

Techniques de Mesure — Traitement du Signal

introduction aux techniques fréquentielles

pour les signaux déterministes et aléatoires, continus et discrets

Philippe Müllhaupt

28 février 2023

Résumé

L'approche fréquentielle est présentée par l'entremise des séries de Fourier et de la transformée de Fourier continue et discrète. L'échantillonnage et ces liens avec la représentation fréquentielle y est également présenté. Ce document sert de support à la partie pratique qui se déroule en laboratoire. La théorie est illustrée par divers exemples en relation avec la partie pratique. L'objectif est d'attirer l'attention sur les restrictions de la cadence d'échantillonnage et du nombre limité des échantillons à disposition. Une attention particulière est portée sur la détection de la fréquence d'ondes sinusoïdales échantillonnées en utilisant la transformée de Fourier discrète. Les signaux déterministes sont traités dans la première partie et les signaux aléatoires dans la seconde partie. On présente la fonction de corrélation, le théorème de Wiener-Khinchin qui relie la corrélation à la densité spectrale. Quelques techniques d'estimation non paramétriques sont présentées et illustrées par des exemples. L'estimation du contenu fréquentiel est dans le cas d'un signal aléatoire soumis à une incertitude qui se caractérise par un biais et une variance. Les techniques ont toutes un compromis entre le biais et la variance et ce phénomène est illustré par les expériences numériques.

Table des matières

I	Signaux déterministes	4
1	Série de Fourier et transformée de Fourier	4
1.1	Signaux périodiques	4
1.2	Série de Fourier	5
1.2.1	Fonctions discontinues	6
1.2.2	Fonction dérivable nulle-part	7
1.3	Transformée de Fourier	7
1.3.1	Période qui tend vers l'infini	7
1.3.2	Transformée de Fourier des signaux périodiques	7
1.4	Peigne de Dirac	8
1.5	Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac	9
1.5.1	Transformée de Fourier d'un signal décalé dans le temps	9
1.5.2	TF du peigne de Dirac en se basant sur le thm. du décalage	10
1.5.3	TF du peigne de Dirac en se basant sur la série de Fourier	10
1.6	Convolution et transformée de Fourier	11
2	Fenêtrage et échantillonnage	11
2.1	Effet de la limitation dans le temps	12
2.2	Fonction gaussienne	14
2.3	Echantillonneur parfait	19
2.4	Signal à bande limitée	20
2.5	Théorème d'échantillonnage	20
2.6	Formule de reconstruction	21
2.7	Transformée en Z	22
2.8	Transformée de Fourier et transformée de Laplace	22
2.9	Transformée de Fourier discrète	23
3	Expériences numériques avec des séries de Fourier	24

4	Expériences numériques avec un sinus échantillonné	27
4.1	Résolution spectrale (quantum fréquentiel)	28
4.1.1	Fréquence maximale détectable	28
4.1.2	Module du spectre discret	28
4.2	Maximum du module des coefficients de la TFD	29
4.3	Battements et repliement spectral	30
5	Un paradoxe ?... non, c'est l'étalement spectral	32
6	Interpolation et suréchantillonnage	35
6.1	"Zero padding" à la fin de la TFD	35
6.2	"Zero padding" entre les échantillons de la TFD	39
7	Annexe : fichier experiences.m	40
II	Signaux aléatoires (signaux stochastiques)	47
8	Variable aléatoire et processus stochastique	48
8.1	Variable aléatoire	48
8.2	Processus stochastique	49
8.3	Moyenne et variance	49
9	Exemple de signaux aléatoires	50
9.1	Bruit blanc	50
9.2	Mouvement brownien	51
9.3	Bruit de grenaille	54
9.4	Sinus noyé dans du bruit	56
9.5	Bruit blanc filtré, ou bruit coloré	58
10	Analyse spectrale non paramétrique	59
10.1	Fonction de covariance et de corrélation	59
10.1.1	Stationarité	60
10.1.2	Ergodicité	61
10.2	Théorème de Wiener-Khinchin	61

10.2.1	Densité spectrale de puissance	61
10.3	Energie et fonctions de corrélation	62
10.4	Formule équivalente de la densité spectrale	62
10.5	Filtrage linéaire des signaux aléatoires	64
10.6	L'estimateur spectral simple ou périodogramme	65
10.7	L'estimateur spectral moyenné	68
10.8	Estimation de la fonction de corrélation	70
10.9	L'estimateur spectral adouci dit de Blackman-Tukey	70
11	Formulaire	73
12	Annexe : Tables	75
13	Ouvrages conseillés	79

Première partie

Signaux déterministes

1 Série de Fourier et transformée de Fourier

Les fréquences fondamentales jouent un rôle prépondérant dans les systèmes dynamiques et on rencontre dans beaucoup de systèmes des phénomènes de résonance caractéristique. Ces phénomènes sont mieux compris lorsqu'ils sont analysés dans le domaine fréquentiel. L'analyse de Fourier permet d'introduire les harmoniques et d'effectuer une analyse de celles-ci. On distingue la décomposition en série de Fourier lorsqu'on examine les signaux périodiques. La transformée de Fourier est alors vue comme un cas particulier lorsque la période tend vers l'infini. Ainsi un signal avec des propriétés convenables, afin de garantir l'existence et la convergence des intégrales de définition, admet une transformée de Fourier.

1.1 Signaux périodiques

Soit $\{x(t)\}$ un signal.

Définition 1.1. (SIGNAL PÉRIODIQUE) *Le signal $\{x(t)\}$ est périodique de période T , si et seulement si*

$$x(t + kT) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

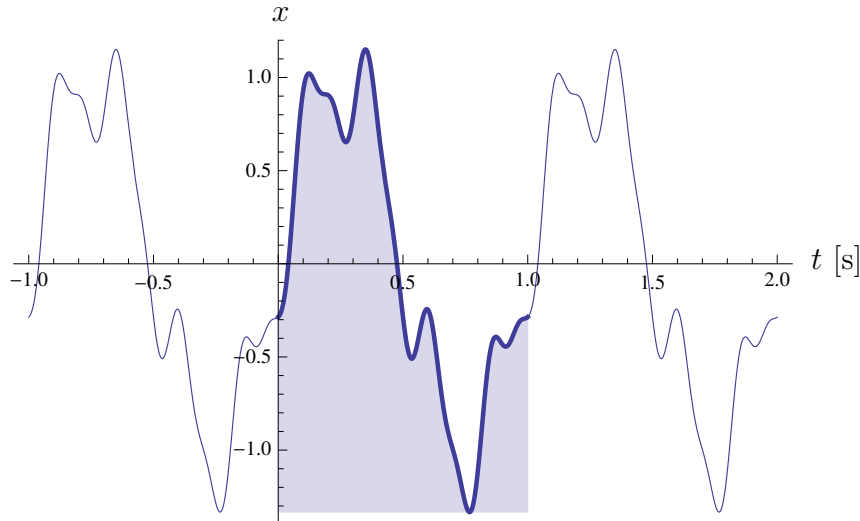


FIGURE 1 – Un signal périodique comporte une partie qui se répète à intervalles réguliers. Le plus petit intervalle pour lequel ceci se produit est la période T .

Cette définition signifie que le signal comporte une répétition périodique (indice $k \in \mathbb{Z}$) et qu'il est suffisant de le connaître sur une durée T . Il est important de souligner que la connaissance du signal peut commencer à n'importe quel instant t , ainsi l'intervalle de temps nécessaire pour la détermination du signal complet est $[t, t + T[$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

1.2 Série de Fourier

La plupart des signaux périodiques admettent une décomposition en harmoniques successives appelées série de Fourier. Des précautions sont nécessaires en ce qui concerne le type de continuité afin que la série de Fourier reflète fidèlement le signal de départ. Lorsque le signal est discontinu, il est également possible que la série de Fourier converge (selon le type de convergence tel que la convergence presque partout, celle en moyenne, absolue, etc.), mais ce n'est pas toujours le cas.

D'autres phénomènes surprenants peuvent avoir lieu. On sait qu'un sinus ou cosinus est dérivable une infinité de fois. Ils sont parfaitement réguliers. Ainsi, lorsqu'on somme un nombre fini de sinus, le signal résultant conserve cette propriété d'être différentiable une infinité de fois. Par contre, lorsqu'une

somme infinie de sinus est effectuée, il est possible de perdre la propriété de dérivabilité (cf. les signaux discontinus ayant une série de Fourier convergente). Et il peut même y avoir des cas encore plus sévères où toute la régularité est perdue. Des sommes infinies de sinus donnent une fonction dérivable en aucun point.

Définition 1.2. (SÉRIE DE FOURIER) *Soit $\{x(t)\}$ un signal périodique de période T . Sa série de Fourier est définie par les formules*

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

avec $c_k \in \mathbb{C}$ des coefficients complexes donnés par

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j \frac{2\pi k}{T} t} dt$$

1.2.1 Fonctions discontinues

Un grand nombre d'exemples de fonctions périodiques discontinues sont représentables par des séries de Fourier convergentes. Nous donnons deux exemples, une onde carrée et une onde triangulaire.

Le train d'ondes carré. La série de Fourier correspondante est

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin(2\pi n t)$$

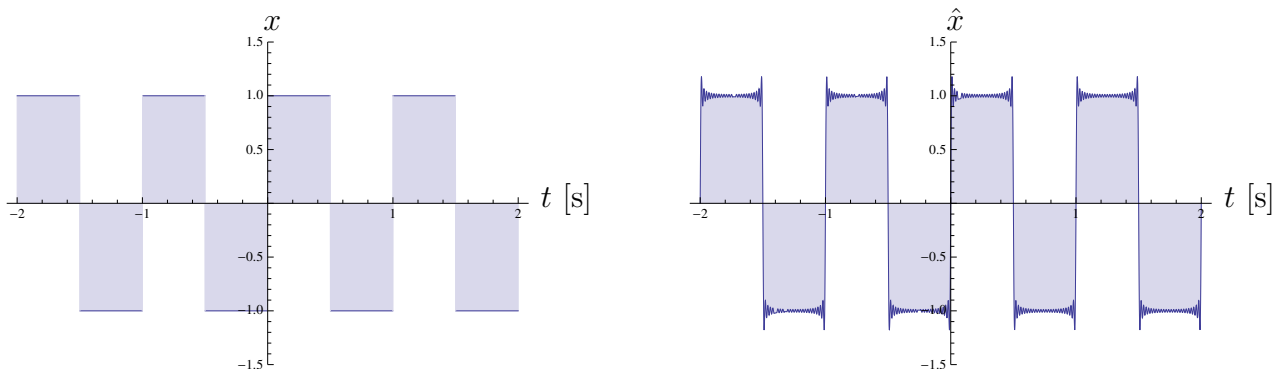


FIGURE 2 – À gauche, le signal, et à droite, la somme $\sum_{n=0}^{50} \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin(2\pi n t)$, c.-à-d. celle obtenue à partir des 50 premiers coefficients de la série de Fourier. On illustre le phénomène de Gibbs qui fait apparaître des oscillations aux points de discontinuité de la fonction d'origine.

Le train d'ondes triangulaire. La série de Fourier associée est

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(n t)$$

1.2.2 Fonction dérivable nulle-part

Weierstrass a mis en évidence des classes de fonctions ayant des séries de Fourier parfaitement bien définies mais dérivables en aucun point. Un exemple est la fonction

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi t)$$

Avec les paramètres $b = \frac{1}{2}$ et $a = 3$ la fonction devient "fractale" bien que chaque fonction de base apparaissant dans chacun des termes de la série soit un cosinus (le cosinus est parfaitement régulier).

1.3 Transformée de Fourier

1.3.1 Période qui tend vers l'infini

Lorsque la période T d'un signal périodique $\{x(t)\}$ augmente, les contributions x_n à la série de Fourier interviennent à des fréquences de plus en plus rapprochées les unes des autres. Un signal non périodique peut être interprété comme un signal périodique de période infinie. Dans un tel cas, les contributions fréquentielles ne sont plus séparées les unes des autres et la série (de Fourier) fait place à une intégrale (car les contributions fréquentielles sont espacées infiniment près les unes des autres).

Définition 1.3. (TRANSFORMÉE DE FOURIER) *La transformée de Fourier $\{X(f)\}$ du signal $\{x(t)\}$ est définie par*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j 2\pi f t} dt$$

1.3.2 Transformée de Fourier des signaux périodiques

La transformée de Fourier d'un signal périodique de période T est non-nulle uniquement aux fréquences n/T conformément au résultat suivant.

Théorème 1.1. (TF DE SIGNAUX PÉRIODIQUES ET SÉRIE DE FOURIER) *Si $\{x(t)\}$ est périodique de période T alors la transformée de Fourier $\{X(f)\}$ est non nulle uniquement aux fréquences $\frac{n}{T}$ et*

s'exprime à partir des coefficients x_n de sa série de Fourier (notés c_n auparavant) par la formule

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta\left(f - n \frac{1}{T}\right)$$

Démonstration:

En partant de la définition de la transformée de Fourier et en y introduisant la série de Fourier du signal périodique, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j 2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j 2\pi \frac{n}{T} t} \right) e^{-j 2\pi f t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j 2\pi (f - \frac{n}{T}) t} dt \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisés

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow \delta(f) \\ \delta(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j 2\pi f t} dt \end{aligned}$$

CQFD.

1.4 Peigne de Dirac

Définition 1.4. *Un peigne de Dirac est une série d'impulsions de Dirac équiséparées.*

$$\delta_T(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

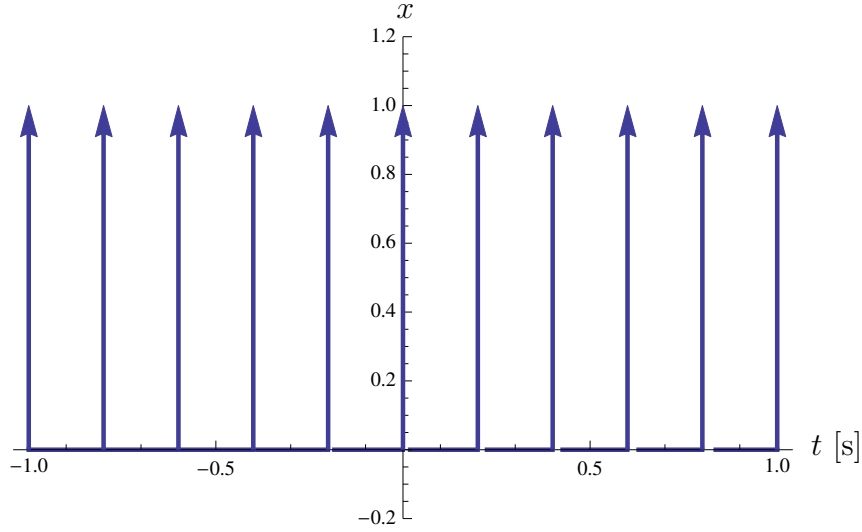


FIGURE 3 – Un peigne de Dirac est une succession d’impulsions de Dirac équispaciées

1.5 Transformée de Fourier d’un peigne de Dirac

La transformée d’un peigne de Dirac est à nouveau un peigne de Dirac mais dont l’espacement est inversement proportionnel à l’espacement du peigne de Dirac initial. Pour obtenir l’expression de cette transformée on utilise le théorème du décalage. Le résultat de cette section est utile lorsqu’il est associé à la convolution. On explique ainsi la périodicité de la représentation fréquentielle d’un signal échantillonné. Ceci fournit un autre regard sur le résultat déjà obtenu à l’aide d’un calcul direct de la transformée de Fourier associée à la série de Fourier d’un signal périodique.

1.5.1 Transformée de Fourier d’un signal décalé dans le temps

Soit $\{g(t)\}$ un signal et $\{G(f)\}$ sa transformée de Fourier. Déterminons la relation $\{G(f)\}$ et la transformée de Fourier de $\{g(t - \alpha)\}$.

Théorème 1.2. (DU DÉCALAGE)

$$g(t - \alpha) \leftrightarrow e^{-j2\pi f \alpha} G(f)$$

Démonstration :

On applique la définition de la transformée de Fourier ainsi que le changement de variable $\bar{t} = t - \alpha$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \alpha) e^{-j2\pi f t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t}) e^{-j2\pi f (\bar{t} + \alpha)} d\bar{t} = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t}) e^{-j2\pi f \bar{t}} e^{-j2\pi f \alpha} d\bar{t} &= e^{-j2\pi f \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t}) e^{-j2\pi f \bar{t}} d\bar{t} = e^{-j2\pi f \alpha} G(f) \end{aligned} \quad (1)$$

CQFD.

En ce qui concerne le peigne de Dirac, il y a deux façons de déterminer sa transformée de Fourier, soit en invoquant le thm. du décalage, soit en considérant que c'est un signal périodique et en évaluant sa série de Fourier.

1.5.2 TF du peigne de Dirac en se basant sur le thm. du décalage

Théorème 1.3. (TF DU PEIGNE DE DIRAC (1))

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi kT f} \quad (2)$$

Démonstration : Ceci résulte de

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

et de l'application de (1).

CQFD.

1.5.3 TF du peigne de Dirac en se basant sur la série de Fourier

Théorème 1.4. (TF DU PEIGNE DE DIRAC)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - n \frac{1}{T}\right) \quad (3)$$

Démonstration : Les coefficients de la série de Fourier du signal périodique de période T que représente le peigne de Dirac $\{\delta_T(t)\}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (4)$$

de telle sorte que la série de Fourier devienne

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi k}{T} t} \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - n \frac{1}{T}\right)$$

en utilisant à nouveau le théorème du décalage.

CQFD.

1.6 Convolution et transformée de Fourier

Définition 1.5. (CONVOLUTION)

$$f * g = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Ce produit admet un élément neutre.

Théorème 1.5. (ELÉMENT NEUTRE POUR LA CONVOLUTION) *L'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour la convolution*

$$g(t) * \delta(t) = g(t) \quad \forall g(t)$$

Démonstration: $(g * \delta)(t) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t)$ CQFD.

Ce produit est commutatif et associatif

Théorème 1.6. (COMMUTATIVITÉ ET ASSOCIATIVITÉ DE LA CONVOLUTION)

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$

dont la démonstration est un exercice de changement de variables. On peut également montrer qu'il n'y a pas de diviseur de zero (Th. Titchmarsh) et donc les signaux constituent les éléments d'un anneau intègre dont le produit est la convolution et l'addition est la somme des signaux.

Théorème 1.7. (PRODUIT DE CONVOLUTION ET PRODUIT SIMPLE DES TRANSFORMÉES) *Il existe une correspondance entre le produit de convolution dans le domaine temporel et le produit simple des transformations de Fourier dans le domaine fréquentiel.*

$$\begin{aligned} f * g &\rightarrow F(f) \cdot G(f) \\ f(t) \cdot g(t) &\leftarrow F * G \end{aligned}$$

2 Fenêtrage et échantillonnage

En pratique, nous aurons affaire à un nombre limités d'échantillons du signal. Une fonction du temps est convertie en suite de nombre par le système d'acquisition (échantillonnage) et stocké dans l'ordinateur en tant qu'un ensemble fini de valeurs. Nous aurons affaire ainsi à la restriction du signal d'origine par une fenêtre. Le signal est non seulement discrétisé dans le temps mais également limité dans le temps.

2.1 Effet de la limitation dans le temps

La limitation dans le temps d'un signal a une conséquence importante sur sa transformée de Fourier.

Soit $f(t)$ le signal illimité dans le temps et soit $g(t)$ le signal limité entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ f(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

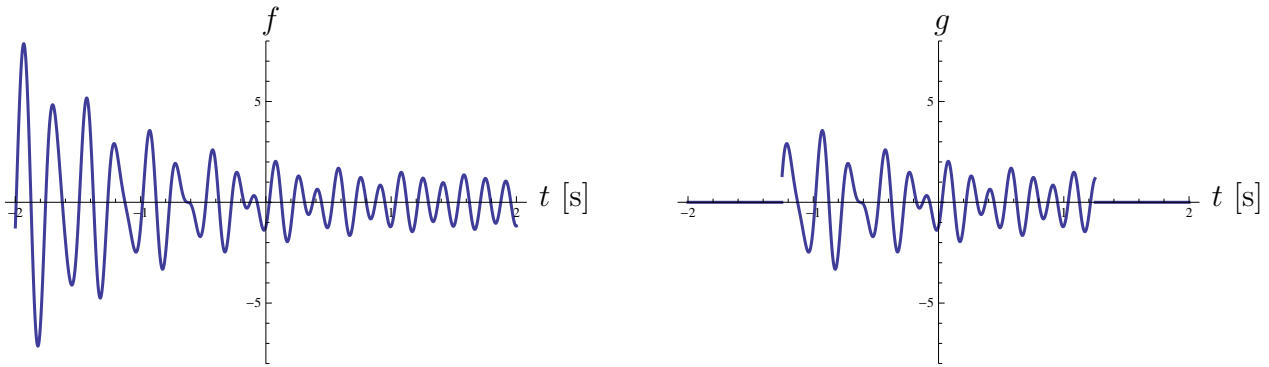


FIGURE 4 – Le signal $\{f(t)\}$ (à gauche) et sa restriction sur un intervalle $\{g(t)\}$ (à droite).

