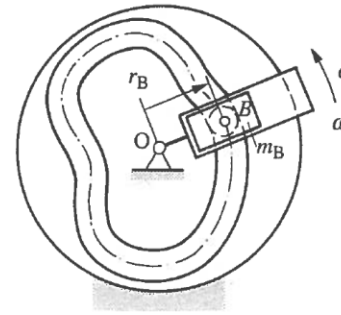


Figure 14.44 [Spinnler]

# **Dynamique des Systèmes Mécaniques**

**Exemple: machine  
à piston**

**Prof. J. Schiffmann**

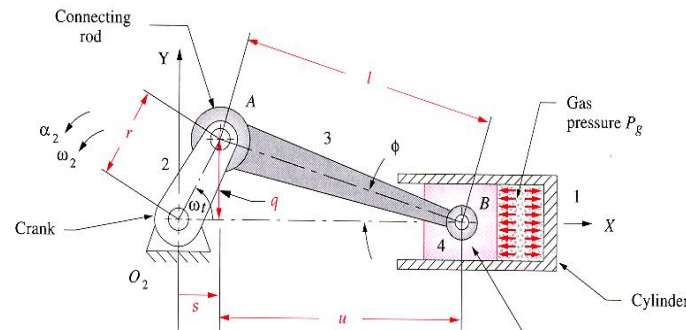
# Exemple: Machines à piston I

- Calcul des efforts d'inertie
  - On cherche donc:

$$F_{I-x} = - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i$$

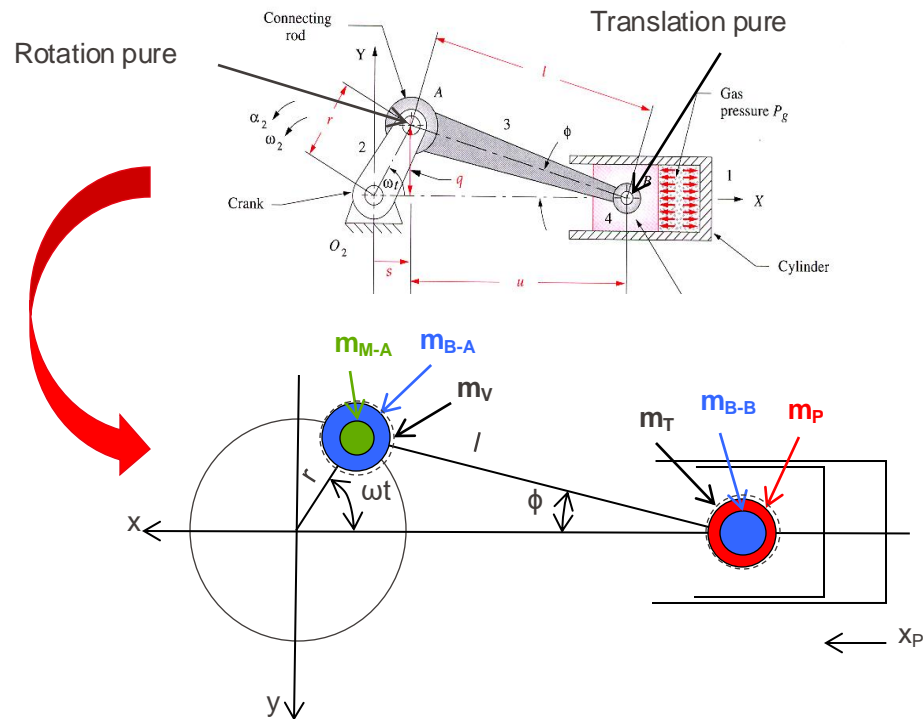
$$F_{I-y} = - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{y}_i$$

- Pour cela on doit exprimer les masses  $m_i$  des différents éléments et leur loi d'espace
- Les lois d'espace de la manivelle et du piston sont simples puisque elle représentent des rotation et translations pures
- La loi d'espace de la bielle correspond à une translation combinée avec une rotation



