Résumé

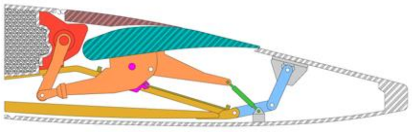
Introduction & Cinématique

Prof. J. Schiffmann

École polytechnique fédérale de Lausanne

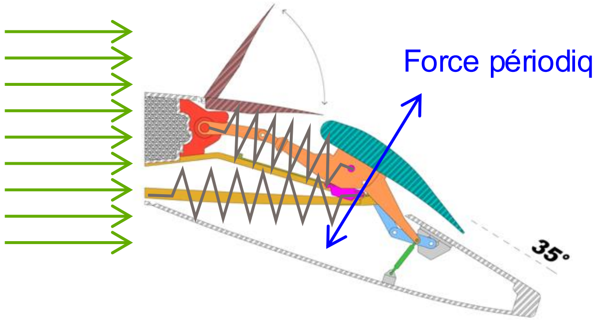
Cinématique vs. dynamique?

- Cinématique: mouvement de corps rigides



Mécanisme de flaps pour A320

http://en.wikipedia.org/wiki/Flap_%28aeronautics%29



Modélisation

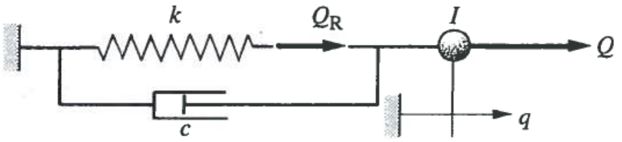


Figure 13.23 [Spinnler]

- Dynamique: tient compte de la déformation des éléments

Cinématique

- La cinématique étudie le mouvement, la vitesse et l’accélération de points et de corps rigides
- Ensemble de corps rigides liés entre eux
  → chaîne cinématique
- Le degré de mobilité détermine le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour fixer tout élément dans l’espace
- Le mouvement des éléments est décrit univoquement par les lois d’espace

?

Dynamique des Systèmes Mécaniques

Loi de mouvement cinématique

Prof. J. Schiffmann

École polytechnique fédérale de Lausanne

Chaînes cinématiques I

- Chaîne cinématique de machine

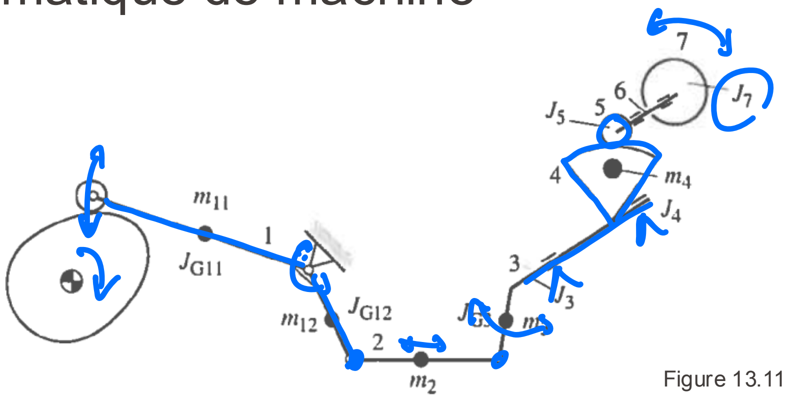


Figure 13.11 [Spinnler]

- Composée d'organes effectuant des mouvements en translation et/ou rotation et à vitesses différentes
- Comment exprimer la cinématique d'un tel système?

  → Par la réduction de la cinématique à la/les coordonnée/s menante/s

Chaînes cinématiques II

$E_{cin} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

F [N]

x [m]

m [kg]

- Quelques définitions

  - q_p note la coordonné généralisée de l'élément p
    - Selon le contexte il s'agit d'une translation ou d'une rotation
  - Q_p note l'effort généralisé appliqué à l'élément p
    - Selon le contexte il s'agit d'une force ou d'un couple

φ [rad]

M [Nm]

I [kg m²]

$E_{cin} = \frac{1}{2} I \cdot \dot{\varphi}^2$

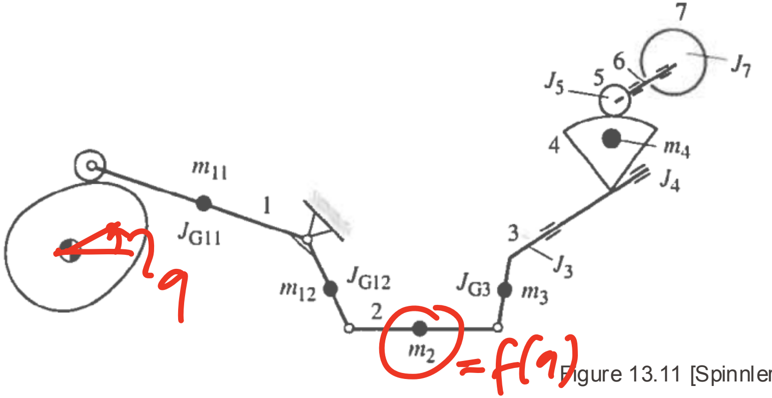
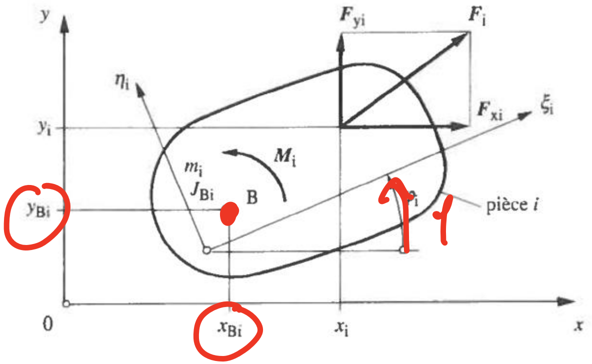