Soit la fenêtre rectangulaire

$$r_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

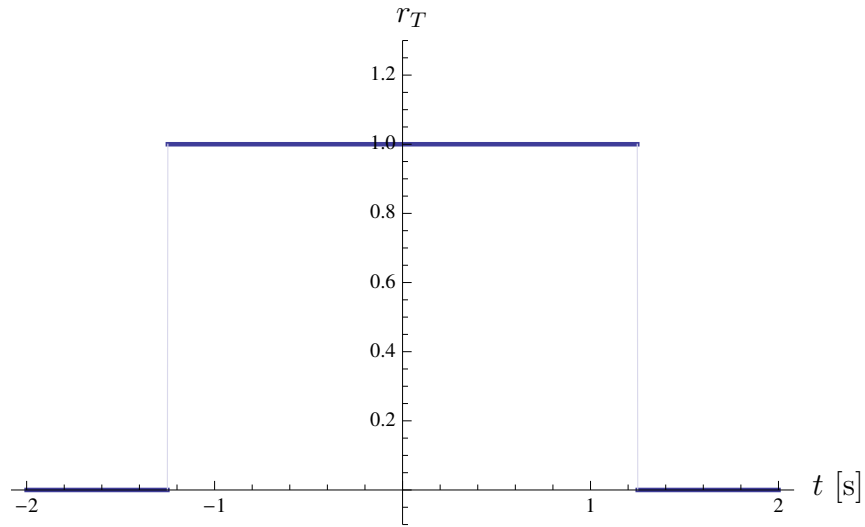


FIGURE 5 – La fonction $r_T(t)$ est une fonction symétrique par rapport à l'origine égale à un sur un intervalle de durée T et nulle partout ailleurs.

Calculons la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire

$$\begin{aligned}
 R(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= -\frac{1}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{T}{2}} \right) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \operatorname{sinc}(f T)
 \end{aligned}$$

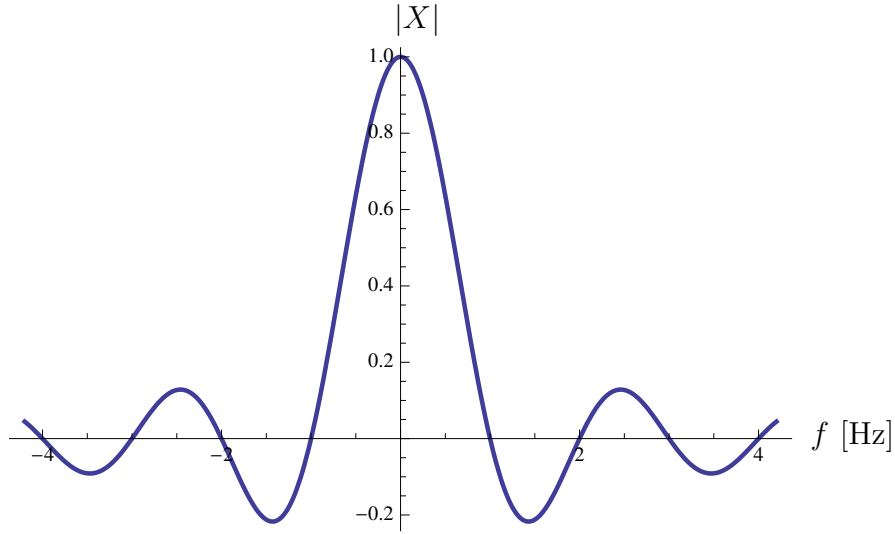


FIGURE 6 – La fonction sinus cardinal est la transformée de Fourier d'un signal rectangulaire. Elle est définie comme $\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$.

2.2 Fonction gaussienne

La fonction Gaussienne préserve sa forme par transformée de Fourier mais "sa largeur" est en correspondance inverse après transformée.

Théorème 2.1. (TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE GAUSSIENNE)

$$e^{-at^2} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{4a}}}{\sqrt{a}}$$

Comme illustration, considérons le signal $x(t) = e^{-(2\pi t)^2} \sin(2\pi 10t)$ qui est représenté à la figure 7.

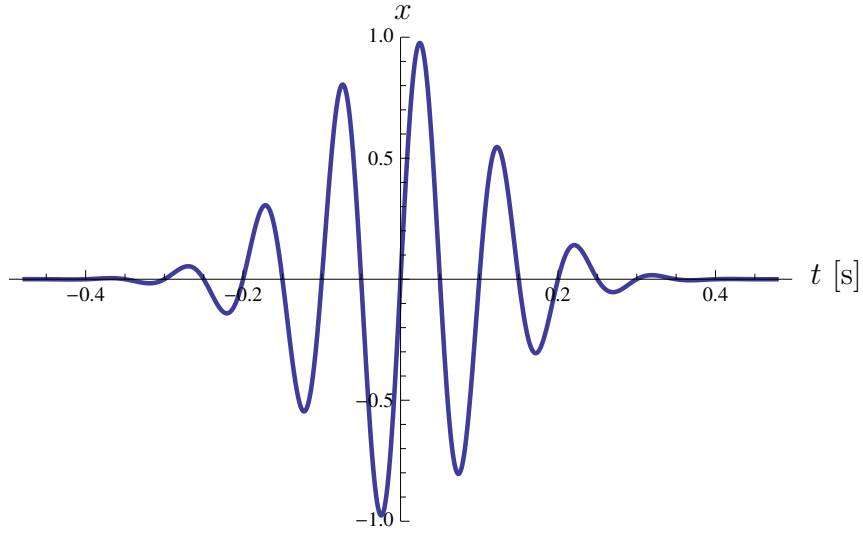


FIGURE 7 – Le signal $e^{-(2\pi t)^2} \sin(2\pi 10t)$ est un sinus de fréquence 10 modulé par une gaussienne.

Le signal $x(t)$ étant le produit d'un sinus par une fonction gaussienne, la transformée de Fourier $X(f)$ sera la convolution de la transformée du sinus (deux impulsions de Dirac en -10 et 10), autrement dit

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sin(2\pi 10 t) \cdot e^{-(2\pi t)^2} \\
 \updownarrow \quad \updownarrow \\
 X(f) &= \left(-j\frac{1}{2}\delta(f-10) + j\frac{1}{2}\delta(f+10) \right) * \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{f^2}{4}} \\
 &= -\frac{je^{-\frac{f^2}{4}-25}\sinh(5f)}{2\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

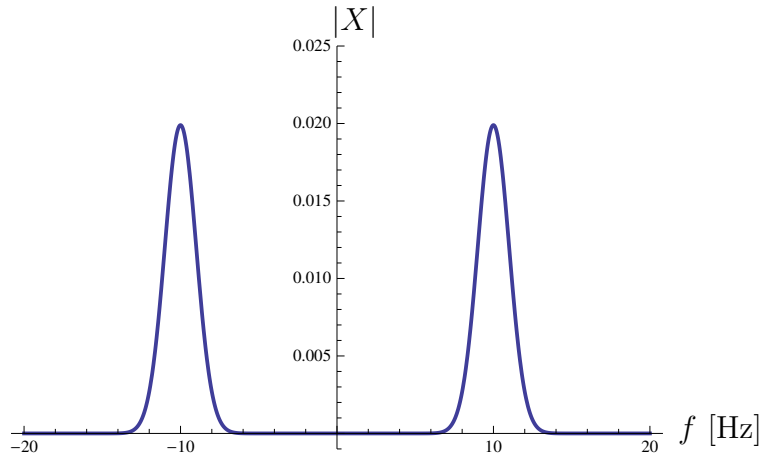


FIGURE 8 – Le module de la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $\sin(2\pi 10t)e^{-(2\pi t)^2}$. On constate les deux lobes à la fréquence 10 et -10 correspondants aux Diracs de la transformée du sinus. Les Diracs ont été "étalés" à cause de la multiplication par la Gaussienne. La gaussienne a fenêtré le sinus et localisé celui-ci dans le temps. La conséquence est une perte de localisation dans le domaine des fréquences.

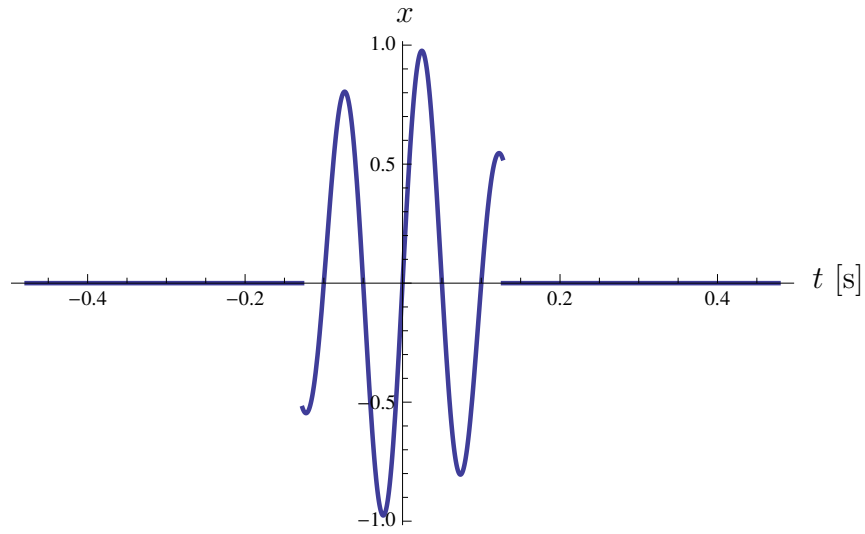


FIGURE 9 – Le signal $\sin(2\pi 10t)e^{-(2\pi t)^2}$ est restreint par multiplication par une fenêtre rectangulaire $r_{0.8/2/\pi}(t)$.

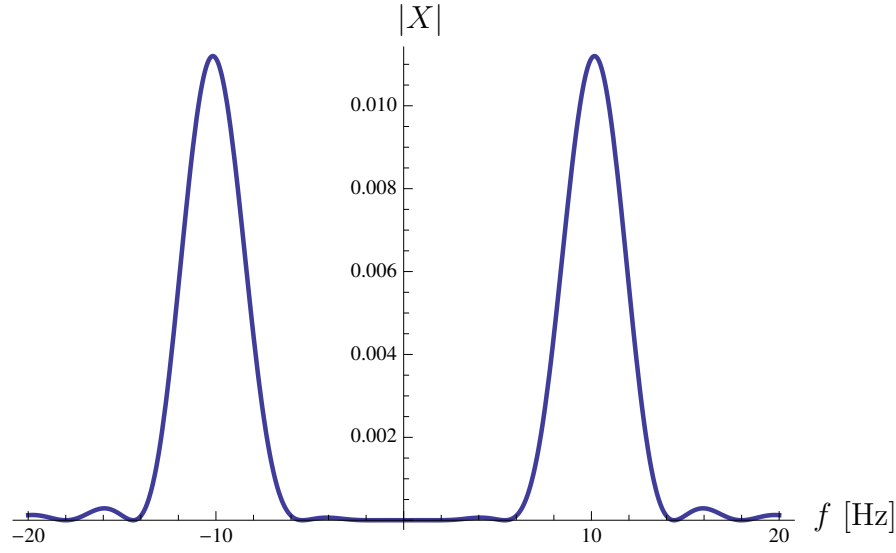


FIGURE 10 – Le module de la transformée du signal $\sin(2\pi 10t)e^{-2}$ après restriction par la fenêtre rectangulaire $r_{0.8/2/\pi}(t)$ correspond à la convolution des deux lobes gaussiens par un sinus cardinal. Le sinus cardinal entraîne de légères oscillations et un "étalement" supérieur dû à la perte de localisation fréquentielle.

On peut comparer graphiquement le résultat au fenêtrage direct du sinus par la fenêtre rectangulaire.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sin(2\pi 10t) \cdot r_{0.8/2/\pi}(t) \\
 \updownarrow & \quad \updownarrow \\
 X(f) &= \left[-j\frac{1}{2}\delta(f-10) + j\frac{1}{2}\delta(f+10) \right] * \frac{0.8}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.8}{2\pi}f\right) \\
 &= -j\frac{0.8}{4\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.8}{2\pi}(f-10)\right) + j\frac{0.8}{4\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.8}{2\pi}(f+10)\right)
 \end{aligned}$$

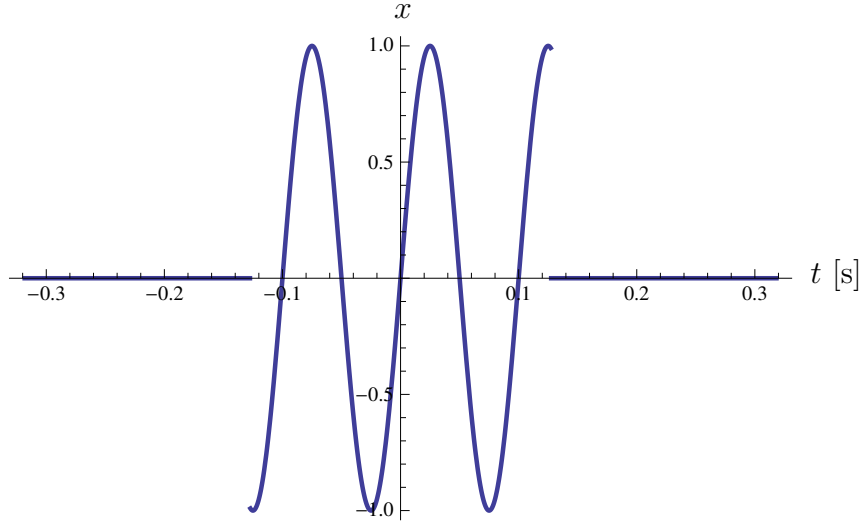


FIGURE 11 – Le signal $\sin(2\pi 10t)$ est multiplié directement par la fenêtre rectangulaire $r_{0.8/2/\pi}(t)$.

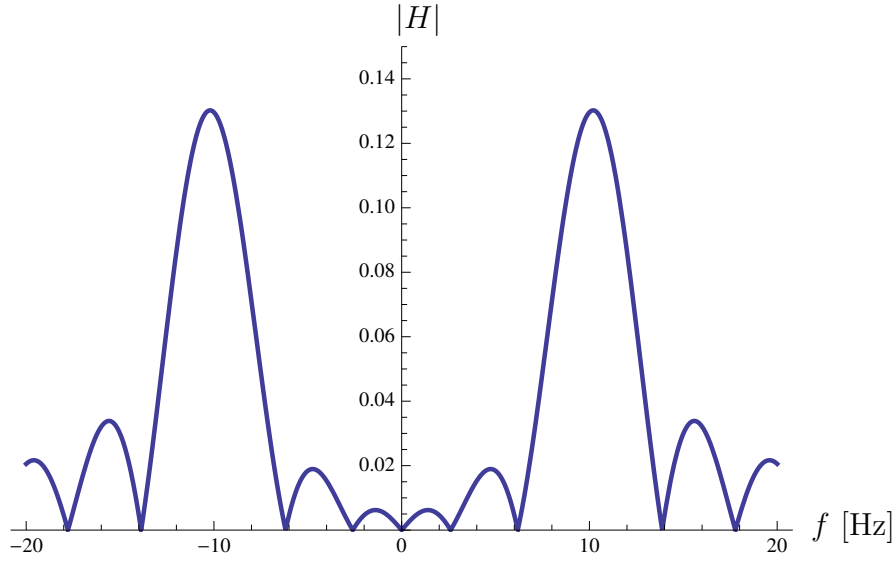


FIGURE 12 – La transformée de Fourier $r_{0.8/2/\pi}(t) \cdot \sin(2\pi 10t)$ est la convolution entre les Diracs du sinus et les sinus cardinaux de la transformée du signal rectangulaire. Les sinus cardinaux sont donc additionnés aux emplacements des Diracs, c.-à-d. en -10 et 10 . Le graphique représente le module de la transformée de Fourier. Les lobes sont plus prononcés que dans le cas du prétraitement par la gaussienne.

2.3 Échantillonneur parfait

Un échantillonneur parfait, à période d'échantillonnage h , produit à partir d'un signal continu $\{u(t)\}$ un signal $\{y(t)\}$ de la variable continue t mais dont l'énergie est concentrée dans des points discrets de l'axe temporel. En d'autres termes, des quanta d'énergie sont contenus à des instants discrets. Chaque quantum d'énergie est proportionnel à la valeur du signal $\{u(t)\}$ à l'instant d'échantillonnage $t = kh$. Le quantum d'énergie est donné par une impulsion de Dirac $\delta(t - kh)$.

Définition 2.1. (ECHANTILLONNEUR PARFAIT) *Un échantillonneur prend un signal d'entrée $\{u(t)\}$ et produit un signal de sortie $\{y(t)\}$ donné par*

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(kh) \delta(t - kh)$$

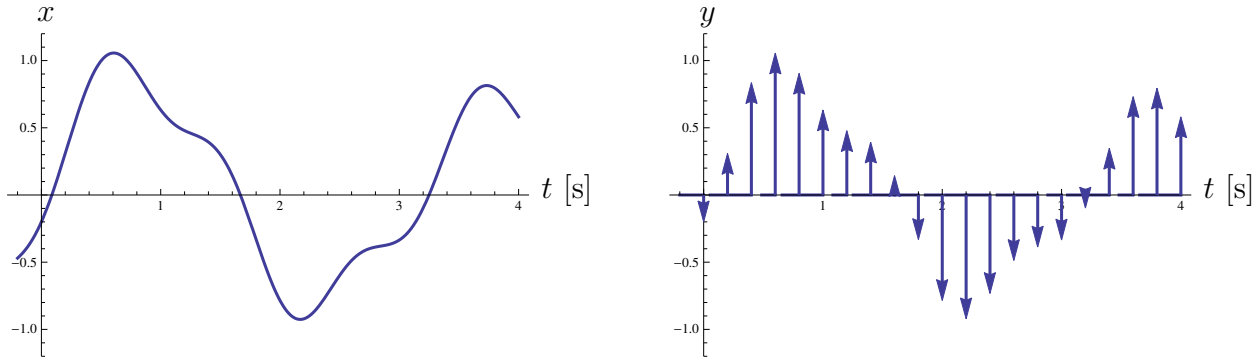


FIGURE 13 – Un échantillonneur parfait constitue un signal ayant une succession d'impulsions de Dirac dont le poids correspond à la valeur du signal échantillonné à l'instant d'échantillonnage correspondant.

Remarque : il ne faut pas confondre la suite des échantillons donné par l'ensemble

$$\{u(kh) | k \in \mathbb{Z}\} \tag{5}$$

du signal $\{y(t)\}$ donné ci-dessus et qui comporte des impulsions de Dirac.

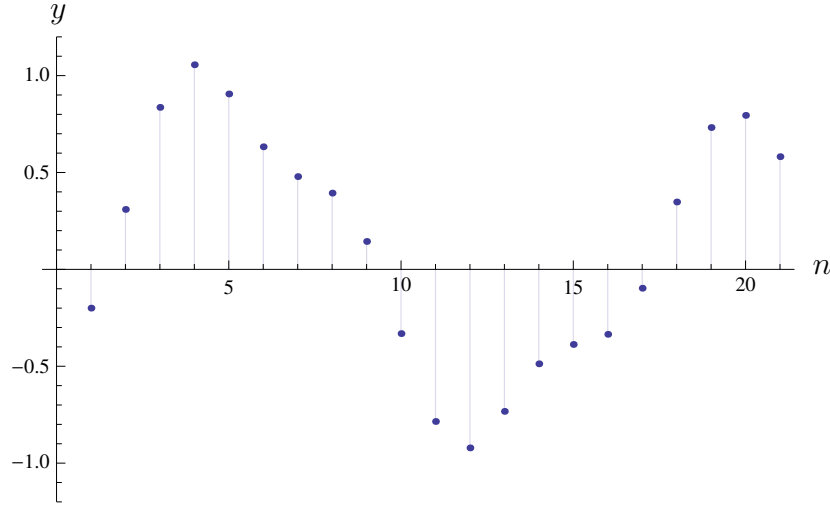


FIGURE 14 – Les échantillons ne forment qu’un ensemble discrets de valeurs et, contrairement à une série de Dirac équiseparée et pondérée par les échantillons, ne véhiculent pas d’énergie.

REMARQUE : Le signal $\{y(t)\}$ appartient aux signaux à énergie non nul bien que $y(t)$ soit localement confiné sur un point de l’axe temporel. L’impulsion de Dirac $\delta(t)$ a une énergie unité car

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Par contre, la suite des échantillons (5) ne possède par d’énergie et n’en véhicule pas.