# Exemple: Machines à piston II

## ■ Discrétisation des masses (étape 1)



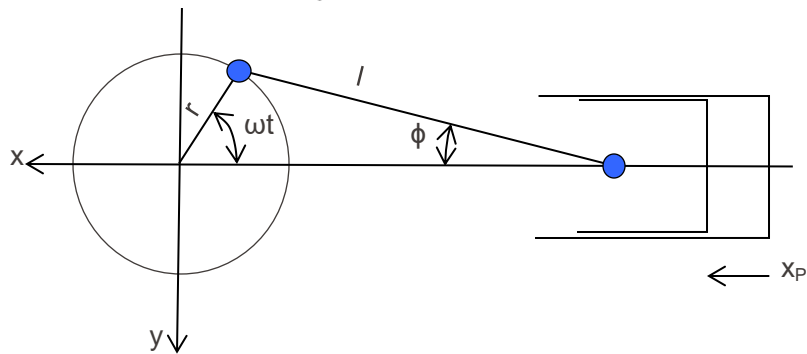
# Exemple: Machines à piston III

- Lois d'espace du piston en translation (étape 2)

$$x_p = \left( r + \frac{r^2}{4l} \right) - r \left[ \cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t \right]$$

$$\dot{x}_p = r\omega \left[ \sin \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2\omega t \right]$$

$$\ddot{x}_p = r\omega^2 \left[ \cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right]$$





# Exemple: Machines à piston IV

- Loi d'espace de la manivelle en rotation (étape 2)

$$x_v = -r \cos \omega t$$

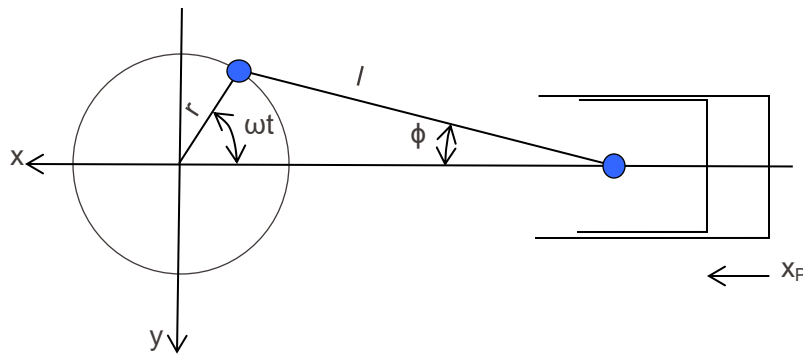
$$\dot{x}_v = -r\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_v = r\omega^2 \cos \omega t$$

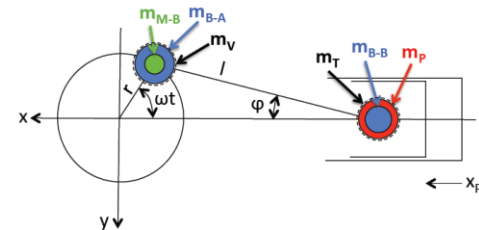
$$y_v = -r \sin \omega t$$

$$\dot{y}_v = -r\omega \cos \omega t$$

$$\ddot{y}_v = r\omega^2 \sin \omega t$$



# Exemple: Machines à piston V



- Les forces d'inertie (étape 3)
  - Composées des effets des masses en rotation et en translation

