

Ph. Müllhaupt

# Introduction à la Commande des Systèmes Dynamiques

24 avril 2024



---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Diagramme de Bode</b> .....	5
1.1	Introduction et objectifs .....	5
1.2	Le régime harmonique .....	6
1.2.1	Régime harmonique complexe .....	8
1.3	Le diagramme de Bode .....	9
1.3.1	Lien entre le diagramme de Bode et le diagramme de Nyquist .....	9
1.4	Esquisse asymptotique du diagramme de Bode .....	10
1.4.1	Les systèmes non résonants, pôles réels simples .....	10
1.4.2	Les systèmes résonants, pôles complexes conjugués .....	12
1.5	Synthèse dans le diagramme de Bode .....	16
1.5.1	Diagramme de Bode des régulateurs simples .....	16
1.5.2	La règle d'or fondée sur le critère de Nyquist simplifié .....	16
1.6	Exemple .....	18
1.7	Exemple supplémentaire .....	20
	<b>Index</b> .....	33



## Diagramme de Bode

### 1.1 Introduction et objectifs

Nous avons vu dans le chapitre sur la transformée de Laplace que la variable clé dans le domaine image était la variable complexe  $s \in \mathbb{C}$ . La variable  $s$  peut prendre n'importe quelle valeur dans le plan complexe. Un des grands avantages de la transformée de Laplace est le traitement des conditions initiales.

En automatique tout comme en traitement du signal, il est parfois suffisant de ne retenir que l'information lorsque la variable complexe  $s$  est limitée à l'axe imaginaire  $s = i\omega$ . Ceci conduit au régime harmonique comme il a été discuté dans le chapitre sur le diagramme de Nyquist. Le régime harmonique est fortement lié à la représentation d'un signal par la transformée de Fourier. Toutefois, il est erroné de penser que de restreindre une transformée de Laplace en égalant  $s = i\omega$  donne la transformée de Fourier. Ceci n'est pas le cas, car la représentation de Fourier représente des signaux qui commencent en  $t = -\infty$  et termine en  $t = +\infty$  et donc ne sont pas forcément nul pour  $t < 0$  alors que la transformée de Laplace est définie en forçant tout signal à valoir 0 pour tout  $t < 0$ .

En particulier, on constate les correspondances

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_0)$$

mais

$$\{\cos(\omega_0 t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Il faut ainsi remarquer l'importance des accolades dans  $\{\cos(\omega t)\}$  qui forcent le signal  $\cos(\omega t)$  à être nul pour  $t < 0$ .

La transformée de Fourier utilise uniquement la représentation par la valeur de l'axe imaginaire du plan complexe  $i\omega, \omega \in \mathbb{R}$  (1 dimension). Elle représente la représentation d'un signal (fonction de la variable réelle du temps  $t$ ) *comme une somme de signaux harmoniques*, c'est-à-dire comme une somme de sinus d'une amplitude donnée avec une phase donnée.

Dans le cas de la série de Fourier, le signal initial est périodique et la représentation comporte une somme infinie mais dénombrable de sinus d'amplitude et de phase fonction du nombre d'harmonique (multiplicité de la fréquence fondamentale correspondant à la période du signal initial périodique). Dans le cas d'un signal non périodique, la représentation comporte une somme infinie non dénombrable d'harmoniques. La période peut en quelque sorte être assumée être infinie.

*Remarque 1.* Dans ce chapitre, la variable imaginaire  $i = \sqrt{-1}$  est également désignée par  $j$  (i.e.  $j = \sqrt{-1}$ ).

Il existe un théorème d'analyse complexe qui permet de retrouver l'expression d'une fonction de la variable complexe connaissant la valeur de la fonction le long d'un lasso fermé du plan complexe. En somme, en extrapolant les valeurs à partir de la connaissance de l'image de la fonction pour un ensemble de départ restreint au lasso, il est possible de connaître toute la fonction quel que soit la valeur du point du plan complexe (Le théorème de Cauchy en est une conséquence.)

Deux points de vue sont utilisés en automatique, d'une part le placement de singularités (pôles) dans le plan complexe dans son ensemble, et, d'autre part, la considération uniquement le l'axe fréquentiel, sculptage de  $G(j\omega)$ . Nous avons vu qu'il est possible de se concentrer sur la structure des pôles et de changer ceux-ci par rétroaction. On agit en quelque sorte sur la fonction de transfert vu comme une fraction rationnelle de deux polynômes en  $s \in \mathbb{C}$ . On synthétise en quelque sorte la fonction de transfert pour tout  $s \in \mathbb{C}$ .