Figure 13.11 [Spinnler]

Loi d’espace I

- La loi d’espace décrit intégralement le mouvement d’un élément



Exemple d’un mouvement plan d’un élément à 3 degrés de liberté

Figure 14.3 [Spinnler]

- Lois d’espace du mouvement plan pour le corps *i* en fonction de *q(t)*

$$x_{Bi} = x_{Bi}(q)$$

$$y_{Bi} = y_{Bi}(q)$$

$$\varphi_{Bi} = \varphi_{Bi}(q)$$

Loi d’espace III

Exemple d’un mouvement plan d’une pièce à 3 degrés de liberté

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dq}\cdot\frac{dq}{dt} = x'\cdot\dot{q}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}\cdot\dot{q} + x'\cdot\ddot{q} = x''\cdot\dot{q}^2 + x'\cdot\ddot{q}$$

- La vitesse

$$\dot{x}_{Bi} = x'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$
$$\dot{y}_{Bi} = y'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$
$$\dot{\varphi}_{Bi} = \varphi'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$

- L’accélération

$$\ddot{x}_{Bi} = x''_{Bi}(q)\dot{q}^2(t) + x'_{Bi}(q)\ddot{q}(t)$$
$$\ddot{y}_{Bi} = y''_{Bi}(q)\dot{q}^2(t) + y'_{Bi}(q)\ddot{q}(t)$$
$$\ddot{\varphi}_{Bi} = \varphi''_{Bi}(q)\dot{q}^2(t) + \varphi'_{Bi}(q)\ddot{q}(t)$$

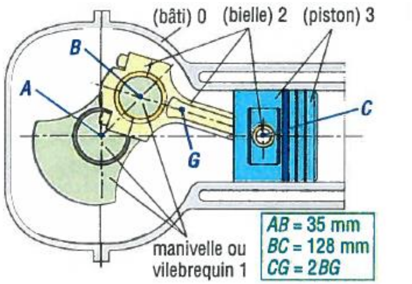
$$x'_{Bi}(q) = \frac{dx_{Bi}}{dq}$$

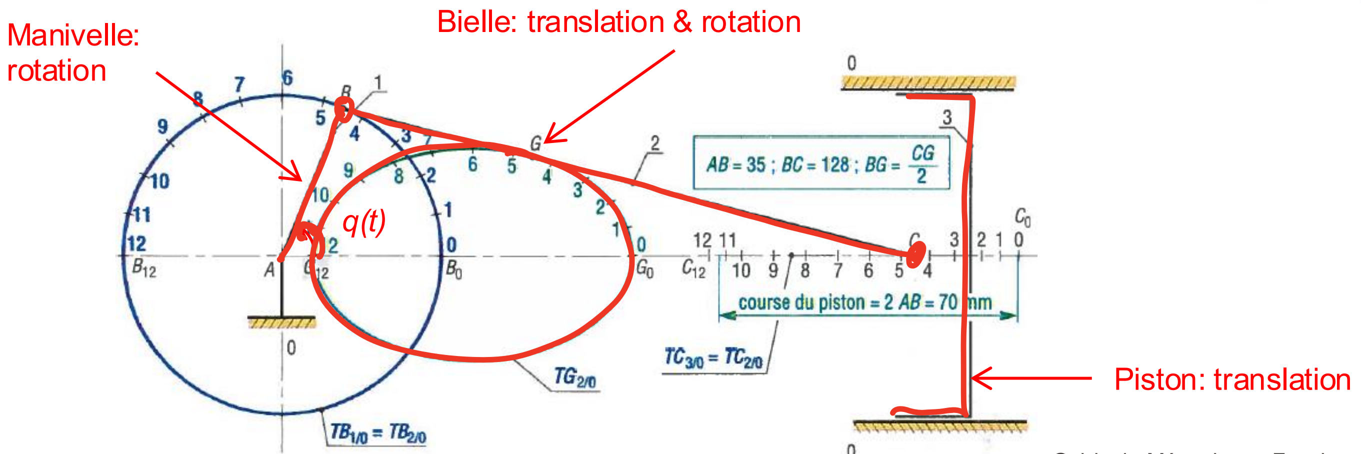
$$x''_{Bi}(q) = \frac{d^2x_{Bi}}{dq^2}$$