2.4 Signal à bande limitée

Définition 2.2. (SIGNAL À BANDE LIMITÉE) *Une bande de fréquence $[B_1, B_2]$ ou un ensemble de fréquences f telles que*

$$B_1 \leq f \leq B_2$$

est donnée. Un signal $\{x(t)\}$ est dit être à bande limitée dans $[B_1; B_2]$ si sa transformée de Fourier est nulle lorsque $f \notin [B_1; B_2]$.

2.5 Théorème d’échantillonnage

Théorème 2.2. (DE L’ÉCHANTILLONNAGE) *Si un signal $\{x(t)\}$ est à bande limitée $[-B; B]$, il peut être reconstruit sans erreur à partir de ses échantillons $x(t_n)$ aux instants $t_n = \frac{n}{2B}$.*

Démonstration :

Comme $X(f) = 0, \forall f, |f| > B$, nous pouvons développer cette fonction en série de Fourier (en fréquence) exactement comme pour un signal limité dans le temps :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{x}_n e^{-j2\pi \frac{n}{2B} f}$$

où \bar{x}_n est donné par

$$\bar{x}_n = \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} X(f) e^{j2\pi \frac{n}{2B} f} df \quad (6)$$

(Série de Fourier en fréquence). Comme $X(f) = 0, \forall |f| > B$,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-B}^{+B} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

par la définition de la transformée de Fourier, et donc, comme $t_n = \frac{n}{2B}$, nous avons

$$x(t_n) = \int_{-B}^{+B} X(f) e^{j2\pi f \frac{n}{2B}} df$$

et en comparant avec (6), on a

$$\bar{x}_n = \frac{1}{2B} x(t_n)$$

et le théorème d'échantillonnage est ainsi démontré. En effet, connaissant $x(t_n)$ nous avons

$$\bar{x}_n = \frac{1}{2B} x(t_n)$$

et donc $X(f)$ à partir de (6). Après une transformée de Fourier, on reconstruit sans erreur $x(t)$.
CQFD.

2.6 Formule de reconstruction

Soit la transformée inverse

$$x(t) = \int_{-B}^{+B} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

En utilisant (6) dans la formule précédente, on arrive à

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x(t_n) \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} e^{j2\pi f (t - \frac{n}{2B})} df \right) df$$

L'intégrale est la TF de $r_{2B}(f)$ (signal rectangulaire de largeur $2B$ en fréquence) dont la transformée de Fourier inverse (TFI) est $\text{sinc}(2B) = \frac{\sin(\pi 2B)}{\pi 2B}$ ce qui donne

Définition 2.3. (FORMULE DE RECONSTRUCTION)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n) \text{sinc}(2B(t - t_n))$$

EXPLICATIONS : La connaissance des échantillons $x(t_n)$ permet de reconstruire sans erreur le signal initial $\{x(t)\}$ à condition que ce dernier soit à bande limitée. La formule de reconstruction donne exactement la manière de le reconstruire. Un désavantage pratique cependant est la présence d'un nombre infini d'échantillons dans le passé et le futur avec une infinité de contributions à prendre en compte conformément à la formule de reconstruction.

2.7 Transformée en Z

Définition 2.4. (TRANSFORMÉE BILATÉRALE EN Z) Soit une suite d'échantillons $\{h(k)|k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

est appelée la transformée bilatérale en z de la suite $\{h(k)|k \in \mathbb{Z}\}$.

Il en existe pour les signaux discrets qui sont nuls pour $k < 0$. Elle est appelée la transformée en z unilatérale. Elle est utilisée en réglage automatique.

Définition 2.5. (LA TRANSFORMÉE UNILATÉRALE EN Z) Soit une suite d'échantillons $\{h(k)|k \in \mathbb{N}\}$. La fonction

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

est appelée la transformée unilatérale en z de la suite $\{h(k)|k \in \mathbb{Z}\}$.

On remarque une similitude avec la transformée de Laplace unilatérale d'un signal.

2.8 Transformée de Fourier et transformée de Laplace

La transformée de Fourier est obtenue en évaluant la transformée de Laplace bilatérale sur l'axe imaginaire.

Soit $G(s)$ la transformée de Laplace de $g(t)$ et $\hat{G}(f)$ la transformée de Laplace.

Théorème 2.3. *Si le domaine de convergence de l'intégrale de Laplace (valeur de s pour laquelle l'intégrale de la transformée de Laplace converge) contient l'axe imaginaire $s = 2\pi jf$, alors la transformée de Fourier est en relation de celle de Laplace par la relation*

$$\hat{G}(f) = G(2\pi jf)$$

La démonstration est technique à cause des notions de convergence, mais le résultat intuitivement évident (car il s'agit de la même intégrale).

2.9 Transformée de Fourier discrète

Soit le quantum de fréquence (résolution fréquentielle)

$$\nu = \Delta f = \frac{1}{N h}$$

où h est la période d'échantillonnage.

Définition 2.6. *La transformée de Fourier discrète d'une suite d'échantillons $\{x(k)|k \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par la série*

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \frac{n}{N} kh} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} \end{aligned} \quad (7)$$

Pour une suite d'échantillons, on a la définition suivante.

Définition 2.7. (TFD, TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE) *La transformée de Fourier discrète de l'ensemble fini d'échantillons $\{x(k)|k = 0, 1, \dots, N-1\}$ est définie par la collection finie d'échantillons*

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} \quad n = 0, \dots, N-1$$

Définition 2.8. (TFDI, TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE INVERSE)

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x(n) e^{+j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Remarque : Comme le spectre est périodique, suite à la discrétisation, on retrouve à intervalle régulier la partie négative du spectre. Il est donc également possible de changer les indices de la somme pour tirer avantage de cette propriété.

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{+j2\pi \frac{nk}{N}}$$

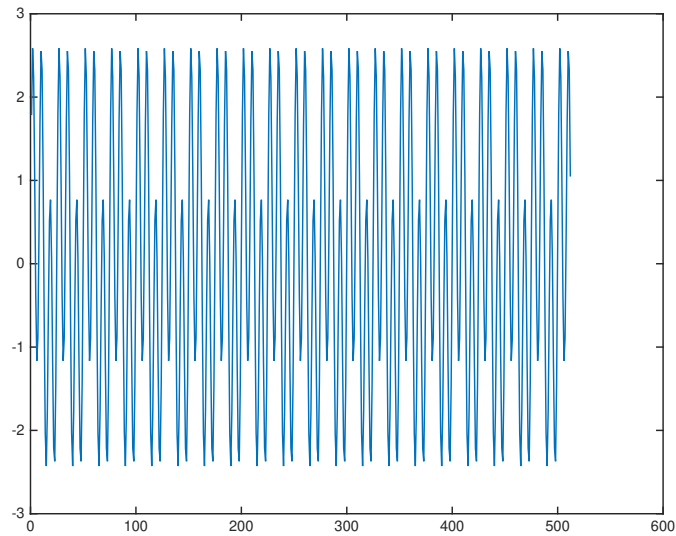


FIGURE 15 – Signal dans le domaine temporel.

3 Expériences numériques avec des séries de Fourier

```
>> h = 0.01;
>> N = 512;
>> freq = 4;
>> signal = sin((1:N)*h*2*pi*freq) + 0.2* cos(2*(1:N)*h*2*pi*freq)+...
    2*sin(3*(1:N)*h*2*pi*freq);
>> ffsignal = fft(signal);
>> plot(abs(ffsignal))
>> figure(2)
>> plot(signal)
```

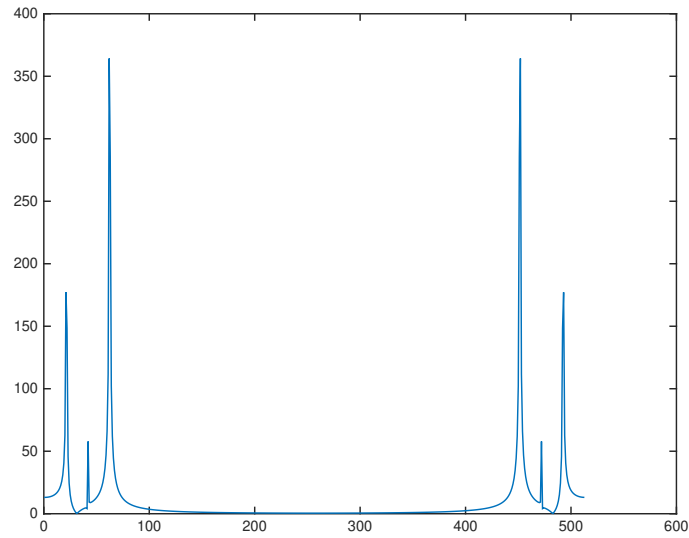


FIGURE 16 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal

```
>> plot(abs(fft(signal.*blackman(N)')))
```

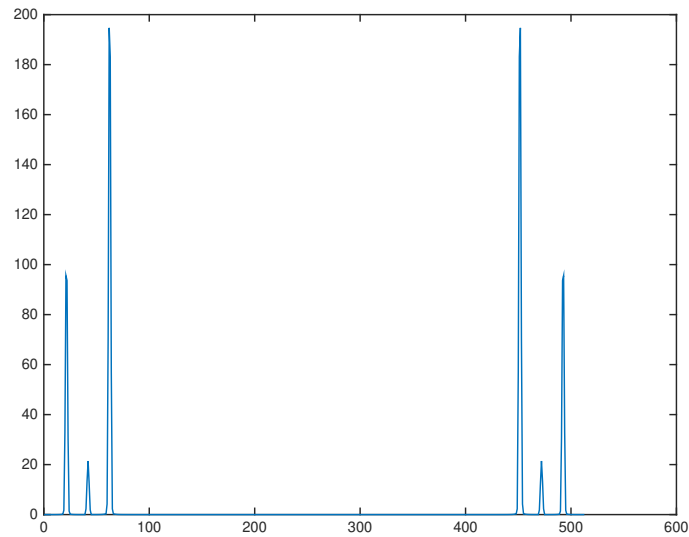


FIGURE 17 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal après prémultiplication temporelle par la fenêtre de Blackman.

```
>> plot(abs(fft(signal.*hann(N)')))
```

```
>> plot(abs(fft(signal.*hamming(N)')))
```

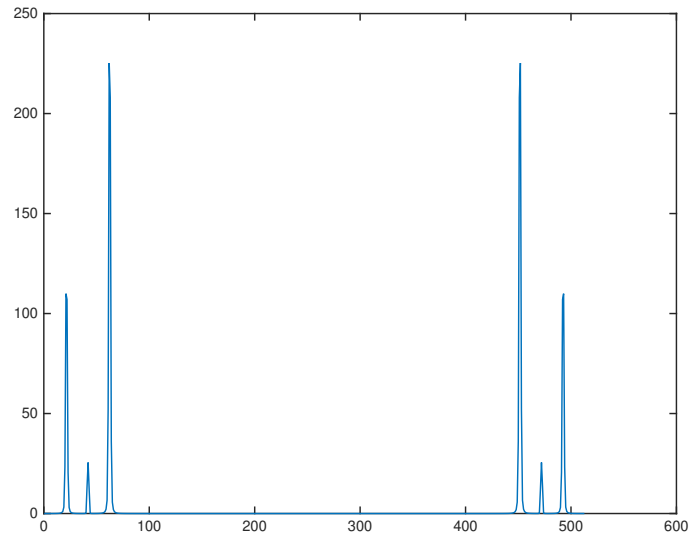


FIGURE 18 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal après prémultiplication temporelle par la fenêtre de Hann.

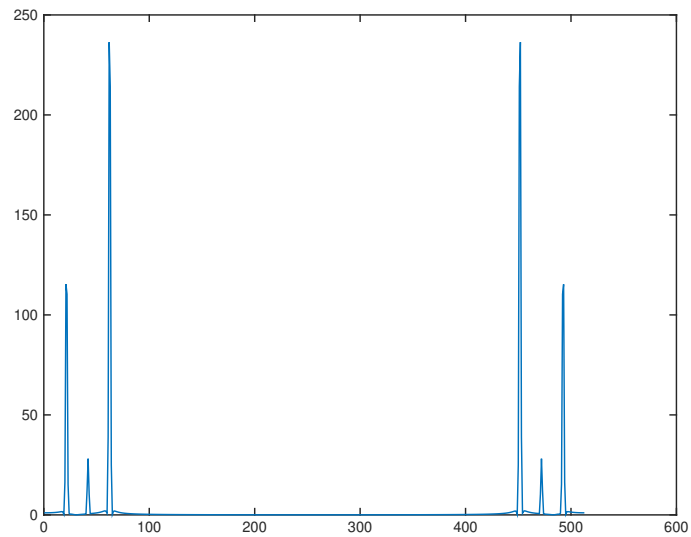


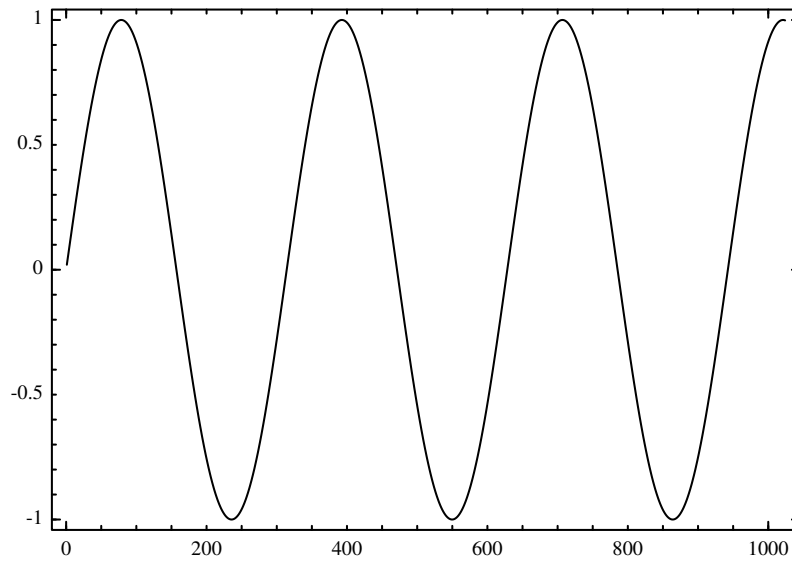
FIGURE 19 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal après prémultiplication temporelle par la fenêtre de Hamming.

4 Expériences numériques avec un sinus échantillonné

Soit la commande MATLAB/SysQuake

```
sig = sin(0.02*(1:1024));  
plot(sig)
```

qui consiste à échantillonner un sinus sur 1024 échantillons. La fréquence de ce sinus dépend de la période d'échantillonnage.



Nous supposons que la fréquence d'échantillonnage est

$$h = 0.01 \quad [\text{s}]$$

Soit \bar{t} la durée complète des échantillons.

$$\bar{t} = 1024 \cdot 0.01 = 10.24 \quad [\text{s}]$$

La fréquence du sinus contenu dans le signal échantillonné que nous venons de construire est ainsi déterminé par la relation

$$\sin(2\pi f \bar{t}) = \sin(0.02 \cdot 1024)$$

ce qui donne

$$f = \frac{0.02 \cdot 1024}{2\pi \bar{t}} = \frac{0.02 \cdot 1024}{2\pi \cdot 10.24} = 0.3183 \quad [\text{Hz}]$$

4.1 Résolution spectrale (quantum fréquentiel)

4.1.1 Fréquence maximale détectable

La fréquence d'échantillonnage est

$$f_e = \frac{1}{h} = \frac{1}{0.01} = 100 \quad [\text{Hz}]$$

et elle induit que (par le théorème de l'échantillonnage cf. théorie) la fréquence maximale détectable (si on part de 0 [Hz]) est de

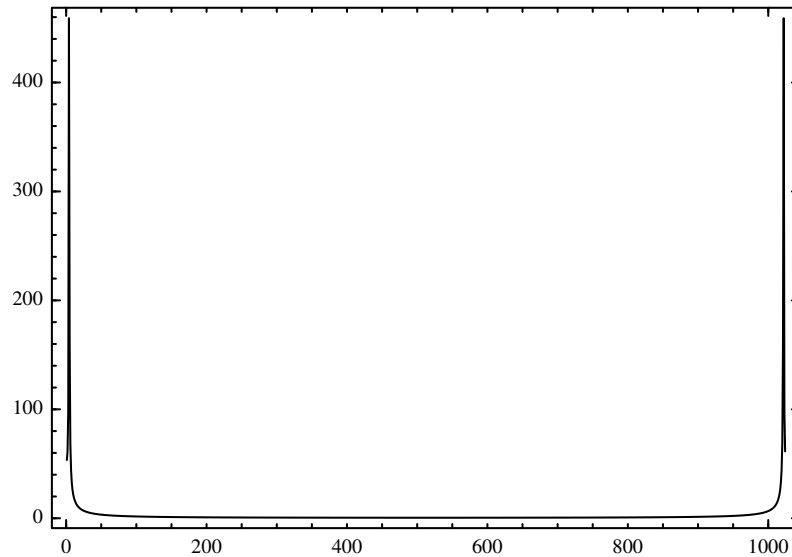
$$\frac{f_e}{2} = 50 \quad [\text{Hz}]$$

4.1.2 Module du spectre discret

En dessinant le module du spectre discret (module de la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné généré) avec la commande

```
plot(abs(fft(sig)))
```

on constate que celui-ci comporte une partie symétrique à partir du milieu du graphique. Ceci est dû au repliement fréquentiel et la conséquence est la limitation à la moitié de toutes les fréquences disponibles (i.e. en absence du repliement on aurait 100 [Hz]) à la moitié de la fréquence théorique maximale qui est la fréquence d'échantillonnage.



Ceci conduit ainsi à la résolution spectrale ou "quantum de fréquence" qui est

$$\Delta\nu = \frac{1}{h N} = \Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{100}{1024} = 0.09766 \quad [\text{Hz}]$$

4.2 Maximum du module des coefficients de la TFD

Déterminons le maximum du module des coefficients de la transformée de Fourier discrète (TFD). En utilisant la commande `fft` calcule la série (la somme)

$$F(n\nu) = F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kh) e^{-2\pi \frac{kn}{N} j}$$

conformément à la théorie. En d'autres termes, la correspondance entre `ffta(n-1)` et `sum(sig.*reg)` est obtenue et donc l'annulation de la différence de ces quantités suite aux instructions suivantes :

```
ffta = fft(sig);  
reg = exp(-2*pi*i*(0:N-1)/N*n);  
ffta(n-1) - sum(sig.*reg)
```

quel que soit n

Déterminons n qui donne le module maximum

Il faut détecter la maximum du module de la TFD. Ceci est facile avec la commande `max` :

```
[ma,id] = max(abs(fft(sig)))
```

et `n` sera donné par `id - 1`.

Pour $N=1024$ on trouve `id = 4` et donc $n=3$.

Fréquence estimée

La fréquence estimée \hat{f} est donnée par

$$\hat{f} = \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{h} = \frac{3}{1024} \cdot \frac{1}{0.01} = 0.293 \quad [\text{Hz}]$$

Vérifions que cette estimée est bien dans l'intervalle déterminée par l'incertitude fréquentielle (moyennant la résolution spectrale déterminée ci-dessus) :

$$f \in [0.293 - \Delta f; 0.293 + \Delta f]$$

$$f \in [0.293 - 0.098; 0.293 + 0.098]$$

$$f \in [0.195; 0.391]$$

REMARQUE : Avec cette résolution spectrale la précision n'est pas très grande. On constate que la vraie fréquence $f = 0.318$ st bien dans l'intervalle obtenu même si l'estimée $\hat{f} = 0.293$ n'est pas d'une grande précision.

4.3 Battements et repliement spectral

Un phénomène bien connu est celui du battement. C'est le constat de l'apparition d'une modulation en basse fréquence lorsque deux signaux sinusoïdaux ont des fréquences très proches l'une de l'autre. L'expérience numérique suivante consiste à comparer le modulation réelle basse fréquence de deux sinus par rapport à deux sinus de fréquences élevée mais proches l'une de l'autre.

```
time = linspace(0,20,3000);  
signal = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*42*time);
```

et

```
signal2 = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*2*time);
```

On constate que les deux signaux sont difficilement reconnaissables en examinant le comportement temporel de ceux-ci (cf. figure 20).