Un autre point de vue et déjà abordé au chapitre de Nyquist, est de s'intéresser uniquement à l'axe imaginaire de l'ensemble source, l'axe  $j\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Nous avons vu qu'il était possible de déterminer la stabilité de la fonction de transfert en boucle fermée  $G_{bf}(s)$  pour  $s \in \mathbb{C}$ .

En se fondant sur le théorème qui permet d'obtenir  $G_{bf}(s)$  en ne connaissant que  $G(j\omega)$ , il est possible d'effectuer un "sculptage" en se concentrant uniquement sur la réponse harmonique en boucle ouverte  $G(j\omega)$  et de déterminer les propriétés de  $G_{bf}(s)$  pour  $s \in \mathbb{C}$ .

Parmi les propriétés importantes, il s'agit de la stabilité (comme pour le chapitre Nyquist), mais également de la vitesse de réponse, du rejet des perturbations, de la sensibilité aux bruits de mesure haute fréquence de la boucle fermée.

Afin de permettre une synthèse en se fondant sur  $G(j\omega)$  qui est un nombre complexe qui varie pour chaque valeur de  $\omega \in \mathbb{R}$ , il est utile de bien distinguer le *module* (facteur d'amplitude à la fréquence prescrite) de la *phase* (angle correspondant au retard angulaire à la fréquence prescrite). Bien que ces deux données soient lisibles dans le diagramme de Nyquist (amplitude et phase sont celles du nombre complexe associé), le diagramme de Nyquist souffre du fait que la pulsation (fréquence)  $\omega$  n'est pas explicite. La courbe tracée dans le plan complexe perd sa paramétrisation par la pulsation  $\omega$ . Pour faire apparaître explicitement les valeurs de la pulsation, il faut deux courbes, chacune paramétrée par la pulsation, une donnant le *module* en fonction de la pulsation et une autre représentant la *phase* en fonction de la pulsation.

Le diagramme de Bode est une solution à la représentation du module et de la phase en dépendance de la pulsation. Une propriété clé de ce diagramme est la capacité d'additionner les diagrammes lorsqu'on effectue un produit de réponses harmoniques suite à la mise en série des fonctions de transferts. L'argument d'un nombre complexe conduisant à la phase est naturellement additionné lors de la mise en série. Ceci n'est pas le cas avec le module. Pour remédier à cet inconvénient, on représente le logarithme du module. Ceci permet d'additionner les diagrammes lors de la mise en série.

Pour des raisons historiques concernant l'unité adoptée, à savoir le décibel, et pour des liens avec l'acoustique, l'échelle du module est représentée par cette unité symbolisée par [dB]. Pour avoir une correspondance il s'agit de multiplier le logarithme en base 10 par un facteur de 20.

## 1.2 Le régime harmonique

On appelle régime harmonique, l'équilibre en régime oscillatoire d'un système dynamique lorsque l'entrée est un sinus (une seule fréquence), i.e.  $u(t) = \sin(\omega t)$ . La sortie est alors également oscillatoire à la même fréquence (le système est linéaire). Si le système est instable, il est nécessaire de le placer dans les conditions initiales appropriées. Si le système est BIBO stable, le régime harmonique s'établira quelles que soient les conditions initiales, après un transitoire. La sortie, après transitoire sera  $y(t) = \hat{y} \sin(\omega t + \phi)$  et sera soit amplifiée ou diminuée par rapport à l'entrée (facteur  $\hat{y} \in \mathbb{R}$ ) et déphasée (quantité  $\phi \in \mathbb{R}$ ). Ceci s'apparente au comportement de l'oscillateur masse-ressort simple, forcé : la solution  $\hat{y} \sin(\omega t + \phi)$  est une solution particulière de l'équation différentielle mass-ressort.

*Remarque 2.* La pulsation  $\omega$  est la même pour la sortie que celle de l'entrée et peut prendre n'importe quel valeur dans l'intervalle  $\omega \in ]-\infty; +\infty[$ . L'amplitude de la sortie  $\hat{y}$  et la phase  $\phi$  sont fonction de  $\omega$ . On aurait pu ainsi écrire  $\hat{y}(\omega)$  et  $\phi(\omega)$ .