Fonctions géométriques liés au mouvement imposé

Loi d'espace IV

- Exemple Bielle-Manivelle-Piston
  - Mouvement plan à 1 degré de mobilité





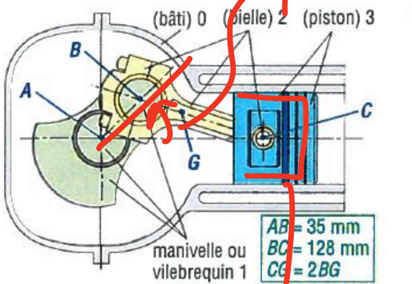
Guide de Mécanique, Fanchon

  - Position des différents composants définie univoquement par la coordonnée généralisée q(t) et les lois d'espace

Loi d'espace V

$$i = \frac{\dot{q}}{\dot{x}_p} = \frac{\cancel{\dot{q}}}{x_p' \cdot \cancel{\dot{q}}} = \frac{1}{x_p'}$$

- Caractérisation



  - Rapport de transmission $i = \dfrac{\text{Vitesse d'entrée}}{\text{Vitesse de sortie}}$

  - Système uniforme / homocinétique / synchrone si $i = cst.$

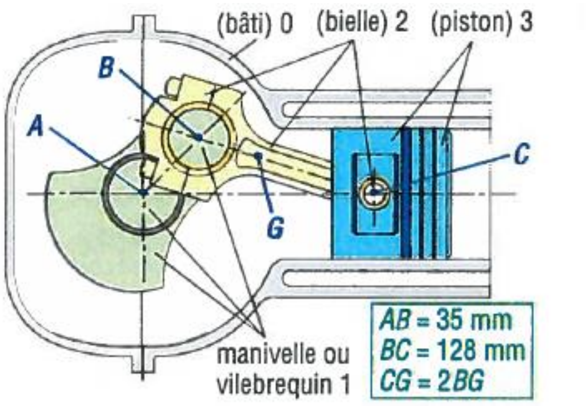
↳ $x_p' = st \quad x_p'' = 0$

  - Système non-uniforme / hétérocinétique si $i = f(q_1)$

Loi de mouvement cinématique

- L'objectif est de trouver une méthode pour dériver les lois qui gèrent le couplage entre les efforts et le mouvement d'une chaîne cinématique

- L'idée est de suivre une approche basée sur une formulation de Lagrange



Energie cinétique

Energie potentielle

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) = Q_n^*$$

Energie cinétique I

- L'énergie cinétique d'une chaine cinématique

2

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\dot{x}_{Bi}^2 + \dot{y}_{Bi}^2\right) + J_{Bi}\dot{\varphi}_{Bi}^2\right]$$

$$\dot{x}_{Bi} = x'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$

$$\dot{y}_{Bi} = y'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$

$$\dot{\varphi}_{Bi} = \varphi'_{Bi}(q)\dot{q}(t)$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(x_{Bi}'^2 + y_{Bi}'^2\right) + J_{Bi}\varphi_{Bi}'^2\right]}_{I(q)}$$

$$T = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2$$

- L'inertie réduite *I(q)* représente l'inertie globale du système mécanique ramenée au mouvement de la coordonnée généralisée

Energie cinétique II

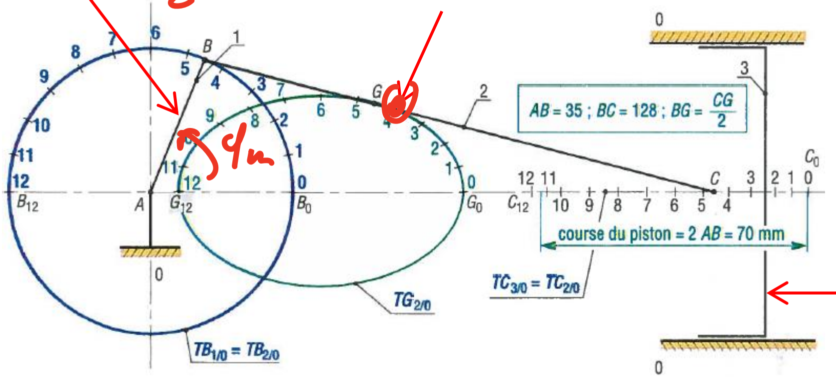
$= \frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{q}_B^2$

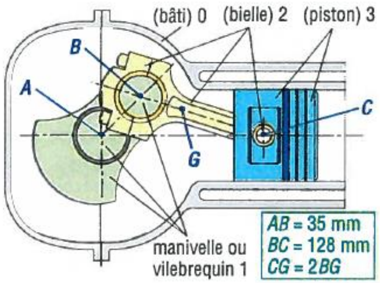
- Exemple Bielle-Manivelle-Piston

$T_{Manivelle} = \frac{1}{2} I_m \cdot \dot{q}_m^2$

T_{Bielle}

Guide de Mécanique, Fanchon





$T_{Piston} = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_p^2$

$$T = T_{Manivelle} + T_{Bielle} + T_{Piston} = \frac{1}{2} I(q) \dot{q}^2$$

- L'énergie cinétique du système complet s'exprime en fonction de la coordonnée généralisée et de la loi d'espace