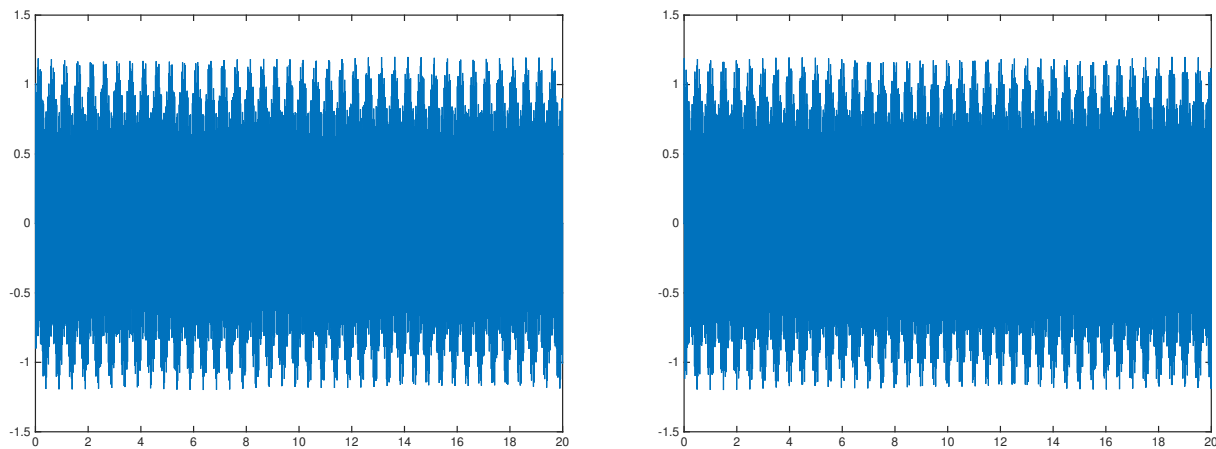


FIGURE 20 – A gauche, l'addition d'une basse fréquence et d'une haute et à droite le phénomène de battement correspondant à l'addition de deux signaux de fréquence proches. Les deux signaux paraissent identiques dans le domaine temporel.

Par contre, en dessinant les spectres de ces signaux à l'aide des commandes

```
plot(abs(fft(signal.*blackman(length(signal))))))
```

et

```
plot(abs(fft(signal2.*blackman(length(signal2))))))
```

l'emplacement fréquentiel du signal sinusoïdal faible est facilement détectable (cf. figure 21). On remarque également qu'en absence de fenêtrage,

```
plot(abs(fft(signal)))
```

il y a plus "d'étalement" des fréquences autour des fréquences caractéristiques (moins bonne résolution spectrale).

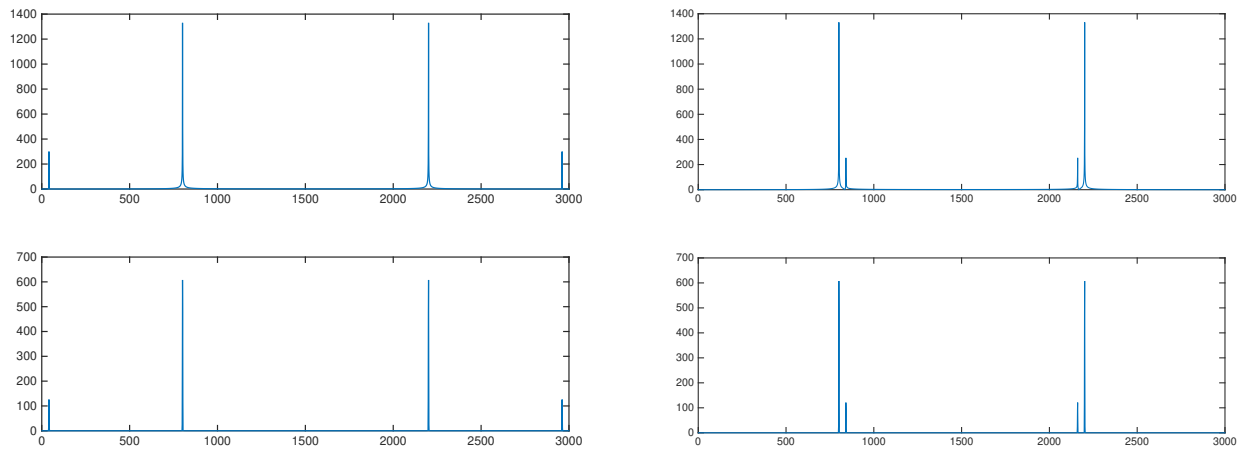


FIGURE 21 – L'analyse fréquentielle permet de rapidement faire la distinction entre un sinus modulé en basse fréquence (à gauche) et le phénomène de battement (à droite). Les figures du haut sont obtenues en absence de fenêtrage.

5 Un paradoxe ?... non, c'est l'étalement spectral

Le lecteur attentif constatera une sorte de contradiction avec la théorie du fenêtrage. Cette théorie indique que le pic fréquentiel associé avec la fenêtre est le moins large lorsque la fenêtre est rectangulaire. A titre illustratif, on a représenté le logarithme du module de trois fenêtres, celle rectangulaire (le pic le plus étroit, mais pics secondaire mal amorti), celle de Hamming et celle de Blackman à la figure 22.

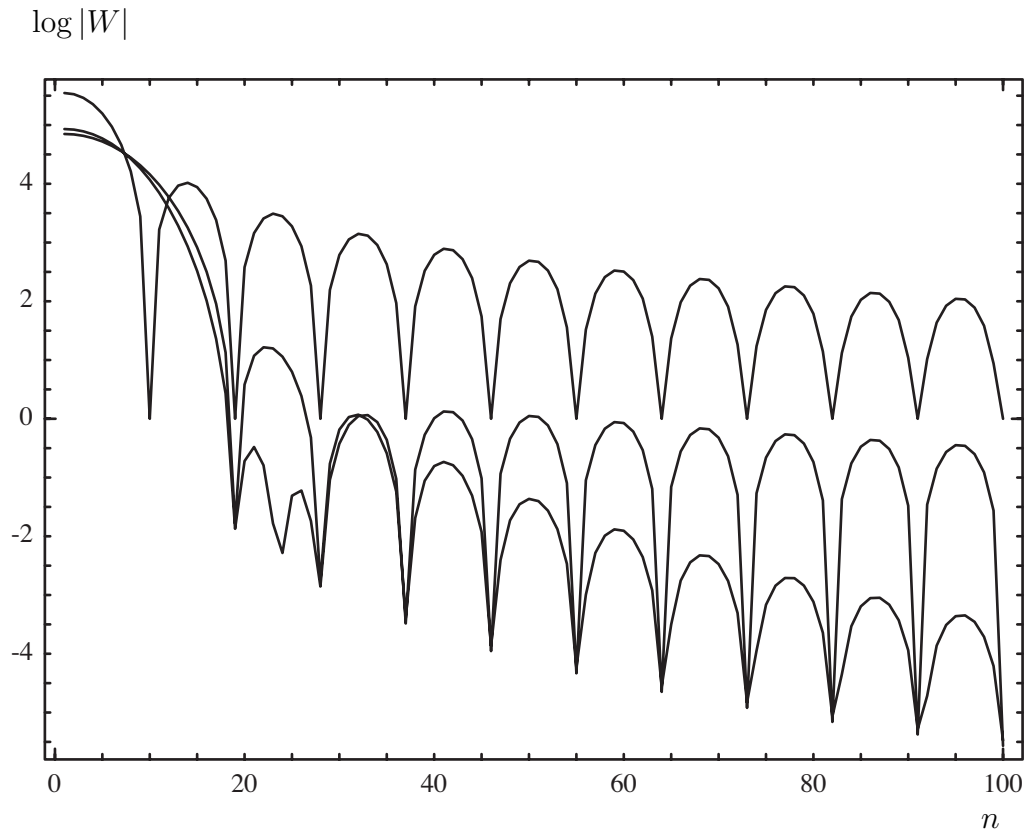


FIGURE 22 – $\log |W(n)|$, autrement dit le logarithme du module de la transformée de Fourier discrète de trois fenêtres $\{w(n)\}$. Le pic principal de la fenêtre rectangulaire est le plus étroit parmi toutes les fenêtres possibles. La fenêtre de Hamming et celle de Blackmann donnent un pic principal plus large, mais les pics secondaires sont mieux amortis.

Ainsi, on aurait du obtenir un pic plus fin en absence du fenêtrage de Blackman. En d'autres termes, les pics obtenus à la figure 16 devraient être plus fins que ceux de la figure 17. Or il n'en est rien. D'où provient ce paradoxe ?

La réponse réside dans la compréhension de ce que calcule réellement la transformée de Fourier

discrète. Ce n'est pas le signal échantillonné et limité à seulement N échantillons qui est le signal sur lequel s'opère l'interprétation fréquentielle obtenue par la transformée de Fourier discrète, mais le signal périodisé qui comporte une infinité d'échantillons.

Or le signal initial que l'on a généré ne correspond pas en durée à un multiple de sa période fondamentale, de telle sorte que son périodisé (signal périodique obtenu en répliquant le signal à l'identique par concaténation de celui-ci) comporte une transition violente au point de périodisation. Cette transition ajoute des fréquences élevées dans la série de Fourier du signal continu périodisé associé au signal périodisé discret. Toutes ces fréquences sont bien au delà de la fréquence d'échantillonnage et se replient donc en basse fréquence contribuant à élargir les pics associés aux trois harmoniques fondamentales.

On comprend alors le paradoxe et la raison pour laquelle le fenêtrage améliore l'estimation en rétrécissant la largeur des pics associés aux trois harmoniques. Le fenêtrage diminue l'amplitude des échantillons aux deux bords de la suite finie de ceux-ci. Le signal discret périodisé ne comporte plus de transition violente. En conséquence, les hautes fréquences issues de ces transitions aux points de périodisation contaminent peu, par repli fréquentiel, les trois harmoniques. Les pics sont moins larges qu'en absence de fenêtrage (ou fenêtrage rectangulaire implicite).

Illustrons ceci avec une expérience numérique similaire à la précédente mais en prenant soin de garantir un signal parfaitement périodique lors de la périodisation du signal initial.

```
T = 20;
N = 512;
h = T/N;
nn = (0:N-1);
sig = sin(2*pi*nn) + 0.2*sin(2*pi*nn) + 3*sin(2*pi*nn);

figure(1)
plot(abs(fft(sig)));

figure(2)
plot(abs(fft(sig.*blackman(N)')));
```

Dans le cas sans fenêtrage, on obtient la représentation fréquentielle de la figure 23

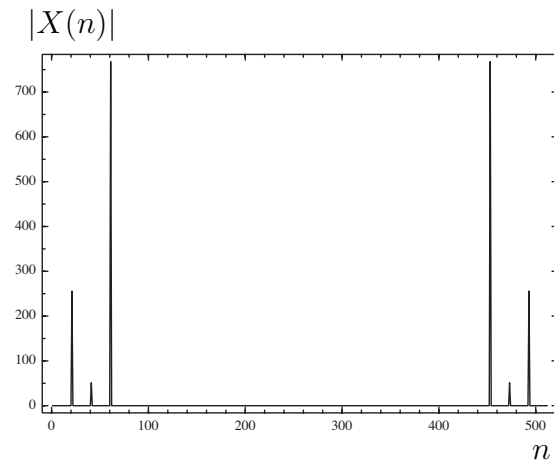


FIGURE 23 – Avec un signal dont le périodisé est continu, les pics sont les plus étroits en absence de fenêtrage (fenêtrage rectangulaire de largeur égale au nombre d'échantillons).

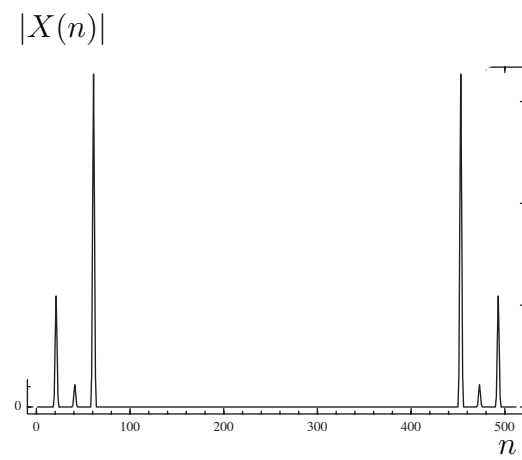


FIGURE 24 – Fenêtrage de hamming du signal associé à la figure 23.

6 Interpolation et suréchantillonnage

En introduisant des zéros aux bons endroits ("zero padding"), on peut augmenter le nombre d'échantillons artificiellement (au sens de ne pas introduire plus d'information que le nombre d'échantillons initial). C'est parfois nécessaire pour ajuster la taille des blocks ou pour "deviner" la valeur entre les échantillons.

On présente deux techniques. La première consiste à agrandir le domaine de Fourier et d'introduire des zéros en haute fréquence. Ceci ne change pas la décomposition en composante fréquentielles initiales mais permet d'augmenter la période d'échantillonnage artificiellement. La conséquence est l'interpolation entre deux échantillons.

La seconde consiste à augmenter le nombre de "périodes" du signal initial en copiant plusieurs fois l'ensemble des échantillons. On double ainsi le nombre de points. La conséquence est la présence de zéros entre deux échantillons de la transformée de Fourier.

Le contenu fréquentiel est dans les deux cas rigoureusement identique. La présence de zéros soit à la fin d'un block ou entre les coefficients de la décomposition de Fourier distinguent les deux cas.

6.1 "Zero padding" à la fin de la TFD

L'application est l'interpolation entre les échantillons initiaux. Bien que l'on modifie le signal initial, il ne faut pas se baser sur les valeurs entre les échantillons pour augmenter la résolution temporelle ou fréquentielle. Elle demeure la même puisqu'elle dépend que du nombre d'échantillons et de la période d'échantillonnage.

Prenons un signal composé de trois harmoniques

$$x(t) = \sin(2\pi t) + 0.25 \cos(2\pi 3t) + 0.12 \cos(2\pi 4t)$$

En effectuant un échantillonnage de $N = 32$ échantillons sur une durée de 1 [s], on obtient le signal discret représenté à la figure 25.

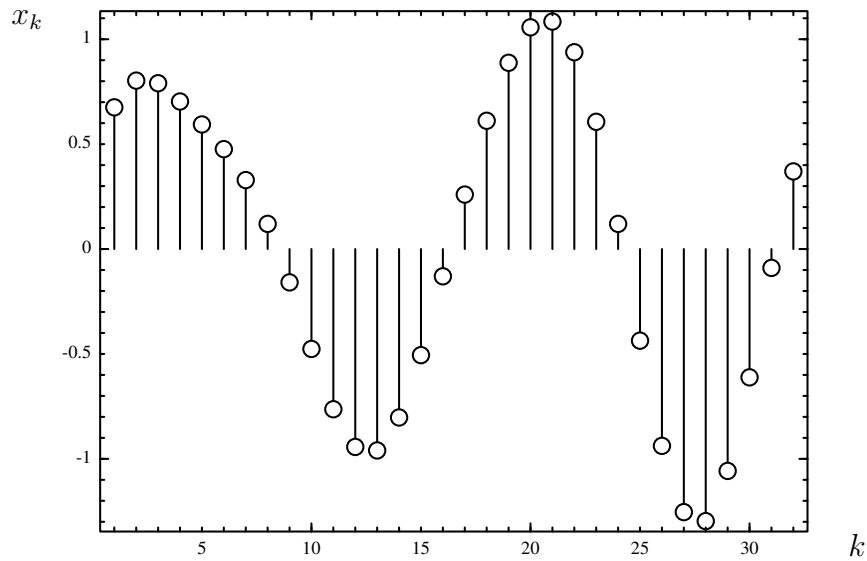


FIGURE 25 – Un signal composé de trois harmoniques est échantillonné de telle sorte à avoir $N = 32$ échantillons.

Si on prend un échantillonnage plus fin, $N_2 = 64$, le résultat est donné à la figure 26.

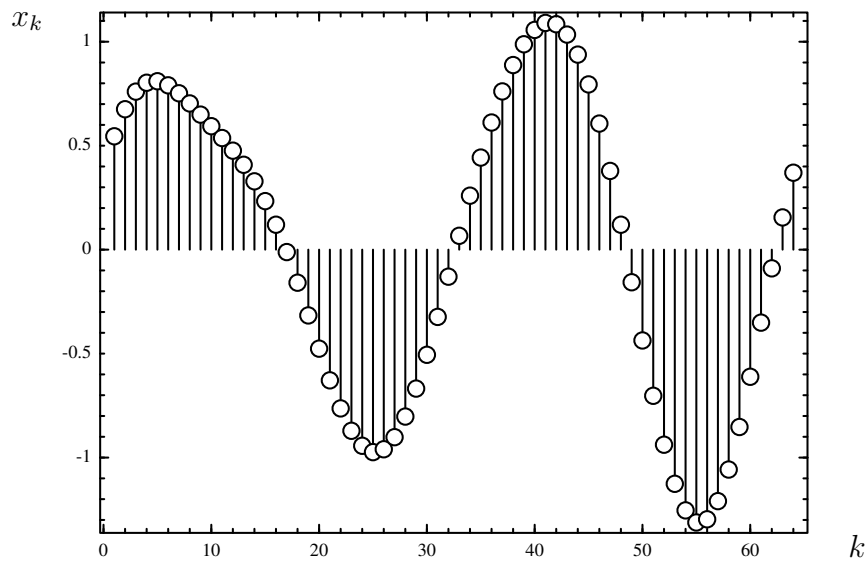


FIGURE 26 – Un signal composé de trois harmoniques est échantillonné de telle sorte à avoir $N = 64$ échantillons.

Pour interpoler à partir du signal échantillonné avec 32 échantillons pour doubler le nombre d'échantillons et arriver à 64, on introduit des zéros dans les hautes fréquences de la transformée de Fourier discrète et on double les coefficients associé aux basse fréquence.

La raison du doublement provient du facteur $\frac{1}{N}$ dans la transformée de Fourier inverse. Dans le premier cas c'est $1/32$ et après doublement c'est $1/64$. La composante continue est donnée par le coefficient $X(0)$ dans les deux cas. Ainsi pour ne pas perdre d'amplitude, il faut ajuster les coefficients par un facteur $2 = \frac{64}{32}$.

Lorsque le nombre d'échantillons est impairs, il n'y a pas de complication, car disons la composante complexe $X(n)$ des phaseurs des fréquences positives et négatives sont exactement complexe conjugués des composantes des phaseurs de fréquence négative. Seule la composante constante qui est en position $n = 0$ et est réelle.

Lorsque le nombre d'échantillons est paire, il y a deux composantes purement réelle, celle $X(0)$ (donnant la composante continue, constante), et $X\left(\frac{N}{2} + 1\right)$. Il faut poser

$$X\left(\frac{N_2}{2} + 1\right) = X\left(\frac{N}{2} + 1\right)$$

Ensuite les coefficients des phaseurs de fréquence positive s'associe un à un avec les coefficients des phaseurs de fréquence négative respective, comme dans le cas d'un nombre d'échantillons impair. Cela conduit à la procédure

```
% zero padding a la fin de la transformee de Fourier.
```

```
N = 32;
```

```
xk = sin(2*pi*2*(1:N)/N) + 0.25*cos(2*pi*3*(1:N)/N) + 0.12*cos(2*pi*4*(1:N)/N);
```

```
plot(xk,Stems=true);
```

```
N2 = 64;
```

```
xk2 = sin(2*pi*2*(1:N2)/N2) + 0.25*cos(2*pi*3*(1:N2)/N2) + 0.12*cos(2*pi*4*(1:N2)/N2);
```

```
figure
```

```
plot(xk2,Stems=true);
```

```
fxk = fft(xk);
```

```
% construisons l'interpolation dans le cas N pair
```

```
% le phaseur du milieu, phaseur reel doit rester au milieu
```

```
fxk64 = zeros(1,N2);
```

```

fxk64(1:N/2) = fxk(1:N/2); %debut
fxk64(N/2+1) = fxk(N/2+1); %milieu
fxk64(N/2-(N/2-2):end) = fxk(N/2+2:end); %fin
% il faut egalement mettre a l'echelle les energies, ici le factoru N2/N
xkinter = real(ifft(N2/N*fxk64));

figure
plot(xkinter, Stems=true);

```

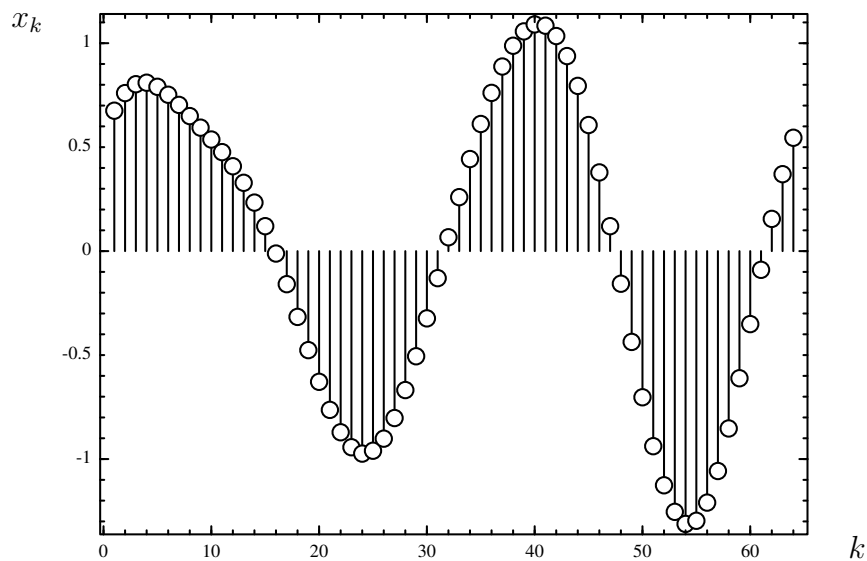


FIGURE 27 – L’interpolation avec 64 échantillons à partir du signal de 32 échantillons.