$$F_{I-x} = -[m_V \ddot{x}_V + m_T \ddot{x}_P]$$

$$F_{I-y} = -[m_V \ddot{y}_V]$$

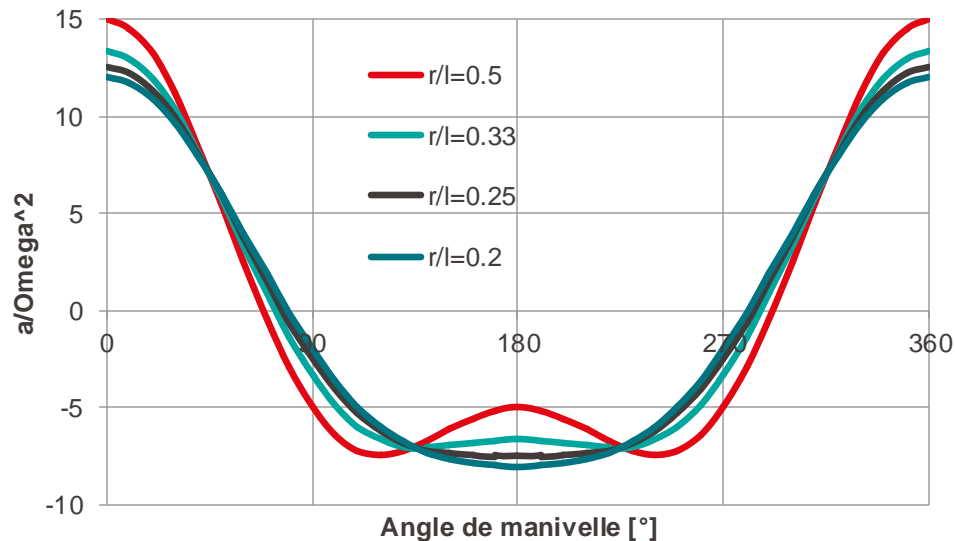
$$F_{I-x} = -m_V r \omega^2 \cos \omega t - m_T r \omega^2 \left[ \cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right]$$

$$F_{I-y} = -m_V r \omega^2 \sin \omega t$$

Composante du mouvement du piston

Force centrifuge de la masse tournante (manivelle + bielle)

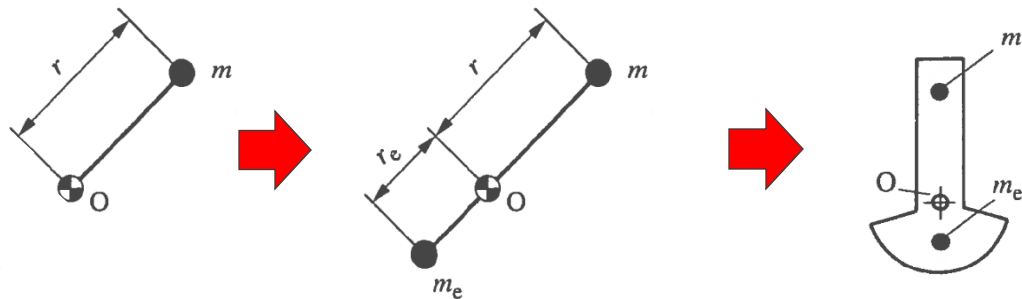
- Force oscillante: allure en fonction de  $r/l$

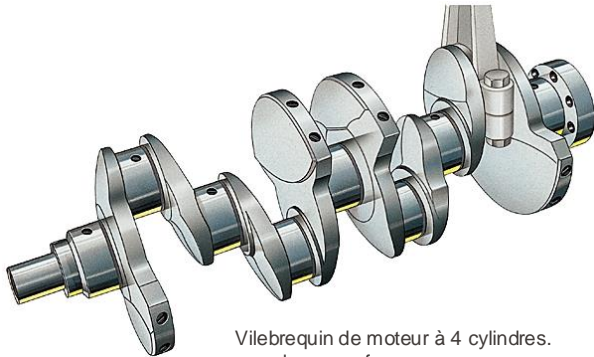


- Equilibrage de la **force centrifuge** (étape 4)

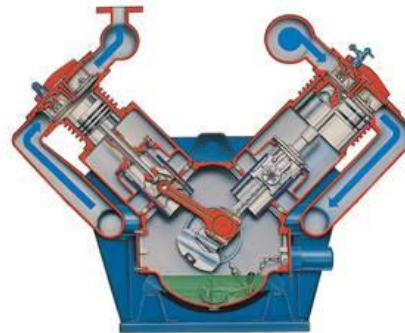
$$\left. \begin{aligned} F_{I-x} &= -m_V r \omega^2 \cos \omega t \\ F_{I-y} &= \underbrace{-m_V r \omega^2 \sin \omega t} \end{aligned} \right\} - m_T r \omega^2 \left[ \cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right]$$

- Puisque il s'agit d'une force tournante d'intensité constante elle est facilement équilibrée par un simple ajout de masse