Efforts extérieurs I

- Réduction des efforts extérieurs à la coordonnée gen. menante q
  - Le travail effectué par les efforts *parallèles* aux mouvements

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (F_{xx}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + M_i \delta\varphi_i) = Q^* \delta q$$

  - La loi d'espace impose $\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q}\delta q = x_i' \delta q$

  - L'effort réduit devient

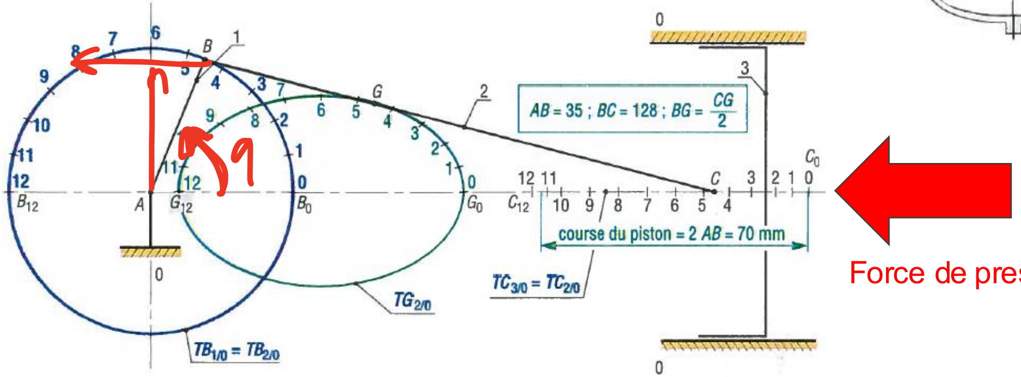
$$Q^* = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q} + F_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q} + M_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial q}\right) = Q_m^* - Q_e^*$$

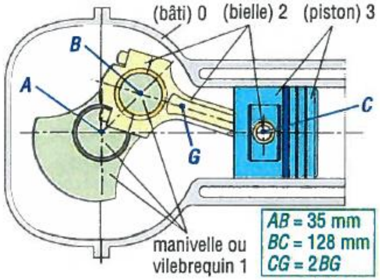
Efforts moteur

Efforts résistant

Efforts extérieurs II

- Exemple Bielle-Manivelle-Piston





Force de pression F_P

$$Q^* = F_P \frac{\partial x_P}{\partial q}$$

- Avec la coordonnée généralisée on ramène les efforts extérieurs quelconques au mouvement de la coordonnée généralisée q

Equation de mouvement I

- Formulation de Lagrange
  - Permet d'identifier les équations de mouvements de systèmes complexes
  - Cette formulation est fondée sur l'équilibre énergétique → Le Lagrangien L

$$L = \underbrace{T}_{\text{Energie cinétique}} - \underbrace{U}_{\text{Energie potentielle}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) = Q_1^*$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) = Q_2^*$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) = Q_n^*$$

Equation de mouvement II

- Pour un système à 1 degré de mobilité

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

- En utilisant les expressions pour T, U et $Q*$ on trouve l'équation de mouvement d'une chaîne cinématique à 1 degré de mobilité

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}I'(q)\dot{q}^2 + U'(q) = Q_m^* - Q_e^*$$

Efforts moteurs

Efforts d'entrainement

Efforts d'accélération de l'inertie réduite

Contribution de l'énergie potentielle

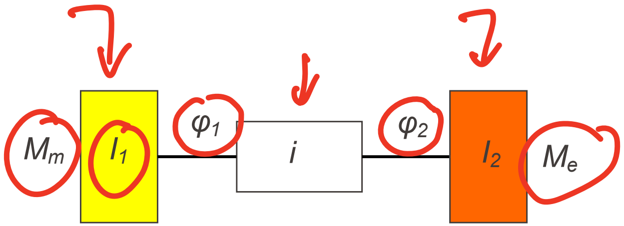
Efforts dus à la variation de l'inertie réduite en fonction de la coordonnée menante

Equation de mouvement III

- Procédure
  1. Déterminer / discrétiser les masses des corps rigides
  2. Déterminer le degré de mobilité est choisir les coordonnées généralisées adéquates
  3. Décrire les lois d'espace des différents éléments
  4. Exprimer les énergies cinétique et potentielle du système en fonction des coordonnées généralisées (→ utiliser les lois d'espace)
  5. Déduire les équations de mouvement (→ Lagrange)

→ Modèle cinétique / cinétostatique

Equation de mouvement IV



- Exemple: réducteur
  - Trouver l'équation de mouvement

1. Système à 1 degré de mobilité $\Rightarrow q = \varphi_1$

2. Loi d'engrenage

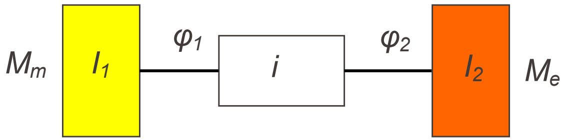
$$\dot\varphi_2 = \dot\varphi_1 / i \implies \varphi_2 = \frac{\varphi_1}{i}$$