La figure (27), bien que similaire, n’est pas identique à la figure (26). L’interpolation ”ne devinne” pas exactement les vraies valeurs, mais elle ”fait au mieux”.

Reprenons la procédure avec peu d’échantillons juste pour mieux comprendre la technique.

Prenons $N = 6$, et

```

xk = 1:6;
fxk = fft(xk)

```

donne

21.00, $-3.0 + 5.1962j$, $-3.0 + 1.7321j$, -3.0 , $-3.0 - 1.7321j$, $-3.0 - 5.1962j$

On remarque bien deux valeurs réelles et 4 valeurs complexes qui sont complexes conjuguées les unes des autres par paire. Pour avoir une interpolation entre les échantillons afin de doubler et avoir 12 échantillons à l'arrivée, on effectue les commandes suivantes :

```
fxk2 = zeros(1,12);
fxk2(7) = fxk(4);
fxk2(1:3) = fxk(1:3);
fxk2(11:12) = fxk(5:6);
xkinter = ifft(2*fxk2);
```

Le signal résultant de l'interpolation est bien réel

```
1.0    1.2679    1.0    3.2679    3.00    4.0    3.0    4.7321    5.0
    6.7321    5.0    4.0
```

mais il ne correspond pas à ce que l'on pourrait s'attendre 1 à 6 de manière progressive par pas de 0.5. Cet artefact est à nouveau la manifestation de l'étalement spectral dû au brusque changement lors de la périodisation du signal initial. On constate que le nouveau signal ne passe pas nécessairement par les points initiaux, ni ne devienne la valeur (moyenne des échantillons successifs initiaux) entre les échantillons initiaux ! Il faut donc utiliser cette technique avec précaution !

6.2 "Zero padding" entre les échantillons de la TFD

Une application est le doublement du nombre d'échantillons sans changer le contenu temporel. On rend ainsi possible une utilisation d'une transformée ayant des blocks plus grands sans changer la nature du signal initial.

L'idée est d'introduire un zéro entre chaque coefficient de la transformée de Fourier discrète.

Un exemple avec peu d'échantillons illustre le concept :

```
xk = 1:6
fxk = fft(xk)
fxk2 = zeros(1,12);
for i=1:6
    fxk2(i*2-1)=fxk(i);
end;
xk2 = real(ifft(2*fxk2));
```

et on obtient la répétition du signal initial.

1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000	6.0000
1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000	6.0000

7 Annexe : fichier experiences.m

```
% creation d un signal de trois frequences harmoniques
```

```
N = 512;
```

```
h = 0.01;
```

```
freq = 4;
```

```
signal = sin((1:N)*h*2*pi*freq) + 0.2* cos(2*(1:N)*h*2*pi*freq)+ 2*sin(3*(1:N)*h*2*pi*freq);
```

```
% calcul de la Transformee de Fourier Discrete (TFD)
```

```
ffsignal = fft(signal);
```

```
figure(1)
```

```
plot(signal)
```

```
title('signal dans le temps')
```

```
xlabel('echantillon');
```

```
ylabel('f(i)');
```

```
% representation graphique sans fenetrage
```

```
figure(2)
```

```
plot(abs(ffsignal));
```

```
title('Module de la TFD');
```

```
xlabel('echantillon');
```

```
ylabel('abs(F)');
```

```
% fenetrage de Blackman
```

```
figure(3)
```

```
blackffsignal = fft(signal.*blackman(N)');
```

```

plot(abs(blackffsignal));
title('Module de la TFD apres fenetrage de Blackman');
xlabel('echantillon');
ylabel('abs(F)');

```

```

% examen de la phase
figure(4)
plot(unwrap(angle(fft(signal.*blackman(N)'))));
title('Phase de la TFD apres fenetrage de Blackman');
xlabel('echantillon');
ylabel('arg(F)');

```

```

% un peu de filtrage
[num,den]=butter(3,0.5);
signalOut = filter(num,den,signal);
figure(5);
subplot(211);
plot(signal);
subplot(212);
plot(signalOut);

```

```

% un peu de filtrage
[num,den]=butter(3,0.5);
signalOut = filter(num,den,signal);
figure(5);
subplot(211);
plot(signal);
subplot(212);
plot(signalOut);

```

```

%% Fonction de Weierstrass, derivable nulle-part

```

```

NN = 800;
time = (1:NN)*0.5/NN;
series = zeros(1,NN);
b = 0.5;
a = 3;
for n=1:6;
series = series + b^n*cos(a^n*pi*time);
end;
figure(6);
plot(time,series);

%% train d'onde triangulaire
NN = 800;
time = (1:NN)*20/NN;
series = zeros(1,NN);
for n=1:40;
series = series + 2/n*sin(n*time);
end;
figure(7);
plot(time,series);

%% train d'onde carre
NN = 800;
time = (1:NN)*20/NN;
series = zeros(1,NN);
for n=1:40;
series = series + 2/(pi*n)*(1-(-1)^n)*sin(n*time);
end;
figure(8);
plot(time,series);

```

```

[tout,xout] = ode45('penduleSimple',[0,90],[2.8*pi/3,0.1]);
figure(9);
subplot(211);
plot(tout,xout);
fxout = fft(blackman(length(tout)).*xout(:,1));
subplot(212);
plot(abs(fxout(1:40)));

```

```

tout = 0:0.01:90;
xout = ode3('penduleSimple',tout,[2.9*pi/3;0.1]);
figure(10);
subplot(211);
plot(tout,xout);
fxout = fft(blackman(length(tout)).*xout(:,1));
subplot(212);
plot(abs(fxout(1:40)));

```

```

%%%%%%%%%
% deux sinus un dominant l'autre faible
time = linspace(0,20,3000);
signal = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*42*time);
figure(11)
plot(time,signal)

```

```

% difficile de le percevoir dans le diagramme sans fenetrage
figure(12)
subplot(211)
plot(abs(fft(signal))')
subplot(212)
plot(abs(fft(signal.*blackman(length(signal))'))');

```

%par contre, avec la fenetre de Blackman, cela s'ameliore quelque peu

```
signal2 = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*2*time);
```

```
figure(13)
```

```
plot(time,signal2)
```

```
figure(14)
```

```
subplot(211)
```

```
plot(abs(fft(signal2)))')
```

```
subplot(212)
```

```
plot(abs(fft(signal2.*blackman(length(signal2))))')
```

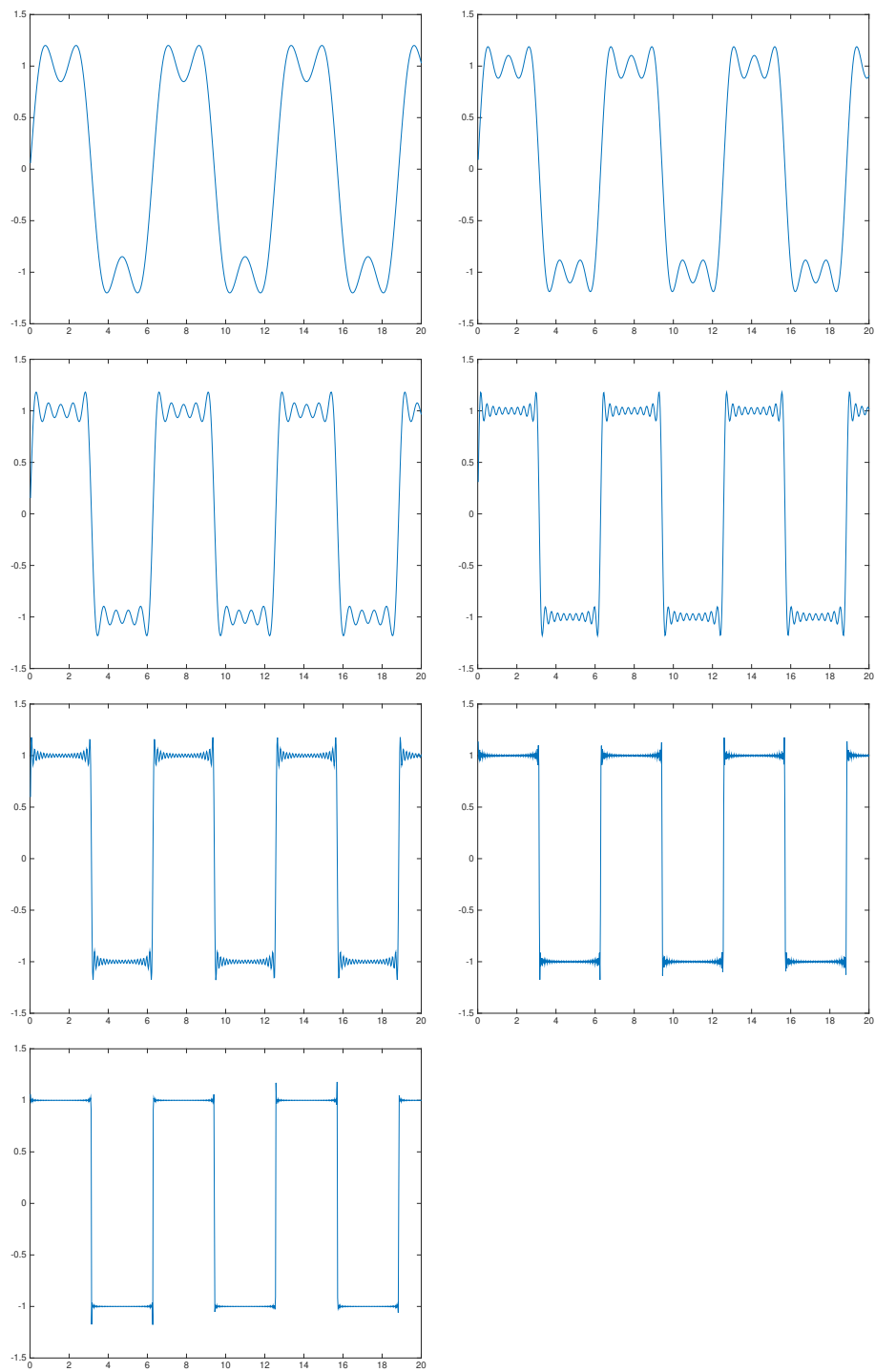


FIGURE 28 – Discontinuité et convergence de la série de Fourier associée. Le cas d'un train d'onde carré.

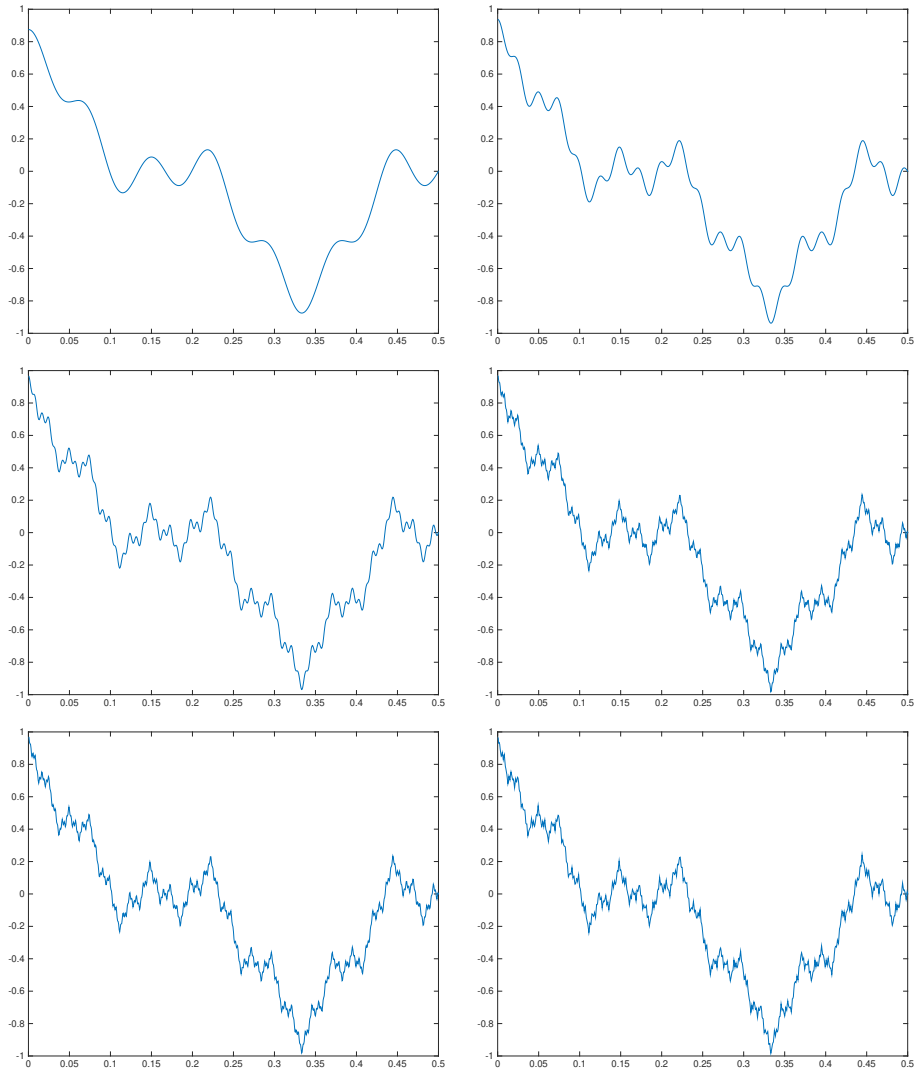


FIGURE 29 – Représentation de $\sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} \cos(3^n \pi t)$ pour $N = 3, 4, 5, 6, 7$. Bien qu'il s'agisse d'une somme de cosinus, plus le nombre N de termes est grand, plus grande paraît l'irrégularité.

Deuxième partie

Signaux aléatoires (signaux stochastiques)

Un signal aléatoire est un signal qui n'est pas déterminé par un ensemble fini de conditions initiales de manière prévisible. Un signal continu déterministe que nous avons présenté dans la première partie est gouverné, par exemple, par un ensemble d'équations différentielles et peut donc être prédit connaissant l'ensemble des conditions initiales sur un horizon court avec une grande détermination. De même, un signal discret décrit par des équations aux différences est prévisible sur un horizon court de manière prévisible avec une grande précision. Si les équations différentielles sont linéaires et bien conditionnées, l'horizon de prédiction avec une grande précision peut être très grand. Pour les systèmes non-linéaires déterministes, cet horizon peut être petit, mais il existe tout de même une prédiction avec grande précision sur cet intervalle de temps, raison pour laquelle le signal est déterministe.

Dans les signaux présentés ci-après, cet horizon de prédiction avec grande précision n'existe plus, et on ne peut plus décrire le signal avec des équations différentielles ordinaires et/ou avec des équations aux différences. Les conditions initiales sont insuffisantes pour prédire et caractériser le signal. Le signal est connu et prévisible que par l'entremise de statistiques et de lois de probabilité.

Un exemple simple est le signal produit par une série de lancé d'une pièce de monnaie pile ou face. Quoi que soit le passé du lancé de la pièce, il est impossible de prédire le lancé suivant avec exactitude. On ne peut que caractériser la probabilité d'obtenir pile ou face, qui est de 0.5 dans chaque cas si le lancé et la pièce ne sont pas truqués.

Pour caractériser l'aspect aléatoire, il est nécessaire d'introduire le concept d'espace probabilisé Ω , la distribution de probabilité p , et la fonction de répartition F .

Dans le cas d'un dé non pipé, l'espace probabilisé Ω est constitué d'un ensemble de six éléments (symboles). La distribution de probabilité est une fonction de Ω , constante et valant $1/6$ pour chacun des symboles. La fonction de distribution F est la somme cumulée jusqu'au symbole correspondant. Ceci nécessite un ordre sur les symboles qui est dans le cas du dé donné par l'ordre des entiers croissants de 1 à 6.

8 Variable aléatoire et processus stochastique

Dans cette section, on présente la variable aléatoire et ensuite une série de variables aléatoires ordonnées donnant lieu à un processus stochastique.

Pour commencer, il est important de donner plus de détails concernant l'espace probabilisé Ω et la distribution de probabilité p .

Un espace probabilisé Ω est un ensemble pour lequel on peut attribuer un "poids", une "masse", à un sous ensemble ω de Ω (noté $\omega \subset \Omega$). Cette "masse" est une mesure (au sens mathématique) et elle est proportionnelle à la "chance" d'obtenir l'évènement (au sens mathématique et usuel) caractérisé par le sous ensemble ω . La distribution de probabilité p est intégrée pour obtenir la probabilité de cet évènement :

$$p_\omega = \int_\omega p(x) dx$$

Les sous-ensembles de Ω ont des axiomes de telle sorte à former une algèbre. Des ensembles disjoints représentent des événements dont la probabilité d'observer l'un ou l'autre des événements est la somme des probabilités d'en observer un ou l'autre individuellement. Et il existe toute une série d'axiomes pour former une théorie des probabilités dont les sous-ensembles représentent un événement aléatoire possible. Nous donnons une définition un peu sommaire. Pour aller plus loin et être plus précis il faudrait donner une définition plus précise des sigma-algèbres et des axiomes de Kolmogorov.

Définition 8.1. *Un espace probabilisé est un espace Ω mesurable pour lequel il existe une fonction de distribution p (appelée probabilité) pour lequel*

$$\int_\Omega p(x) dx = 1$$

8.1 Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction de l'espace probabilisé vers un ensemble réel \mathbb{R} ou vers \mathbb{Z} ou vers un autre ensemble. La plupart du temps, lorsque le phénomène observé est continu (par exemple un signal sonore non-discrétisé tel que le champ d'un oiseau) on utilise \mathbb{R} ou lorsqu'il est enregistré par digitalisation il est \mathbb{Z} .

Pour illustrer avec l'exemple du dé, on peut introduire l'espace probabilisé Ω comme celui constitué des 6 symboles $\{A, B, C, D, E, F\}$, la distribution de probabilité comme la fonction qui associe chaque

lettre avec la quantité $1/6$, et la variable aléatoire comme la fonction qui associe la position de la lettre de l'alphabet par exemple $A \rightarrow 1$ et $F \rightarrow 6$. On a donc dans ce cas un sous-ensemble de \mathbb{Z} comme choix possible de l'ensemble d'arrivée.

On note la variable aléatoire par la lettre x . Un lancé d'un dé est le résultat du lancé correspondant par exemple $x = 3$.

Définition 8.2. *Une variable aléatoire est une fonction*

$$x : \Omega \rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} & \text{continu} \\ \mathbb{Z} & \text{quantifié} \end{cases}$$

8.2 Processus stochastique

Un processus stochastique est un ensemble de variables aléatoires $\{X_t\}$ indexées par rapport à une variable continue $t \in \mathbb{R}$. On peut également envisager un ensemble dénombrable discret indexé par un entier $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. La collection des variables aléatoires seront considérées dans ce qui suit comme régies par la même fonction de distribution p quel que soit l'index t ou n . En toute généralité, ceci ne peut pas être le cas, comme par exemple lors de processus stochastiques instationnaires.

Formellement (par exemple ch. 12 de [12] ou [13] p.179)

Définition 8.3. (PROCESSUS STOCHASTIQUE) *Un processus stochastique x est une fonction de deux variables t et ω , $t \in [0, T]$ et $\omega \in \Omega$ avec Ω un espace probabilisé avec une fonction de probabilité p telle que $x(t, \cdot)$ pour chaque t soit une fonction mesurable sur Ω .*

8.3 Moyenne et variance

Pour chaque index t ou n on peut définir les grandeurs associées aux variables aléatoires que sont la moyenne et l'écart-type (écart moyen centré quadratique).

En posant $X = x_t$ ou $X = x(n)$ on a

Définition 8.4. (MOYENNE)

$$m = E[X] = E[x_t] = \int_{\Omega} x_t p(x_t) dx_t$$

Définition 8.5. (ÉCART-TYPE)

$$\sigma^2 = E\{[X - E(X)]^2\}$$

9 Exemple de signaux aléatoires

9.1 Bruit blanc

Un signal aléatoire à temps discret (dorénavant on désignera ce signal simplement "signal aléatoire discret") avec 10 échantillons est généré par la commande Matlab/SysQuake

```
> rand(1,5)
ans =
    0.2769    0.6632    0.5316    0.0946    0.6807
```

Il s'agit d'une collection de nombre $\in \mathbb{R}$ compris entre 0 et 1 et manière équidistribuée.

Pour illustré ceci soit la commande

```
sum(max(rand(1,6000)<0.63,0)/6000)
ans =
    0.6365
```

En théorie, si on augment le nombre d'échantillons (ici 6000) la réponse 0.6365 tendra vers 0.63 si la répartition est équidistribuée entre 0 et 1.