Vilebrequin de moteur à 4 cylindres.  
[www.larousse.fr](http://www.larousse.fr)



Compresseur à piston.  
[www.compair-kompressoren.ch](http://www.compair-kompressoren.ch)



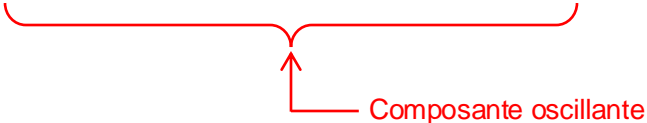
Embiellage de locomotive à vapeur.  
[www.emdx.org](http://www.emdx.org)



Embiellage de locomotive électrique.  
[www.seetalkroki.ch](http://www.seetalkroki.ch)

# Exemple: Machines à piston VIII

- Equilibrage de la **force oscillante du piston** (étape 4)

$$\begin{aligned} F_{I-x} &= -m_V r \omega^2 \cos \omega t - m_T r \omega^2 \left[ \cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right] \\ F_{I-y} &= -m_V r \omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$


Composante oscillante

- La composante oscillante est composée d'une fondamentale (vitesse de rotation du vilebrequin) et d'une harmonique de 2<sup>ième</sup> ordre
- Comment équilibrer une force oscillante?

- Caractérisation de la **force oscillante du piston**
  - Une force oscillante peut être représentée par deux forces contrarotatives

$$m_T r \omega^2 \cos(\omega t) = \frac{m_T r \omega^2}{2} \cos(\omega t) + \frac{m_T r \omega^2}{2} \cos(-\omega t)$$

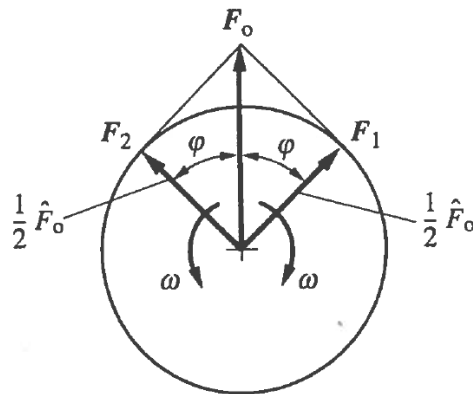


Figure 16.22 [Spinnler]

- Caractérisation de la **force oscillante du piston**
  - La décomposition de la force oscillante en deux composantes s'applique également à la force harmonique de 2<sup>ième</sup> ordre

$$\frac{m_T r \omega^2}{2} \cos(\pm \omega t) \longrightarrow$$

$$\frac{m_T r \omega^2}{2} \frac{r}{l} \cos(\pm 2\omega t) \longrightarrow$$

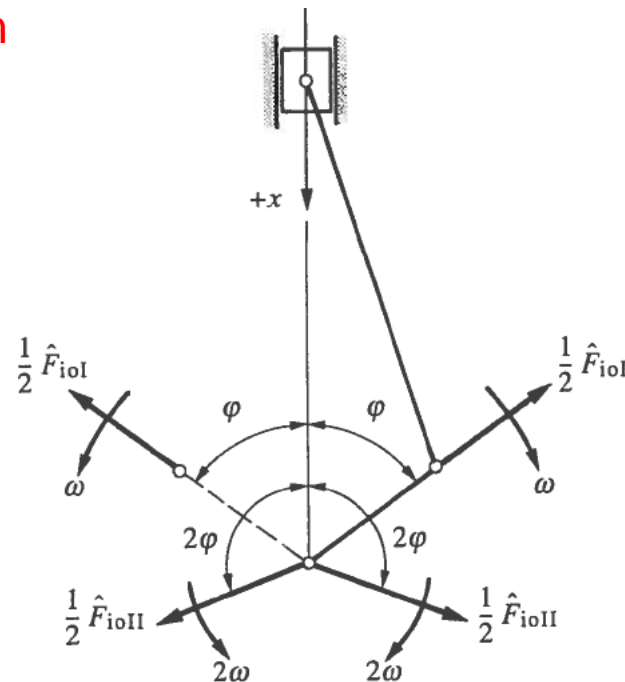


Figure 16.23 [Spinnler]