3. Ecin

$$T = \frac{1}{2} I_1 \cdot \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot\varphi_2^2 \qquad \dot\varphi_2^2 \sim \frac{\dot\varphi_1^2}{i^2}$$

$$T = \frac{1}{2} \dot\varphi_1^2 \underbrace{\left[I_1 + \frac{I_2}{i^2} \right]}_{\rightarrow I(q)}$$

Equation de mouvement V



4. $V = 0$

5. Efforts

$$Q^* = \sum M_i \frac{dq_i}{dq} = M_m \cdot \underbrace{\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1}}_{1} - M_e \underbrace{\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}}_{1/i}$$

$$Q^* = M_m - \frac{M_e}{i}$$

6. $I\ddot{q} + \frac{1}{2} I' \dot{q}^2 + V' = Q^*$

$$\boxed{\left[I_1 + \frac{I_2}{i^2}\right] \ddot{q} = M_m - \frac{M_e}{i}}$$

Dynamique des Systèmes Mécaniques

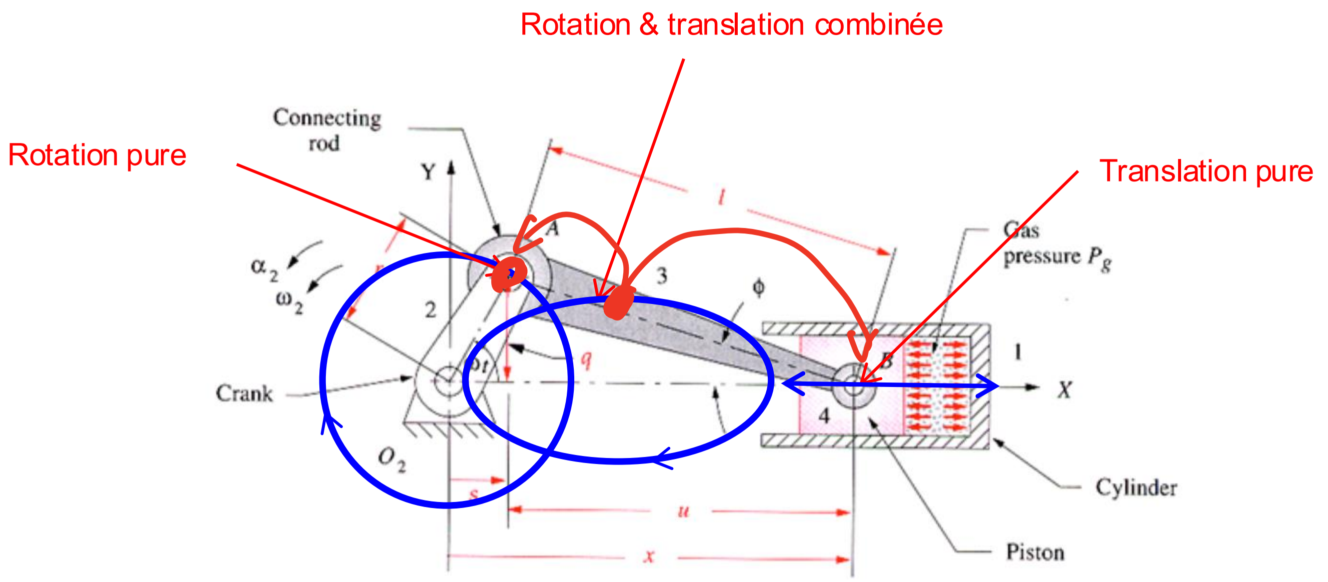
Discrétisation des masses

Prof. J. Schiffmann

École polytechnique fédérale de Lausanne

Discrétisation des masses I

- Lois de mouvement souvent complexes
  - Complique la description mathématique
  - → Appliquer le principe de discrétisation de masse



Design of Machinery, Norton

Discrétisation des masses II

- Masses équivalentes
  - La connaissance de la loi d'espace de deux points du corps permet de simplifier → masses équivalentes
  - La procédure consiste à remplacer la masse et l'inertie au centre de gravité par des masses équivalentes aux endroits où les lois sont plus simples

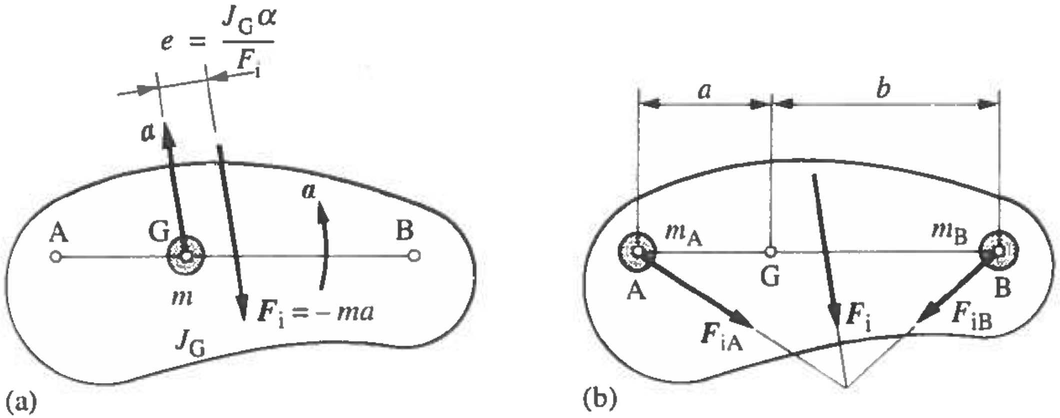


Figure 13.42 [Spinnler]