Une série d'échantillon d'un tel signal est donné à la figure 30. Les commandes associées en SysQuake sont

```
xk = rand(1,1000);
plot(xk);
scale([0,1000,-0.5,1.5]);
```

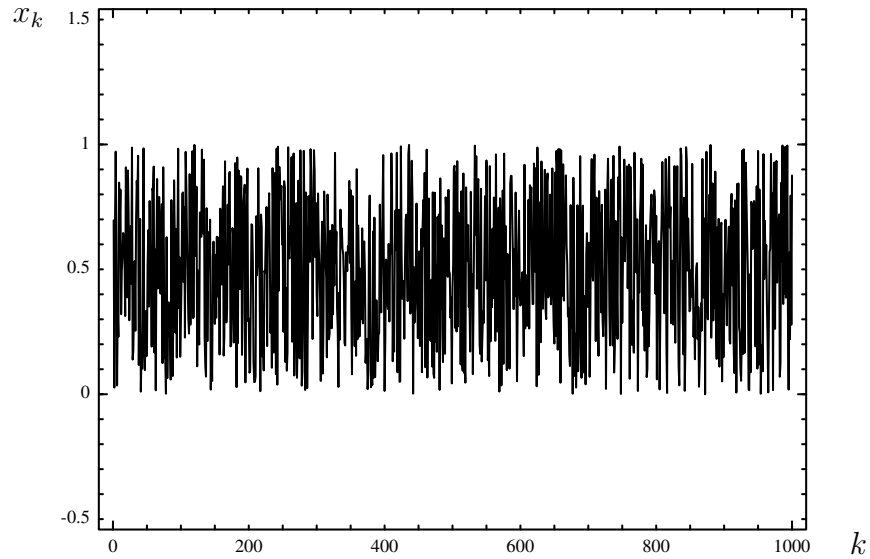


FIGURE 30 – En abscisse, l’indice k de l’échantillon x_k et en ordonnée la valeur de la variable aléatoire $x_k \in [0, 1]$. Les valeurs sont équidistribuées dans l’intervalle $[0, 1]$.

9.2 Mouvement brownien

Le mouvement brownien est un modèle mathématique du mouvement d’une particule en suspension sur un liquide sans force extérieur. Le botaniste Brown a remarqué un mouvement erratique de la particule sous l’effet microscopique du liquide. Un modèle d’un tel processus est un déplacement infinitésimal dx dans une direction angulaire arbitraire dans l’intervalle $]0; 2\pi]$ à chaque instant. En prenant un déplacement petit, il est possible de faire une simulation d’un tel mouvement aléatoire avec le code suivant :

```
N = 7000;
xk = rand(1,N);
angle = 2*pi*xk;
xb = zeros(1,N);
yb = zeros(1,N);
dd = 0.01;
for i=1:N-1,
    xb(i+1) = xb(i) + dd*cos(angle(i));
    yb(i+1) = yb(i) + dd*sin(angle(i));
end;
```

```
plot(xb,yb);
scale('equal',[-0.4,0.4,-0.4,0.4]);
```

Mathématiquement, on peut écrire le mouvement sous la forme

$$dx = \cos(\theta(t)) dt$$

$$dy = \sin(\theta(t)) dt$$

où $\theta(t)$ est une fonction aléatoire continue qui prend les valeurs entre 0 et 2π selon une distribution uniforme. Le résultat est illustré à la figure 31.

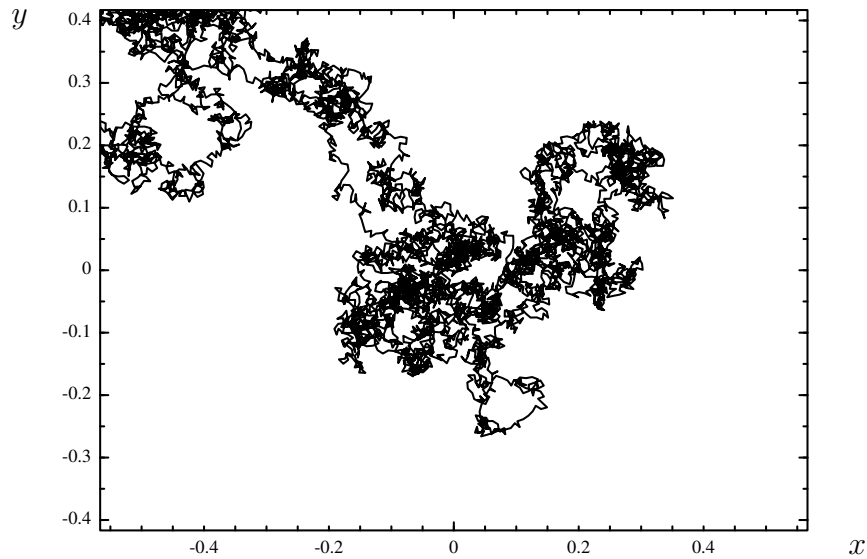


FIGURE 31 – Illustration du mouvement Brownien discret avec un pas constant et un angle de déplacement uniformément distribué entre 0 et 2π .

Lorsque plusieurs réalisations du même mouvement Brownien sont dessinées simultanément, le résultat est une densification qui finit par couvrir tout le rectangle d'observation comme illustré à la figure 32. Cela ressemble à ce que l'on pourrait observer sous un arbre en été avec un feuillage dense et avec fort contraste.

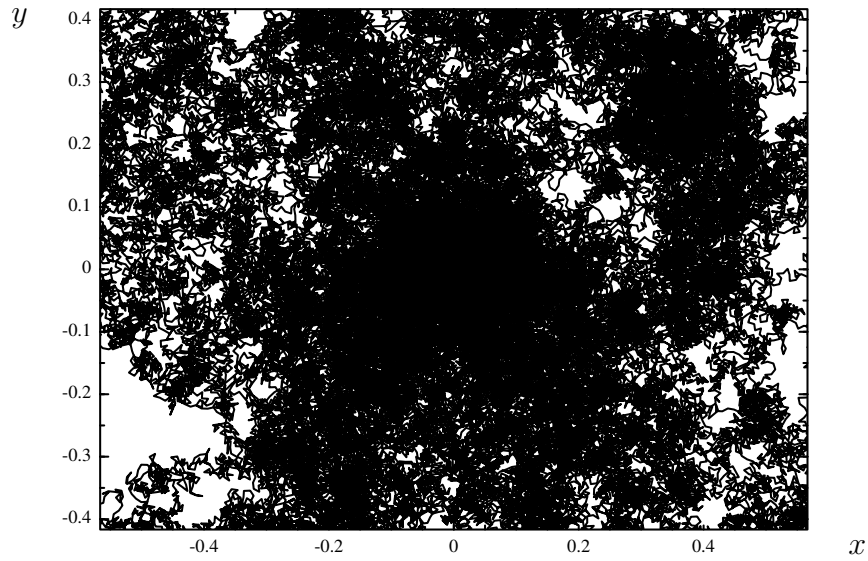


FIGURE 32 – Lorsque plusieurs mouvements browniens issus de la même condition initiales sont superposés, cela recouvre de manière dense la zone de représentation.

Si on représente une des deux coordonnées, par exemple x , le résultat obtenu est illustré à la figure 33. On obtient une courbe qui ressemble également à une valeur cotée en bourse sous fortes fluctuations.

`plot(xb)`

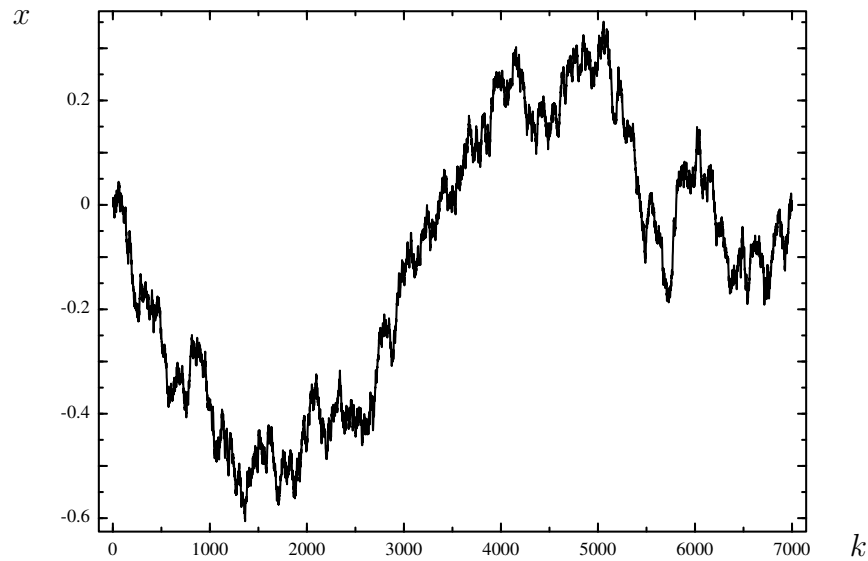


FIGURE 33 – Coordonnée x du mouvement Brownien discret

9.3 Bruit de grenaille

Un bruit de grenaille est un bruit de fond caractérisé par de petites "explosions" aléatoires. C'est ce que l'on entend sur les vieux gramophones sujet à de la poussière sur les disques lorsque le disque est en bout de course. Il n'y a plus de musique et l'aiguille du gramophone enregistre le bruit de la poussière. Le bruit de grenaille est également présent par émission électronique lorsqu'un électron dans un tube à vide rencontre une plaque et détache une émission électronique supplémentaire (deuxième émission électronique). Il est également présent dans d'autres situations physiques.

Sa modélisation mathématique consiste en une suite de réponses impulsionnelles avec un instant initial aléatoire. Le signal est alors la superposition de ces réponses impulsionnelles. Il est possible de maintenir la réponse impulsionnelle constante en amplitude quelle que soit l'instant initial, ou alors de modifier l'amplitude de celle-ci de manière aléatoire également.

Voici un exemple de génération d'un bruit de grenaille discret :

```
N = 30;
space = rand(1,N);
grT = [];
for i=1:N
    gr = zeros(1,40);
    gr(round(space(i)*30)+1) = 1;
    grT = [grT,gr];
end;
brGren = filter(1, [1, -0.8], grT);
plot(brGren);
```

et correspond à des réponse impulsionnelle de la fonction de transfert en z

$$H(z) = \frac{1}{z - 0.8}$$

et son illustration à la figure 34.

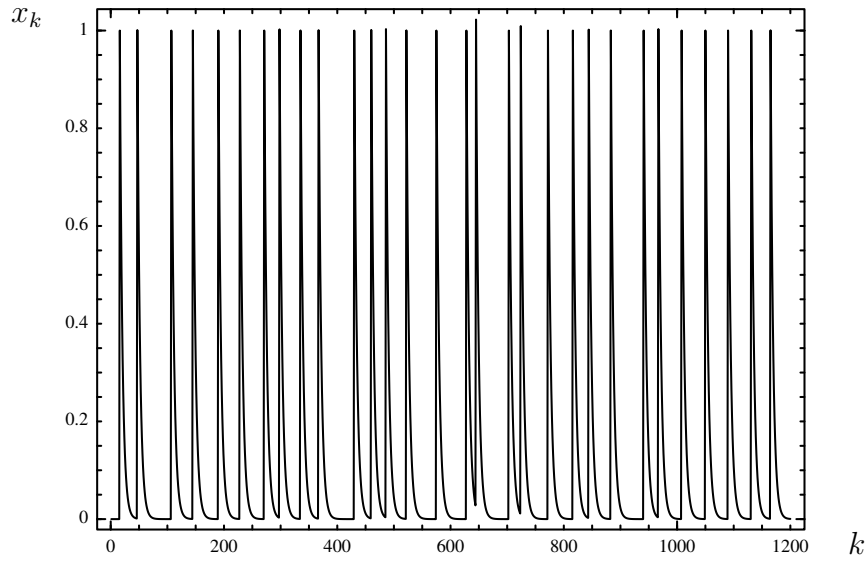


FIGURE 34 – Le bruit de grenaille est une superposition de réponses impulsionnelles à des instants aléatoires. La fonction de transfert associée à la réponse impulsionnelle comporte un seul pôle réel à l'intérieur du cercle unité en 0.8.

Un autre exemple en prenant la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{1}{z^3 - 2.3z^2 + 2.11z - 0.765}$$

qui est obtenue avec la modification du code précédant en utilisant la ligne

```
brGren = filter(1, poly([0.9, 0.7+0.6j, 0.7-0.6j]), grT);
```

est donné à la figure 35.

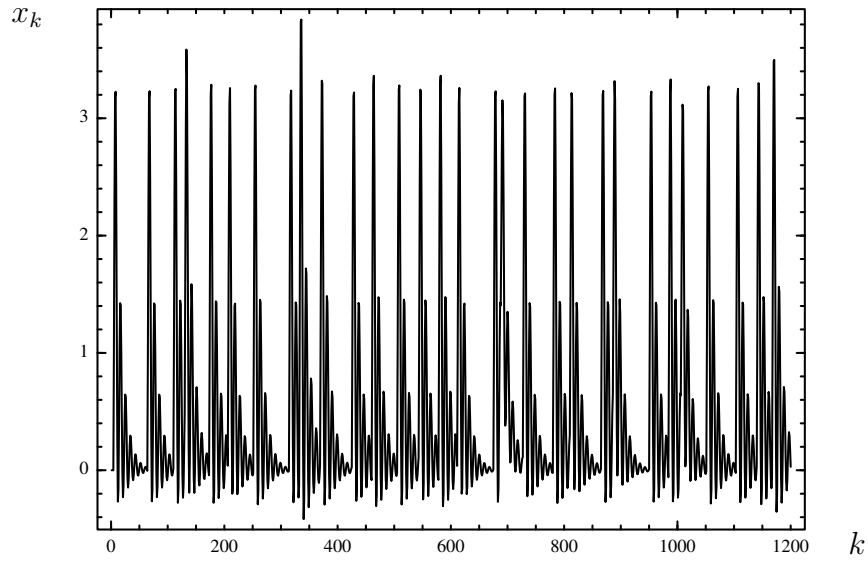


FIGURE 35 – Le bruit de grenaille est une superposition de réponses impulsionnelles à des instantes aléatoires. Ici, la réponse impulsionnelle est oscillatoire amortie avec une paire de pôle complexes conjuguées et un pôle réel tous dans le cercle unité.

9.4 Sinus noyé dans du bruit

Soit un signal harmonique avec du bruit gaussien. Deux cas caractéristiques sont à remarquer. Le premier est lorsque le signal sinusoïdal est fort vis-à-vis du bruit.

$$x_k = 0.2v_k + \sqrt{2} \sin\left(2\pi \frac{f_0}{N} k\right)$$

```
xk = 0.2*randn(1,2048) + sqrt(2)*sin(2*pi*(1:2048)*40/2048);
```

Ici $f_0 = 40$, $N = 2048$ échantillons.

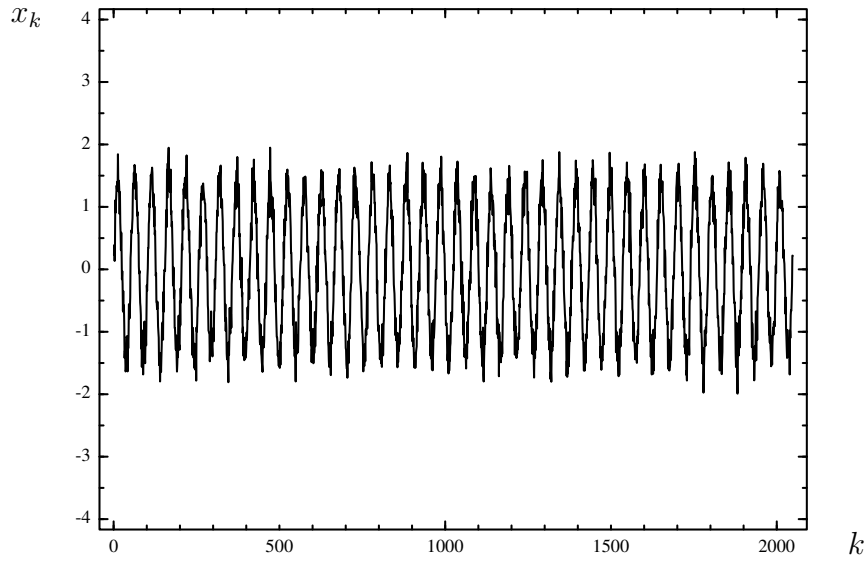


FIGURE 36 – Signal harmonique corrompu par un bruit blanc gaussien faible. Le signal sinusoidal est facilement reconnaissable.

Le second cas est lorsque le bruit est tellement fort que le sinus n'est plus reconnaissable au niveau temporel

$$x_k = 4v_k + \sqrt{2} \sin \left(2\pi \frac{f_0}{N} k \right)$$

```
xk = 4*randn(1,2048) + sqrt(2)*sin(2*pi*(1:2048)*483/2048);
```

Ici $f_0 = 483$ et $N = 2048$ échantillons.

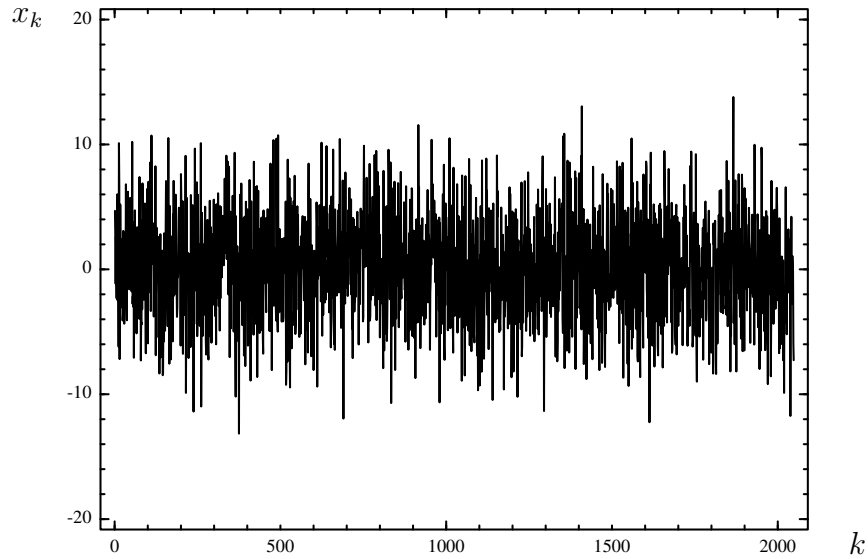


FIGURE 37 – Signal harmonique corrompu par un bruit blanc gaussien fort. Le signal sinusoidal n'est pas reconnaissable.

9.5 Bruit blanc filtré, ou bruit coloré

Lorsque la représentation fréquentielle (cf. densité spectrale de la section suivante) est uniforme quelle que soit les fréquences, le signal est appelé bruit blanc par analogie à la lumière blanche qui est la superposition de toutes les couleurs, de toutes les ondes comprises dans le spectre visible du rouge au violet (les infra-rouges et les ultra-violets sont invisibles).

Lorsque la représentation fréquentielle n'est plus uniforme, au sens que le signal comporte des contributions fréquentielles non uniformes, de différentes intensités, le signal est appelé bruit coloré. Par exemple, en passant un bruit blanc dans un filtre passe-bas de Tchebychev

$$H(z) = \frac{0.0154z^3 + 0.0462z^2 + 0.0462z + 0.0154}{z^3 - 1.99z^2 + 1.5715z - 0.4583}$$

à l'aide des commandes

```
(num,den) = cheby1(3,0.5,0.2);
rand('seed',777);
xk = filter(num,den, randn(1,2048));
```

on obtient un bruit représenté à la figure 38.

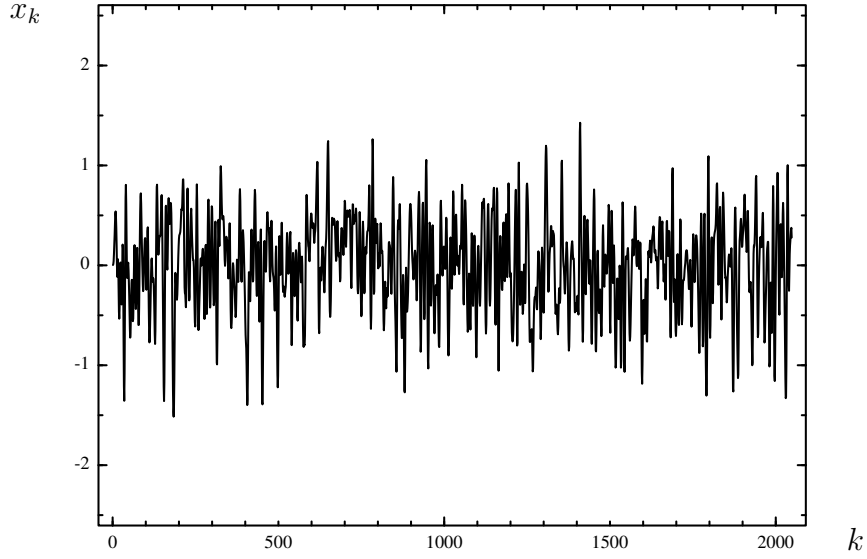


FIGURE 38 – Le bruit coloré est un bruit qui n’a pas une représentation fréquentielle uniforme. La figure représente le résultat de passer un bruit blanc gaussien dans un filtre passe bas.