- Equilibrage de la force oscillante du piston
  - Il n'est donc pas possible d'équilibrer entièrement une force d'inertie oscillante par un simple ajout de masse sur l'arbre tournant
  - L'ajout d'une masse sur le vilebrequin permet de réduire la composante fondamentale de la force d'inertie de 50%
  - Il subsiste néanmoins une force d'inertie tournant en sens inverse d'une intensité de 50% de la force oscillante
  - Il subsiste également l'intégralité de la composante harmonique de 2<sup>ième</sup> ordre

## ■ Equilibrage de Lanchester

- Il est possible de parfaitement équilibrer la fondamentale oscillante avec deux masses contrarotatives entraînées par le vilebrequin avec  $i = 1$
- Les masses sont calées de manière à compenser d'inertie oscillante
- On note que cet équilibrage ne décharge pas les organes de guidage de la machine

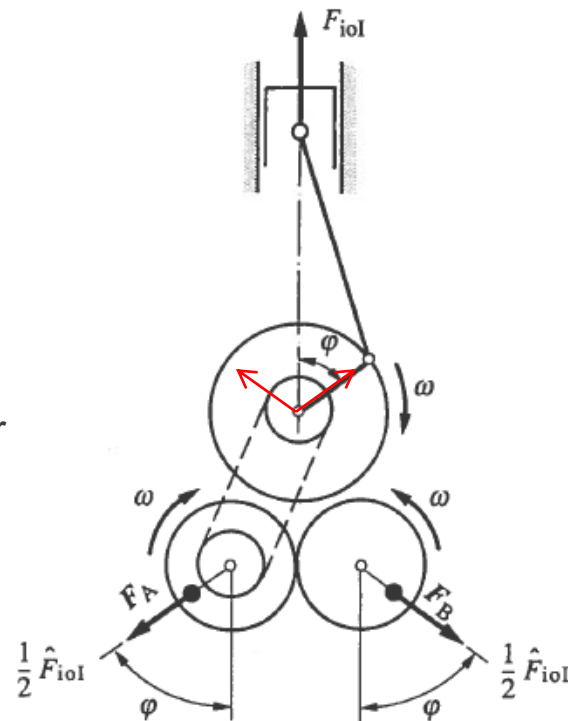


Figure 16.24 [Spinner]

- Equilibrage de Lanchester
  - Il est possible d'équilibrer l'harmonique de 2<sup>ème</sup> ordre en ajoutant des masses contrarotatives entraînées par le vilebrequin avec  $i = 0.5$