Masses équivalentes I

- Principes d'équivalence
  - Masse $m = m_A + m_B$
  - Centre de masse $m_A a = m_B b$
  - Moment d'inertie $J_G = m_A a^2 + m_B b^2$

Equivalence statique

Equivalence dynamique

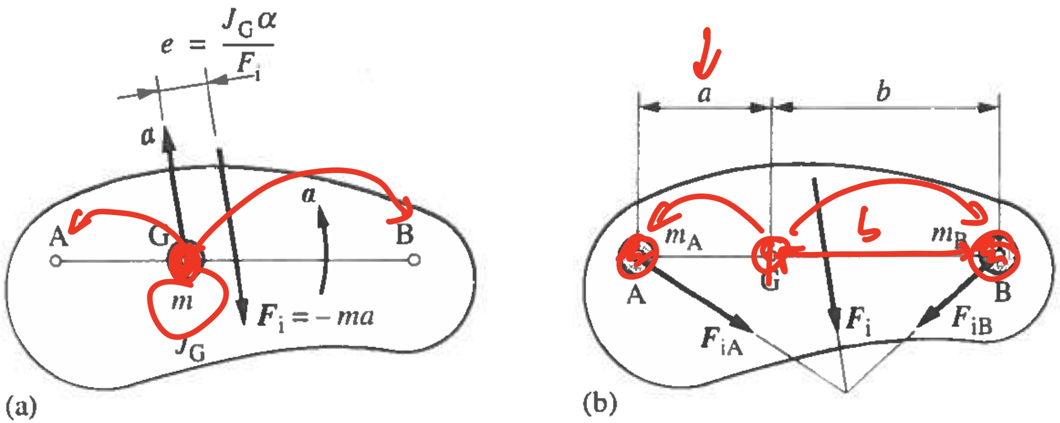
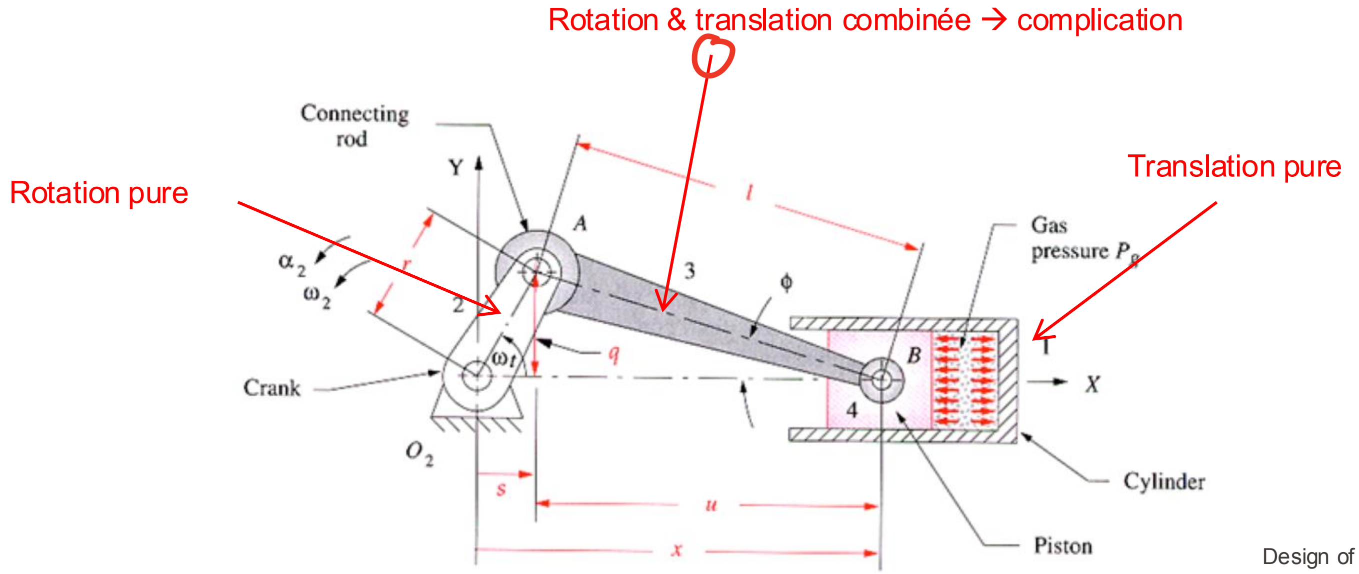