10 Analyse spectrale non paramétrique

10.1 Fonction de covariance et de corrélation

La solution d’une équation différentielle ordinaire montre qu’une condition initiale donnée permet de prédire avec une grande précision la solution sur un intervalle de temps pas trop grand. Lorsque le signal provient d’un phénomène aléatoire, il est bien difficile de donner autant de précision entre l’observation de la valeur du signal disons à l’instant t_1 et celle à un instant t_2 .

Les fonctions de covariance et de corrélation permet de caractériser au premier ordre l’influence entre deux instant sur la prévisibilité du phénomène.

Définition 10.1. (CORRÉLATION INSTATIONNAIRE) *La fonction de corrélation pour deux signaux aléatoires de moyenne nulle est définie comme l’espérance mathématique du produit des valeurs du signal entre deux instants. Lors de signaux discrets, la corrélation est définie pour deux signaux discrets complexes avec $x_k = x(k) \in \mathbb{C}$ et $y_k = y(k) \in \mathbb{C}$ de moyenne nulle comme*

$$\gamma_{xy}(k, l) = E\{x^*(k)y(k)\}$$

et dans le cas continu par

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = E\{x^*(t_1)y(t_2)\}$$

Définition 10.2. (FONCTION DE COVARIANCE INSTATIONNAIRE) *dans le cas de deux signaux discrets complexes instationnaires de moyenne m_x et m_y , la fonction de covariance est définie par*

$$\gamma_{xy}(k, l) = E\{(x(k) - m_x)^*(y(l) - m_y)\}$$

et dans le cas continu par

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = E\{(x(t_1) - m_x)^*(y(t_2) - m_y)\}$$

L'espérance mathématique est prise sur un ensemble infini de réalisation du signal aléatoire (sur une infinité de réalisations du processus stochastique).

10.1.1 Stationarité

Sous hypothèse de stationarité, la fonction de corrélation ne dépend pas de l'instant k et on peut définir

Définition 10.3. (FONCTION DE CORRÉLATION STATIONNAIRE)

$$\gamma_{xy}(k) = E\{x^*(l)y(l+k)\}$$

Définition 10.4. (FONCTION DE COVARIANCE STATIONNAIRE)

$$c_{xy}(k) = E\{(x(l) - m_x)^*(y(l+k) - m_y)\}$$

Comme précédemment l'espérance mathématique est prise sur un ensemble infini de réalisation du signal aléatoire (sur une infinité de réalisations du processus stochastique).

Si on considère le signal $\{y(k)\}$ comme identique au signal $\{x(k)\}$, on obtient la fonction d'auto-corrélation.

Définition 10.5. (FONCTION D'AUTO-CORRÉLATION) *La fonction d'auto-corrélation d'un signal stationnaire aléatoire discret à valeurs complexes de moyenne nulle est définie par*

$$\gamma_x(k) = E\{x^*(l)x(l+k)\} \tag{8}$$

Définition 10.6. (FONCTION D'AUTO-COVARIANCE) *La fonction d'auto-covariance d'un signal discret stationnaire complexe est définie par*

$$c_x(k) = E\{(x(l) - m_x)^*(x(l+k) - m_x)\}$$

10.1.2 Ergodicité

Les espérances mathématiques des définitions à la section précédente sont prises sur un ensemble infini de réalisations du processus stochastique générant le signal aléatoire.

Pour une grande partie de signaux aléatoires et de processus stochastiques, il est possible de prendre l'espérance mathématique comme la moyenne sur un signal donné. Les hypothèses qui rendent ceci possible sont les hypothèses dites d'ergodicité. On obtient alors les relations suivantes

Théorème 10.1. (SOUS HYPOTHÈSE D'ERGODICITÉ)

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N x^*(l)y(k+l) \\ \gamma_x(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N x^*(l)x(k+l)\end{aligned}$$

Remarque : Toutes les formules où apparaissent l'espérance mathématique $E\{.\}$ sont à remplacer par celles utilisant la moyenne temporelle $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N (.)$.

Remarque : Les fonctions de covariance et de corrélation (auto-corrélation, etc.) sont tous des signaux déterministes et se représentent comme des fonctions bien définies de leur argument. Il n'est plus question de réalisation du processus aléatoire.

10.2 Théorème de Wiener-Khinchin

10.2.1 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance représente la distribution de la puissance selon les fréquences qui existent dans un signal aléatoire. Cette relation est démontrée dans ce paragraphe.

Définition 10.7. (ÉNERGIE D'UN SIGNAL ALÉATOIRE) *L'énergie d'un signal est définie par*

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Pour une vaste classe de signaux aléatoires (bruit blanc par exemple) cette énergie est infinie et ne peut pas être calculée à l'aide de cette formule. En effet, le signal aléatoire n'a pas la tendance à s'évanouir avec le temps rendant cette intégrale infinie.

Une manière de s'en sortir est d'utiliser les bonnes propriétés d'évanouissement de la fonction de corrélation même lorsque le signal n'admet pas de transformée de Fourier. La fonction d'auto-corrélation est un signal déterministe qui admet une transformée de Fourier avec des propriétés intéressantes.

10.3 Energie et fonctions de corrélation

Le théorème de Wiener-Khinchin donne la relation entre un processus stochastique et sa fonction de corrélation. Pour être plus précis, si on donne une fonction arbitraire déterministe ayant les propriétés que la fonction de corrélation possède, il est possible de construire un processus stochastique ayant précisément cette fonction de corrélation. C'est loin d'être évident philosophiquement ! A l'inverse, si on se donne un processus stochastique de fonction de répartition donnée, la fonction de corrélation peut-être obtenue par la transformée de Fourier-Stieltjes de la fonction de répartition probabiliste. Donnons le théorème sous la forme continue :

Théorème 10.2. (DE WIENER-KHINCHIN) *Pour qu'une fonction $\gamma_x(t)$ soit une fonction de d'auto-corrélation d'un processus stochastique continu et stationnaire, il est nécessaire et suffisant qu'elle puisse s'écrire sous la forme*

$$\gamma_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF(x)$$

avec $F(x)$ la fonction de répartition du processus stochastique.

L'intégrale est une intégrale de Stieltjes.

En ce qui nous concerne, pour les processus stochastiques envisagés, on a le résultat simple suivant, qui dit simplement que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation donne la densité spectrale.

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

En discret, on a le même résultat

$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_x(k) e^{-j2\pi fkh}$$

Remarque : Les instants $t_k = kh$ du signal sont discrets, mais l'ensemble des fréquences est continu, une variable continue f . Dans le cas discret, la densité spectrale est périodique de période $\frac{1}{h}$.

10.4 Formule équivalente de la densité spectrale

Le théorème de Wiener-Khinchin donne

$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_x(k) e^{-j2\pi fk} \quad (9)$$

Pour l'estimation spectrale il est plus judicieux de trouver une expression équivalente en posant $k = 2M$ et en prenant la limite $M \rightarrow \pm\infty$ et d'utiliser la propriété

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{|k|}{2M+1} \right) = 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-2M}^{2M} \gamma_x(k) e^{-j2\pi f k} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|k|}{2M+1} \right) \gamma_x(k) e^{-j2\pi f k} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-2M}^{2M} (2M+1-|k|) \gamma_x(k) e^{-j2\pi f k} \end{aligned} \quad (10)$$

En considérant $\gamma_x(m-n)$ comme l'entrée (m, n) d'une matrice de dimension $(2M+1) \times (2M+1)$ on arrive à la relation

$$\sum_{k=-2M}^{2M} (2M+1-|k|) \gamma_x(k) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \gamma_x(m-n)$$

ce qui permet d'écrire (10) sous la forme

$$S_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \gamma_x(m-n) e^{-j2\pi(m-n)}$$

En partant de la définition de la fonction d'auto-corrélation (8), il est possible de sortir l'opérateur d'espérance mathématique car $e^{-j2\pi f n}$ n'est pas aléatoire.

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M E\{x(m)x^*(n)\} e^{-j2\pi(m-n)} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E \left\{ \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M x(m)x^*(n) e^{-j2\pi(m-n)} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

et on arrive à la formule équivalente pour la densité spectrale où l'espérance mathématique est prise sur le carré du module de la transformée de Fourier discrète.

$$S_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{k=-M}^M x(k) e^{-j2\pi f k} \right|^2 \right\} \quad (12)$$

On reconnaît le module de la transformée de Fourier du signal qui est une fonction aléatoire à cause du caractère aléatoire du signal (et non celui du phaseur $e^{-j2\pi f k}$). La densité spectrale est un

signal déterministe par l'entremise de l'espérance mathématique. Il ne s'agit pas d'une transformée de Fourier discrète car la variable f est continue,

Remarque : On constate l'apparition du carré du module des coefficients de la transformée de Fourier d'un signal discret. Dans le cas de la transformée de Fourier d'un signal continu, et en admettant cette transformée de Fourier comme étant bien définie, il est possible de démontrer le théorème de Parseval qui donne la relation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (13)$$

et qui connecte les composantes de l'énergie par unité de temps à celle par unité de fréquence donne l'équivalence énergétique entre la représentation temporelle et fréquentielle. Ainsi, la formule (12) avec la conséquence de (13) montrent bien que la densité spectrale, définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation (9), représente la distribution de puissance selon les fréquences dans un signal aléatoire.

10.5 Filtrage linéaire des signaux aléatoires

On considère le filtrage d'un signal par un filtre linéaire donné par sa fonction de transfert $G(f)$ ou par sa transformée en Z , $H(z)$. La réponse impulsionnelle sera notée $\{g(k)\}$ pour un signal discret par analogie à $\{g(t)\}$ la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire à une impulsion de Dirac $\{\delta(t)\}$. On pourrait également la noter $\{h(k)\}$ en relation avec $H(z)$. La linéarité (principe de superposition) conduit à la relation du produit de convolution entre un signal d'entrée discret $\{x(k)\}$ et sa sortie $\{y(k)\}$

$$y(k) = x(k) * g(k) = g(k) * x(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)g(k-l) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(l)x(k-l) \quad (14)$$

Etablissons la relation entre la fonction d'auto-corrélation de l'entrée $\gamma_x(k)$ et celle de la sortie $\gamma_y(k)$. Ceci est possible en utilisant la convolution (14) et le fait que la réponse impulsionnelle est un signal déterministe ce qui permet de l'extraire de l'opération de l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} \gamma_y(k) &= E\{y^*(l)y(l+k)\} \\ &= E\left\{\left(\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g^*(u)x(l-u)\right)\left(\sum_{v=-\infty}^{+\infty} g^*(v)x(l+k-v)\right)\right\} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g^*(u) \sum_{v=-\infty}^{+\infty} g(v) E\{x^*(l-u)x(l+k-v)\} \end{aligned}$$

On va supposer $x(k)$ stationnaire de telle sorte à pouvoir décaler de u échantillons, et en faisant changement de variable $m = v - u$

$$E\{x^*(l-u)x(l+k-v)\} = E\{x^*(l)x(l+k+u-v)\} = \gamma_x(k+u-v)$$

$$\begin{aligned}\gamma_y(k) &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g^*(u) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(u+m) \gamma_x(k-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_x(k-m) \left(\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g^*(u)g(u+m) \right)\end{aligned}\tag{15}$$

On peut récrire le dernier facteur entre parenthèses de (15) sous la forme

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g^*(u)g(u+m) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} g^*(m-v)g(v) = g(m) * g^*(m)$$

qui est la convolution de la réponse impulsionnelle avec le complexe conjugué de la réponse impulsionnelle. La formule (15) devient alors une simple convolution et conduit au résultat

$$\gamma_y(k) = \gamma_x(k) * g(k) * g^*(k)$$

En passant dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned}S_y(f) &= S_x(f) G(f) G^*(f) \\ &= |G(f)|^2 S_x(f)\end{aligned}$$

10.6 L'estimateur spectral simple ou périodogramme

Définition 10.8. (ESTIMATEUR SPECTRAL SIMPLE OU PÉRIODOGRAMME) *L'estimateur spectral repose sur la définition équivalente (12) en négligeant l'espérance mathématique et en ne prenant que le nombre d'échantillons à disposition*

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi f k} \right|^2\tag{16}$$

Soit $\{x(k)\}$ le signal aléatoire. On commence donc par calculer la TFD (en utilisant une FFT par exemple)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi k n} \quad N = 0, \dots, N-1\tag{17}$$

(les bornes de la formule (16) peuvent être modifiées pour arriver à (17) car le signal est supposé par défaut être périodique lorsqu'on prend la TFD) et ensuite on obtient l'estimateur spectral simple donné par

$$\hat{S}_x(n) = \frac{1}{N} X(n)X^*(n) \quad n = 0, \dots, N-1$$

Remarque : les valeurs entre $N/2$ et $N-1$ représente les fréquence négatives comme dans le cas déterministe. Les signaux discrets entraînent une périodicité de la transformée de Fourier qui donne une représentation multiple de la partie associée aux fréquences négatives.

Le code pour appliquer l'estimateur spectral simple est le suivant :

```
% estimateur spectral simple
K = 2048;
Xf = fft(xk(1:K));
Sx = 1/K*Xf.*conj(Xf);
figure
scale('linlog',[0,0.5,1e-4,10]);
plot((1:K/2)/K,Sx(1:K/2));
```

Par exemple, pour le bruit coloré par un filtre de Tchebycheff construit par les commandes

```
use filter;
(num,den) = cheby1(3,0.5,0.2);
rand('seed',777);
xk = filter(num,den, randn(1,2048));
```

dont le spectre théorique est

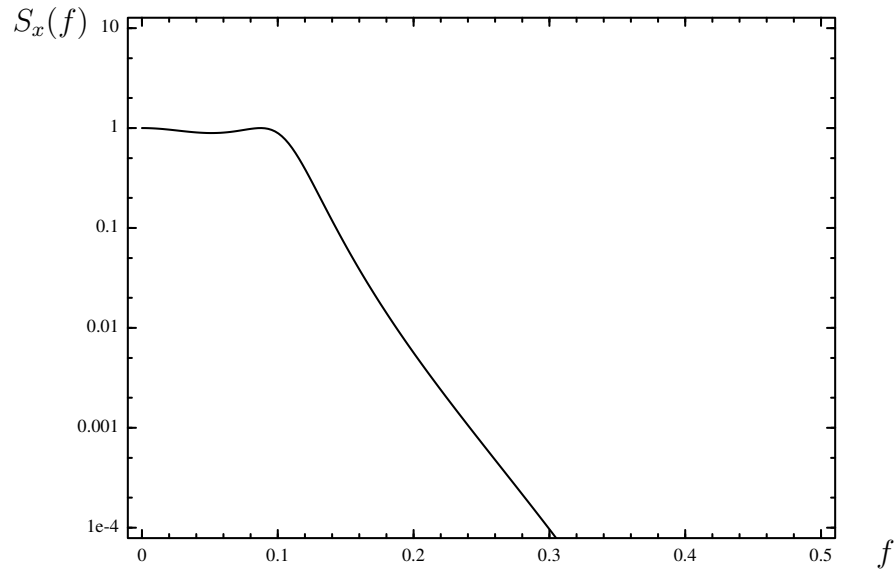


FIGURE 39 –

Le résultat de l'estimateur spectral simple est donné à la figure 40.

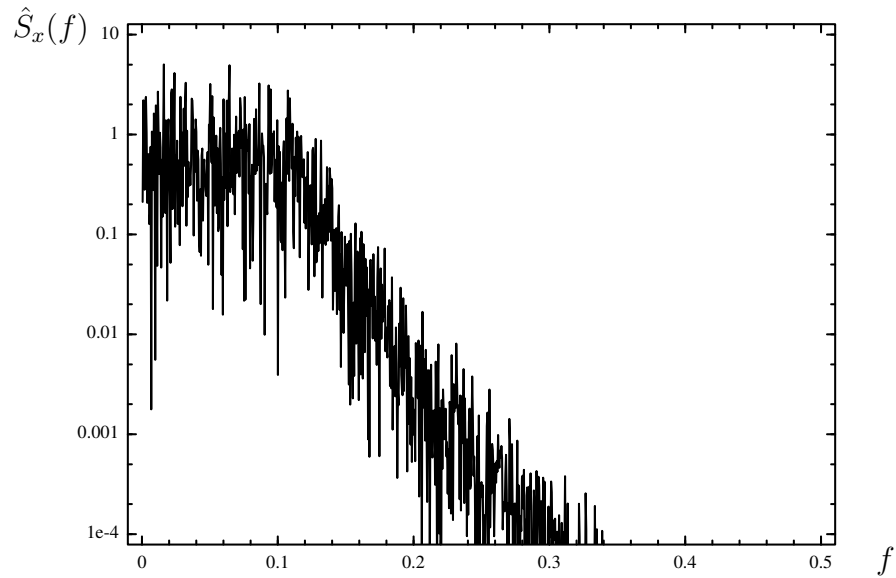


FIGURE 40 – Résultat de l'estimateur spectral simple pour $N = 2048$ échantillons du bruit coloré par le filtre de Tchebychev. Le résultat montre une variance significative autour de la valeur théorique du spectre. La période d'échantillonnage est normalisée à $h = 1$. .

10.7 L'estimateur spectral moyenné

Pour diminuer la variance, l'estimateur moyenné utilise la transformée de plusieurs sections successives du signal à analyser et effectue un estimateur spectral simple.

L'estimateur moyenné est alors obtenu en effectuant la moyenne des estimateurs simples.

```
% estimateur spectral moyenné, cas général
K = 2048;
M = 256;
L = 8;
Sx1 = zeros(L,M);
for l=1:L
    Sx1(l,:) = fft(xk((l-1)*M+1:l*M));
    Sx1(l,:) = 1/M*Sx1(l,:).*conj(Sx1(l,:));
end;
Sx = Sx1(1,:);
for l=2:L
    Sx = Sx+Sx1(l,:);
end;
Sx = 1/L*Sx;
figure
scale('linlog',[0,0.5,1e-4,10]);
%scale linlog
plot((1:M/2)/M,Sx(1:M/2));
```

Prenons successivement plusieurs sections du signal. Le cas de deux sections est représenté à la figure 41. On constate une diminution de la variance par rapport à l'estimateur simple.

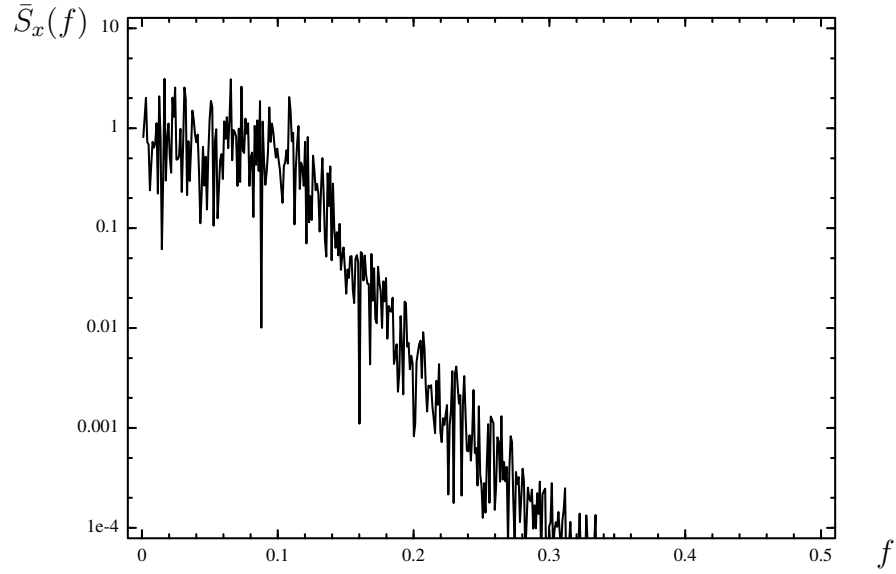


FIGURE 41 – Avec $N = 2048$ échantillons (période d'échantillonnage normalisée à $h = 1$), et en prenant la moyenne de $L = 2$ sections d'échantillons de longueur $M = 1024$, la variance est réduite par rapport au cas de l'estimateur spectral simple.

Lorsqu'on augmente le nombre de sections, par exemple au nombre de 4 à la figure 42 et 8 à la figure 43, bien que la variance diminue considérablement, ceci se fait au détriment du biais, bien visible dans la partie haute fréquence du graphique à la figure 43.