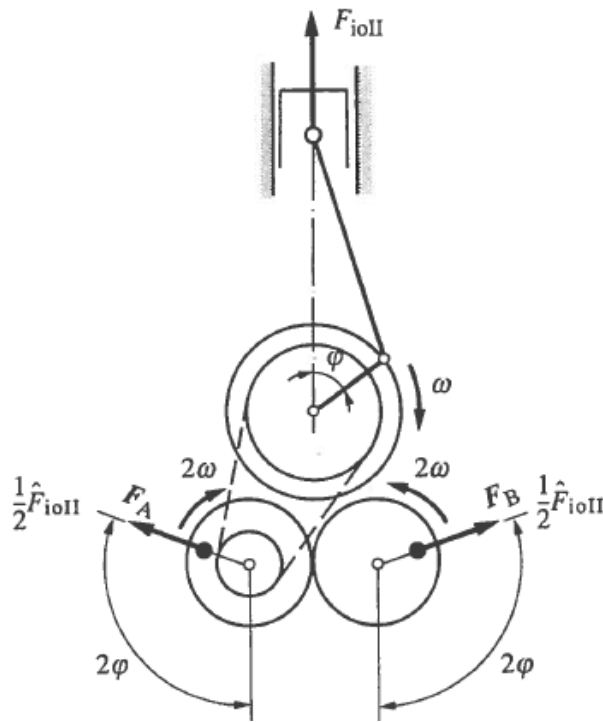
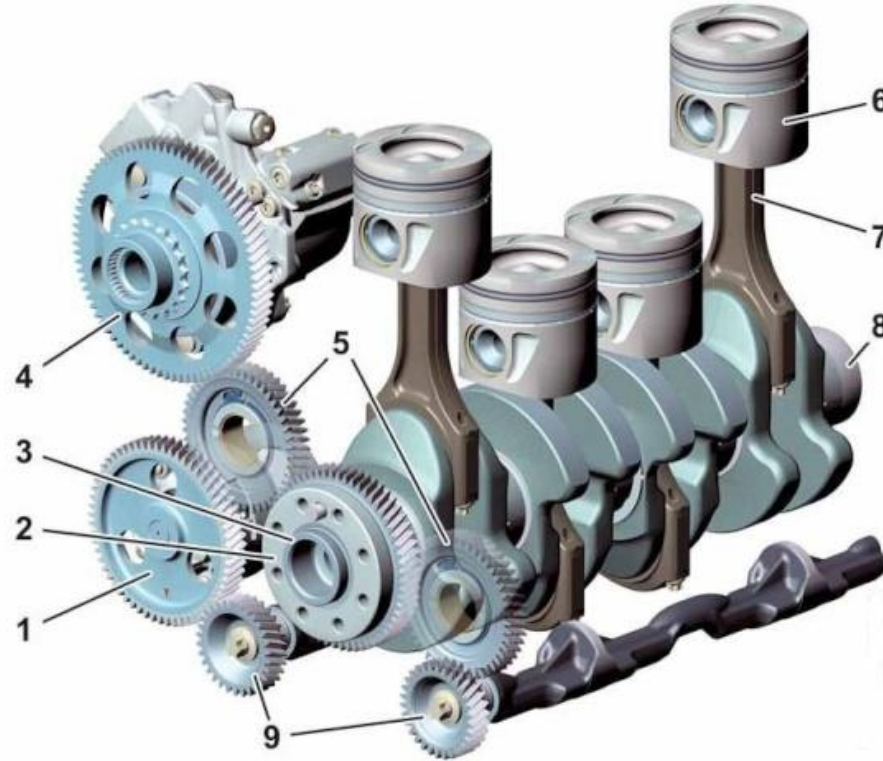


Figure 16.26 [Spinner]



Equilibrage Lancashire de 2<sup>ème</sup> ordre

- Equilibrage des composantes de 1<sup>er</sup> ordre
  - Les composantes des forces de 1<sup>er</sup> ordre co-rotatives sont équilibrées par des masses tournantes sur le vilebrequin
  - Les composantes des forces de 1<sup>er</sup> ordre contrarotatives sont équilibrées par des masses tournant à sens inverse
  - Les masses auxiliaires compensent les composantes contrarotatives

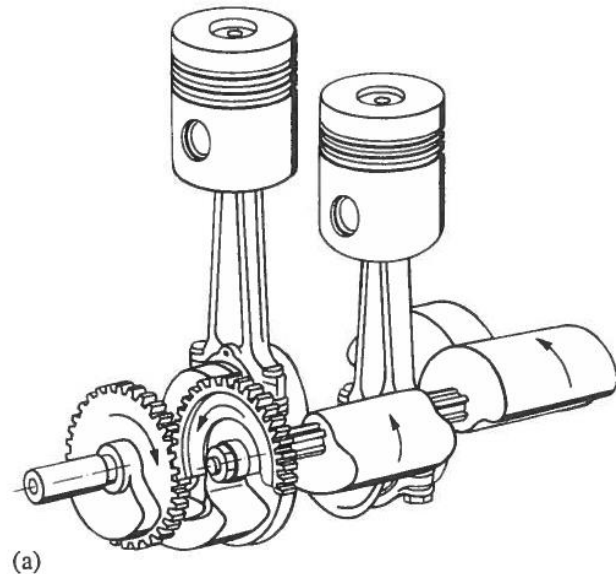


Figure 16.31 [Spinner]

- Compresseur à piston
- Equilibrage d'un entraînement par hélice
- Equilibrage d'un moteur 4 cylindres plat