Figure 13.42 [Spinnler]

Masses équivalentes II

- Exemple: discrétisation de la bielle

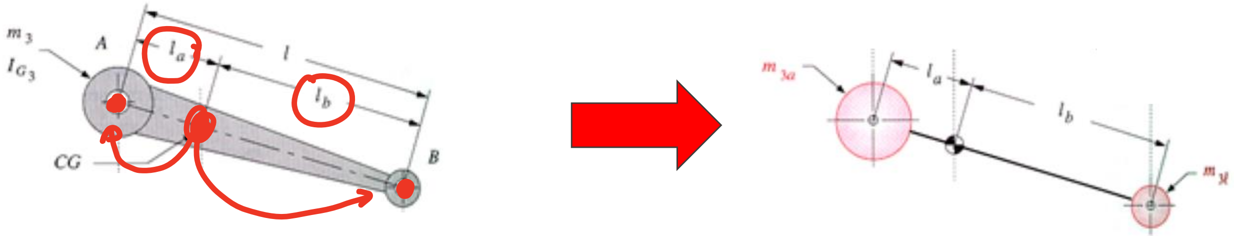


Design of Machinery, Norton

- Le but est de repartir l'inertie de la bielle aux points A et B pour faciliter la description mathématique du mouvement

Masses équivalentes III

- Exemple: discrétisation de la bielle



Design of Machinery, Norton

- En fixant l_a & l_b: 2 inconnues et 3 équations

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= m_A + m_B \\ m_A l_a &= m_B l_b \end{aligned}\right\} \text{Equivalence statique}$$

$$\hat{I}_{G3} = m_A l_a^2 + m_B l_b^2$$

- L'équivalence statique mène à

$$m_A = m_3 \frac{l_b}{l_a + l_b} \qquad m_B = m_3 \frac{l_a}{l_a + l_b} \qquad \hat{I}_{G3} = m_3 l_a l_b$$

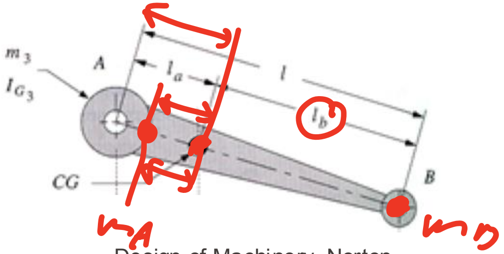
Masses équivalentes IV

- Solution exacte
  - 4 inconnues et 3 équations

$$m_3 = m_{Ae} + m_{Be}$$

$$m_{Ae} l_{ae} = m_{Be} l_{be}$$

$$I_{G3} = m_{Ae} l_{ae}^2 + m_{Be} l_{be}^2$$



Design of Machinery, Norton

  - En choisissant $l_{be} = l_b$ il vient:

$$m_{Ae} = m_3 \frac{l_b}{l_{ae} + l_b} \qquad m_{Be} = m_3 \frac{l_{ae}}{l_{ae} + l_b} \qquad l_{ae} = \frac{I_{G3}}{m_3 l_b}$$

  - L'erreur de discrétisation sur l'inertie devient:

$$\frac{I_{G3} - \hat{I}_{G3}}{I_{G3}} = \frac{l_{ae} - l_a}{l_{ae}}$$

Si $(l_{ae}-l_a)$ << l_a l'erreur reste acceptable

Dynamique des Systèmes Mécaniques

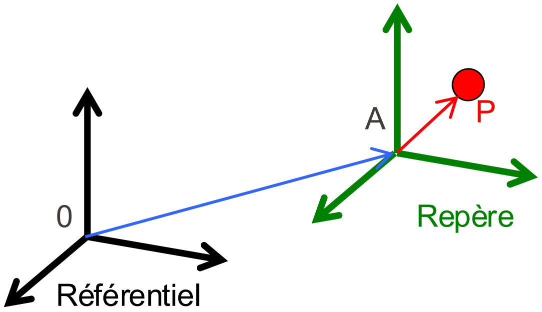
Efforts d’inertie

Prof. J. Schiffmann

École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

Efforts d'inertie I

- Relation entre un référentiel inertiel et un repère



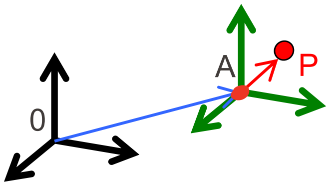
  - Théorème de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}_a(P)$$

Accélération absolue du point P mesurée dans le référentiel

Toutes les forces extérieures

Efforts d'inertie II



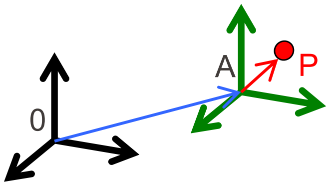
- Théorème de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}_a(P)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_a(A) + m\dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}) + m\vec{a}_r(P) + 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$$