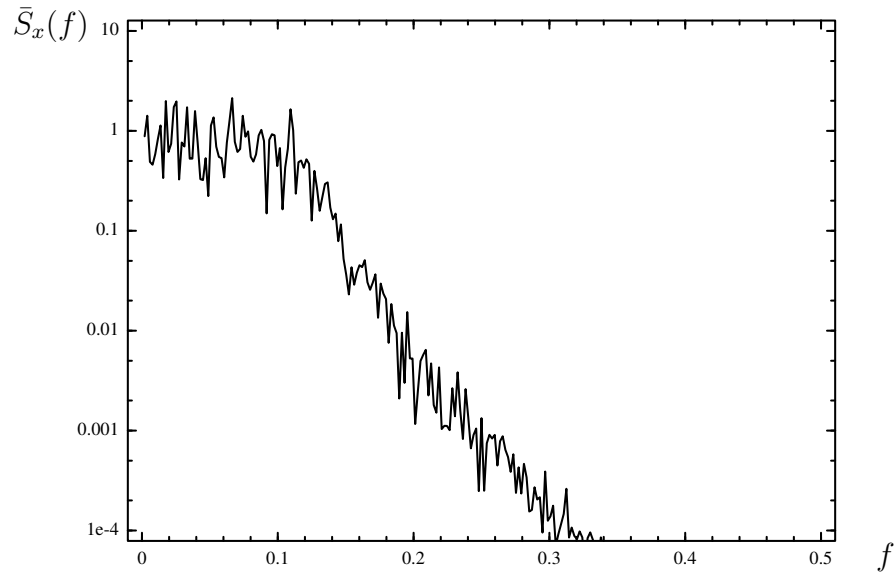


FIGURE 42 – Illustration du cas $N = 2048$ avec la moyenne de $L = 4$ sections de $M = 512$ échantillons chacun. La variance diminue mais le biais augmente.

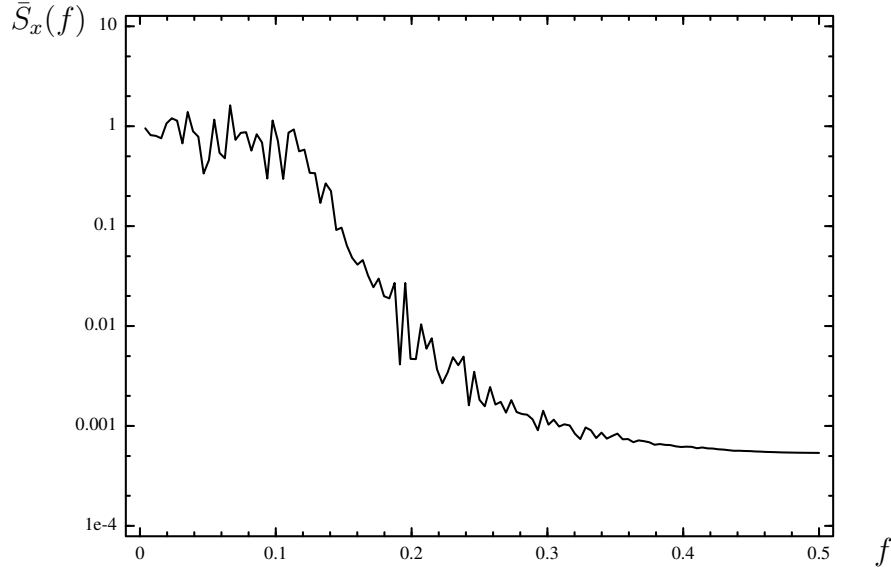


FIGURE 43 – $N = 2048$, $L = 8$, $M = 256$. Le biais est très conséquent.

10.8 Estimation de la fonction de corrélation

En pratique, il n'y a qu'un nombre limité d'échantillons à disposition pour évaluer les caractéristiques du signal. Il n'est pas possible d'appliquer la définition de la fonction d'auto-corrélation car elle comporte un nombre infini de ces échantillons (définition en utilisant l'ergodicité).

Par contre, il est possible d'appliquer la formule en effectuant uniquement une moyenne sur les échantillons à disposition.

Définition 10.9. (ESTIMATEUR DE LA FONCTION D'AUTO-CORRÉLATION) *Un estimateur de la fonction de corrélation, noté $\hat{\gamma}_x(k)$ pour une fonction aléatoire discrète complexe (pour le cas réel, il suffit de supprimer le complexe conjugué de la formule) stationnaire est défini par la formule*

$$\hat{\gamma}_x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1-k} x^*(l) x(l+k) & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \hat{\gamma}_x^*(-k) & k = -(N-1), -(N-2), \dots, -1 \end{cases} \quad (18)$$

10.9 L'estimateur spectral adouci dit de Blackman-Tukey

On va montrer que l'estimateur spectral simple peut s'écrire à l'aide de l'estimateur de la fonction d'auto-corrélation $\hat{\gamma}_x(k)$ comme

$$\hat{S}_x(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}_x(k) e^{-j2\pi f k} \quad (19)$$

Avant de démontrer ceci, on constate que cette formule indique une des raisons des performances modestes de l'estimateur spectral simple. Par exemple, en considérant l'estimation de $\gamma_x(N-1)$, cette valeur est estimée à l'aide d'un seul échantillon le produit $x^*(0)x(N-1)/N$ de la formule (18). Ce produit est très variable (pas d'effet de moyennisation sur ce terme, pas d'espérance mathématique).

Remarque : La formule (19) donne une fonction continue par rapport à la variable f tout comme la formule (12). Toutefois le nombre d'échantillons est différents. Dans (19), il y a $2N-1$ échantillons de l'estimée de la fonction d'auto-corrélation $\hat{\gamma}_x(k)$, et dans (12) il y a N échantillons du signal aléatoire $x(k)$. Ceci aura une grande importance lorsque la variable f est discrétisée par l'entremise de la transformée de Fourier discrète, et il faut être prudent pour donner les équivalents entre (19) et (12) lorsqu'on utilise la TFD.

Montrons l'équivalence de (19) et (12). Il s'agit de montrer l'équivalence entre

$$\begin{aligned}\hat{S}_x(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x^*(n)x(n+k) \right) e^{-j2\pi f k} \\ &+ \sum_{k=-(N-1)}^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1+k} x(n)x^*(n-k) \right) e^{-j2\pi f k}\end{aligned}\quad (20)$$

et

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi f k} \right|^2 \quad (21)$$

Sans perte de généralité, montrons cette équivalence avec $N=3$ et isolons chaque terme en k des deux sommes d'indice k apparaissant dans (20)

$k=0$	$\frac{1}{3} (x^*(0)x(0) + x^*(1)x(1) + x^*(2)x(2)) e^0$
$k=1$	$\frac{1}{3} (x^*(0)x(1) + x^*(1)x(2)) e^{-j2\pi f}$
$k=2$	$\frac{1}{3} (x^*(0)x(2)) e^{-j4\pi f}$
$k=-2$	$\frac{1}{3} (x(0)x^*(2)) e^{+j4\pi f}$
$k=-1$	$\frac{1}{3} (x(0)x^*(1) + x(1)x^*(2)) e^{+j2\pi f}$

On peut alors regrouper les termes et factoriser

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} (x^*(0)x(0) + x^*(1)x(1) + x^*(2)x(2)) \\
& + \frac{1}{3} (x^*(0)x(1) + x^*(1)x(2)) e^{-2\pi f} \\
& + \frac{1}{3} (x(0)x^*(1) + x(1)x^*(2)) e^{+2\pi f} \\
& + \frac{1}{3} x^*(0)x(2)e^{-j4\pi f} \\
& + \frac{1}{3} x(0)x^*(2)e^{+j4\pi f} \\
& = \frac{1}{3} (x(0) + x(1)e^{-j2\pi f} + x(2)e^{-j4\pi f}) (x^*(0) + x^*(1)e^{j2\pi f} + x^*(2)e^{j4\pi f}) \\
& = \frac{1}{3} (x(0) + x(1)e^{-2\pi f} + x(2)e^{-4\pi f}) (x(0) + x(1)e^{-2\pi f} + x(2)e^{-4\pi f})^* \\
& = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^3 x(k)e^{-j2\pi f k} \right) \left(\sum_{k=0}^3 x(k)e^{-j2\pi f k} \right)^* \\
& = \frac{1}{3} \left| \sum_{k=0}^3 x(k)e^{-j2\pi f k} \right|^2
\end{aligned}$$

Cette démonstration montre que plus les instants des échantillons sont séparés dans chaque produit, par exemple $x^*(0)x(2)$ séparés de $N - 1 = 2$ (le terme $x^*(0)x(N - 1)$), moins il y a de termes pour former une moyenne. Il est donc judicieux de ne pas trop mettre de poids sur les échantillons aux bords de l'estimée de la fonction d'auto-corrélation. Ceci est rendu possible en fenêtrant $\hat{\gamma}_x(k)$.

Définition 10.10. (ESTIMATEUR ADOUCI, OU DE BLACKMAN-TUKEY) *Soit $w(k)$ une fenêtre telle que $0 \leq w(k) \leq w(0) = 1$, $w(-k) = w(k)$, et $w(k) = 0$ pour $|k| > M$*

$$\tilde{S}_x(f) = \sum_{k=-(N-1)}^N w(k) \hat{\gamma}_x(k) e^{-j2\pi f k}$$

11 Formulaire

nom	définition (signal discret)	transformée de Fourier (du signal continu)
rectangulaire	$w(k) = \begin{cases} 1 & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$W_R(f) = \frac{\sin(2M\pi f)}{\pi f} = 2M \text{sinc}(2Mf)$
triangulaire	$w(k) = \begin{cases} 1 - \frac{ k }{M} & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$W(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin(\pi f M)}{\pi f} \right)^2$
Hanning	$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi k}{M} & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$W(f) = \frac{1}{4} W_R \left(f - \frac{1}{2M} \right) + \frac{1}{2} W_R(f) + \frac{1}{4} W_R \left(f + \frac{1}{2M} \right)$
Hamming	$w(k) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi k}{M} & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$W(f) = 0.23 W_R \left(f - \frac{1}{2M} \right) + 0.54 W_R(f) + 0.23 W_R \left(f + \frac{1}{2M} \right)$
Blackman	$w(k) = \begin{cases} 0.042 + 0.5 \cos \frac{\pi k}{M} + 0.08 \cos \frac{2\pi k}{M} & k \leq M \\ 0 & k > M \end{cases}$	$W(f) = 0.04 W_R \left(f - \frac{1}{M} \right) + 0.25 W_R \left(f - \frac{1}{2M} \right) + 0.042 W_R(f) + 0.25 W_R \left(f + \frac{1}{2M} \right) + 0.04 \left(f + \frac{1}{M} \right)$

FIGURE 44 – Fenêtres couramment utilisées avec les expressions pour le signal discret et la transformée de Fourier du signal continu (associée au signal). La période d'échantillonnage est normalisée $h = 1$.

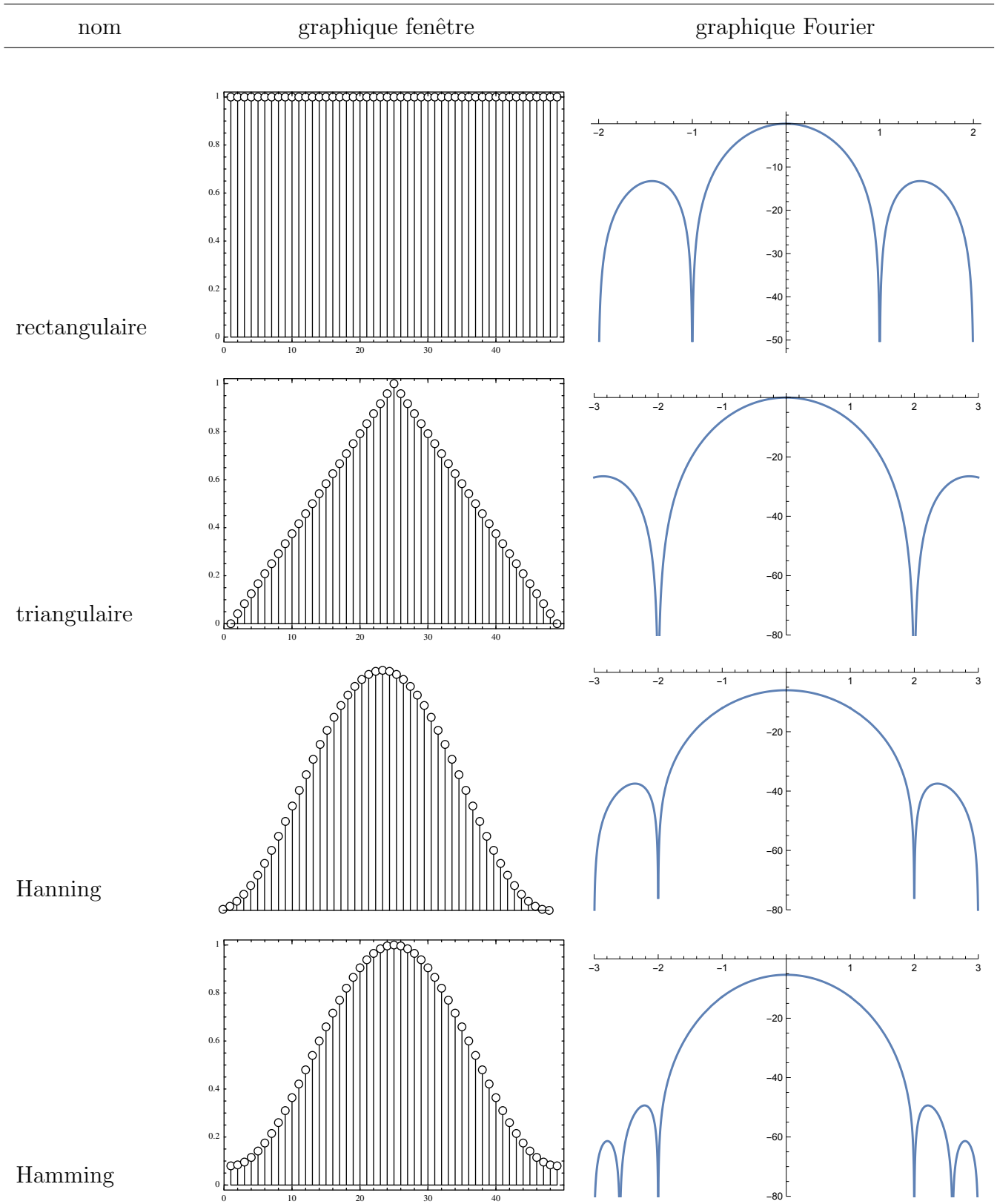


FIGURE 45 – Représentation graphique des fenêtres avec le choix $M = 24$. La fréquence est normalisée de telle sorte que le pic principal de la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire soit de largeur 2 [Hz]. Ainsi $h = \frac{1}{T} = \frac{1}{2M} = \frac{1}{48}$ [s].

12 Annexe : Tables

$x(t)$	$X(f)$
1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$-j\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + j\frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{4a}}$

TABLE 1 – Transformées de Fourier $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi f t} dt$.

$x(t)$	$X(f)$
$x(t + \alpha)$	$e^{j2\pi\alpha f} X(f)$
$e^{-j2\pi\alpha t} x(t)$	$X(f + \alpha)$
$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$x^{(n)}(t)$	$(-j2\pi f)^n X(f)$

TABLE 2 – Règles des transformées de Fourier

Linéarité

$$\mathcal{Z}(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}) = \mathcal{Z}(\{w_1(kh)\}) + \mathcal{Z}(\{w_2(kh)\})$$

$$\mathcal{Z}(a\{w(kh)\}) = a\mathcal{Z}(w(kh)) \quad a \in \mathbb{C}$$

Décalages temporels

$$\mathcal{Z}(w(kh - dh)) = z^{-d}W(z) \quad d \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{Z}(w(kh + dh)) = z^dW(z) - \sum_{i=0}^{d-1} z^{d-i} \quad d \in \mathbb{N}$$

Dérivation complexe

$$\mathcal{Z}(kh w(kh)) = -hz \frac{dW}{dz}(z)$$

Changement d'échelle complexe

$$\mathcal{Z}(a^{kh}w(kh)) = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \quad a \in \mathbb{C} \ a \neq 0$$

Valeurs initiale et finale

$$w(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} W(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)W(z) \quad |z_i| < 1$$

Produit de convolution

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^k u(lh)g(kh - lh)\right) = G(z)U(z)$$

Accumulation

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^k w(lh)\right) = \frac{z}{z-1}W(z)$$

Différence

$$\mathcal{Z}(w(kh) - w(kh - h)) = \frac{z-1}{z}W(z)$$

TABLE 3 – Tableau de la grammaire de la transformée en \mathcal{Z}

N^o	$w(t)$	$\mathcal{L}(w(t))$	$w(kh)$	$\mathcal{Z}(w(kh))$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta(kh)$	1
3	1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}$	$\frac{1}{s^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \cdot \frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}} \left(\frac{z}{z-e^{-ah}} \right)$
7	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akh}	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$
8	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kh e^{-akh}$	$\frac{he^{-ah}z}{(z-e^{-ah})^2}$
9	$\frac{1}{2}t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2 e^{-akh}$	$\frac{h^2 e^{-ah} z(z-e^{-ah}+2e^{-ah})}{2(z-e^{-ah})^3}$
10	$\frac{1}{(l-1)!}t^{l-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^l}$	$\frac{1}{(l-1)!}(kh)^{l-1}e^{-akh}$	$\frac{(-1)^{(l-1)!}}{(l-1)!} \cdot \frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}} \left(\frac{z}{z-e^{-ah}} \right)$
11	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kh)$	$\frac{\sin(\omega h)z}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
12	$\cos(\omega h)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2\cos(\omega h)z+1}$
13	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh} \sin(\omega kh)$	$\frac{e^{-ah} \sin(\omega h)z}{z^2-2e^{-ah} \cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$
14	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akh} \cos(\omega kh)$	$\frac{z(z-e^{-ah} \cos(\omega h))}{z^2-2e^{-ah} \cos(\omega h)z+e^{-2ah}}$
15			a^k	$\frac{z}{z-a}$
16			$k a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
17			$\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
18			$\frac{1}{(l-1)!} \left(\prod_{i=0}^{l-2} (k-i) \right) (a^{k-l+1})$	$\frac{z}{(z-a)^l}$

TABLE 4 – Tableau des transformées en \mathcal{Z} et de Laplace

$$I_{2n} := \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{(4\pi)^n \sqrt{2}}$$

$$H_n(t) := \sum_{p=0}^n a_p t^p$$

$$\sum_{p=0}^n a_p I_{p+q} \quad q \leq n-1$$

$$a_n \sum_{p=0}^n a_p I_{n+p} = 1$$

$$H_n(t) := (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) \cdot H_m(t) \cdot e^{-2\pi t^2} dt = 1 \quad m = n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) \cdot H_m(t) \cdot e^{-2\pi t^2} dt = 0 \quad m \neq n$$

$x(t)$	$X(f)$
$H_n(t) e^{-\pi t^2}$	$j^n H_n(f) e^{-\pi f^2}$

TABLE 5 – Polynômes d’Hermite et leurs propriétés

13 Ouvrages conseillés

Un livre couvrant la base est [1]. L'aspect numérique est traité dans [2] et [11]. Les autres ouvrages sont plus avancés et, par ordre de complexité, nous avons [3], [6], [7], [4], et [5]. L'ouvrage théorique [4] est très intéressant, en particulier pour les polynômes d'Hermite et leurs propriétés par transformée de Fourier. Le livre [3] est une excellente suggestion pour aller vers plus de théorie tout en conservant une vue didactique par diverses applications physiques (circuits et radioastronomie). Les ondelettes sont un incontournable pour tous ceux qui s'intéressent au dilemme temps fréquence dont on a effleuré la complexité dans ce document. L'aspect stochastique est présent dans [2] et [11] et détaillé dans [8] et [9]. Pour la partie plus théorique concernant les axiomes des variables aléatoires et la théorie de la mesure et la définition des processus stochastiques, se référer à, par exemple, [12] et [13].

Références

- [1] B. Picinbono *Théorie des signaux et systèmes*, Dunod, 1989.
- [2] M. Kunt, *Traitement numérique des signaux*, PPUR, 1989.
- [3] J. Arsac, *Transformation de Fourier et théorie des distributions*, Dunod, 1961.
- [4] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, 1937.
- [5] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs I*, Hermann, Paris, 1990.
- [6] A. Cohen, *Ondelettes et traitement numérique du signal*, Masson, Paris, 1992.
- [7] M. Holschneider, *Wavelets, An Analysis Tool*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [8] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [9] A. Blanc-Lapierre, B. Picinbono, *Propriétés Statistiques du Bruit de Fond*, Masson et Cie, Paris, 1961.
- [10] B. Picinbono, *Random Signals and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [11] A.V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [12] R.M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [13] J.L. Doob, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1994.