Accélération relative dans le repère

Efforts d'inertie III



- Théorème de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}_a(P)$$

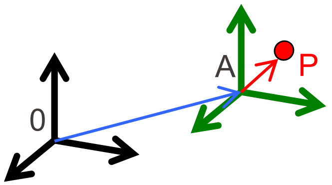
$$\vec{F} = m\vec{a}_a(A) + m\dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}) + m\vec{a}_r(P) + 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$$

Accélération relative dans le repère

- L'accélération dans le repère devient

$$\vec{a}_r(P) = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_a(A) - \dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$$

Efforts d'inertie IV



- Théorème de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}_a(P)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_a(A) + m\vec{\Omega}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}) + m\vec{a}_r(P) + 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$$

Accélération relative dans le repère

- L'accélération dans le repère devient:

$$\cancel{\vec{a}_r(P)} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_a(A) - \dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP}) - \cancel{2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r}$$

- Pour un corps solide:

$$\vec{a}_r(P) = 0 \qquad \underline{\vec{v}_r = 0}$$

L'observateur dans le repère voit le corps au repos

$$0 = \vec{F} - \underbrace{\left[m\vec{a}_a(A) + m\dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP})\right]}_{\vec{F}_{Inertie}}$$

Principe D'Alembert

Efforts d'inertie V

$$0 = \vec{F} - \underbrace{\left[m\vec{a}_a(A) + m\dot{\vec{\Omega}}\overrightarrow{AP} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AP})\right]}_{\vec{F}_{Inertie}}$$

- Tout corps soumis à une loi de mouvement oppose un effort résistant → effort d'inertie
- L'effort d'inertie charge le corps conjointement avec l'effort utile
- Les deux efforts (utile et inertie) limitent la vitesse du système
- L'effort d'inertie est un effort mesuré dans le repère A

Efforts d'inertie VI

- Exemple: lanceur de marteau

$$0 = \vec{F} - \underbrace{mr\omega^2}_{\vec{F}_{Inertie}}$$

- Pour effectuer la trajectoire sur un cercle la masse voit une force extérieure qui pointe vers le centre de rotation (force centripète dans le référentiel)
- L'athlète ressent une force de traction dans ses bras. C'est une force d'inertie: la force centrifuge. Elle est mesurée dans le repère A

Calcul des efforts d'inertie I

- Comment calculer les efforts d'inertie d'un élément dans une chaîne cinématique?

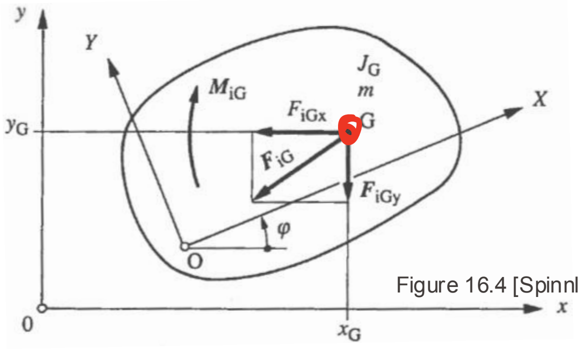


Figure 16.4 [Spinnler]

  - Le principe D'Alembert impose

$$0 = \vec{F} + \vec{F}_{Inertie} \qquad \vec{F}_{Inertie} = -m a_a$$

$$0 = \vec{M} + \vec{M}_{Inertie} \qquad \vec{M}_{Inertie} = -J_G \alpha_a$$

Accélérations imposées par les lois d'espace

  - Les efforts d'inertie se déduisent des lois d'espace

Calcul des efforts d'inertie II

- Pour un corps rigide G dont le mouvement est commandé par $q(t)$

$$x_G = x_G(q) \qquad y_G = y_G(q) \qquad \varphi_G = \varphi_G(q)$$

…. les efforts d'inertie deviennent

$$F_{Inertie-x} = -m_G[x''_G(q)\dot{q}^2(t) + x'_G(q)\ddot{q}(t)]$$

$$F_{Inertie-y} = -m_G[y''_G(q)\dot{q}^2(t) + y'_G(q)\ddot{q}(t)]$$

$$M_{Inertie} = -J_G[\varphi''_G(q)\dot{q}^2(t) + \varphi'_G(q)\ddot{q}(t)]$$

Origine externe provenant de la loi d'espace

Origine interne provenant de l'accélération du mouvement menant

Calcul des efforts d'inertie III

- Quelques commentaires
  - Les efforts d'inertie sont proportionnelles à l'inertie
  - Lorsque la vitesse est constante ($\dot{q}(t) = cst$) et que le système est non-uniforme, les effort sont proportionnels au carré de la vitesse
  - Lorsque le système est uniforme ($I'(q) = cst$) les efforts sont proportionnels à l'accélération du système
  - Dans des machines rapides les efforts d'inertie peuvent devenir nettement plus grands que les efforts utiles

$$F_{Inertie-x} = -m_G[x''_G(q)\dot{q}^2(t) + x'_G(q)\ddot{q}(t)]$$

Exercices W2

- Equation de mouvement par Lagrange
- Inertie réduite d’un mécanisme complexe
- Entrainement d’un rotor d’hélicoptère
- Turbopompe de moteur de fusée