*Exemple 1.*

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad \{u(t)\} = \{\sin(\omega t)\}$$

En appliquant la théorie du chapitre sur la transformée de Laplace, on obtient la sortie en procédant par décomposition en éléments simples. En détails, cela donne :

$$G(s)U(s) = \frac{1}{s+2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{Bs}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s+2}$$

avec

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{4 + \omega^2}$$

et en égalant les numérateurs

$$\omega = (A\omega + Bs)(s+2) + \frac{\omega}{4 + \omega^2}(s^2 + \omega^2)$$

cela donne

$$A = \frac{2}{4 + \omega^2}$$

et

$$B = -\frac{\omega}{4 + \omega^2}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse

$$y(t) = \frac{2}{4 + \omega^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{4 + \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{4 + \omega^2} e^{-2t} \quad (1.1)$$

*Remarque 3.* Le dernier terme de (1.1) décroît asymptotiquement (à cause de  $e^{-2t}$  en facteur, et donne lieu ainsi au transitoire mentionné précédemment) et disparaît pour laisser place au régime harmonique donné par les deux premiers termes. Il est possible de grouper ces deux premiers termes pour constituer  $\hat{y} = \sin(\omega t + \phi)$

Le régime harmonique est donné par

$$y(t) = \frac{2}{4 + \omega^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{4 + \omega^2} \cos(\omega t) = \hat{y} \sin(\omega t + \phi) \quad (1.2)$$

*Remarque 4.* On utilise un certain abus de notation en désignant par  $y(t)$  à la fois la réponse à condition initiale nulle donnée par (1.1) et la réponse harmonique. Ceci est possible s'il n'y a pas de confusion possible. Ici (1.1) est introduit pour justifier la réponse harmonique.

Si on considère à nouveau

$$G(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

mais sous forme de quotient de convolution à l'aide de l'opérateur de dérivation  $\mathfrak{d}$

$$\frac{1}{\mathfrak{d} + 2} = \frac{\{y(t)\}}{\{u(t)\}}$$

on a la relation entrée sortie

$$\{y(t)\} * (\mathfrak{d} + 2) = (\mathfrak{d} + 2) * \{y(t)\} = \{u(t)\}$$

Si la valeur des signaux est considérée nulle pour tout  $t < 0$ , on a la relation  $\mathfrak{d}\{u(t)\} = \{\frac{d}{dt}u(t)\} + u(0)$ .

En présence du régime harmonique, tout est sinusoïdal, et il est possible de considérer tous les signaux comme définis pour les valeurs du temps  $t < 0$ . Il n'est plus nécessaire de considérer les conditions initiales et l'opérateur  $\mathfrak{d}$  est remplacé par la simple dérivée  $\frac{d}{dt}$  et de supprimer les accolades. Vérifions que c'est bien le cas sur l'exemple précédent.

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\right)y(t) =$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{2\omega}{4+\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\omega^2}{4+\omega^2} \sin(\omega t) \right) + 2 \left( \frac{2}{4+\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{4+\omega^2} \cos(\omega t) \right) &= \left( \frac{\omega^2}{4+\omega^2} + \frac{4}{4+\omega^2} \right) \sin(\omega t) \\
&= \frac{\omega^2 + 4}{4 + \omega^2} \sin(\omega t) \\
&= \sin(\omega t) \\
&= u(t)
\end{aligned}$$

### 1.2.1 Régime harmonique complexe

En introduisant les signaux complexes  $y(t) \in \mathbb{C}$ , il est possible de simplifier les calculs de manière subséquente. De plus, cela permet d'obtenir le régime harmonique à partir de la fonction de transfert par simple remplacement de la variables  $s$  par  $j\omega$ . Contrairement à un signal où cela n'était pas possible à cause du comportement pour  $t < 0$  (rappelons la différence entre  $\{\cos(\omega t)\}$  et  $\cos(\omega t)$ , (cf. chapitre sur la convolution et les signaux entrée-sortie et également l'introduction de ce chapitre), la restriction à l'axe imaginaire  $s = j\omega$  de la transformée de Laplace  $G(s) \in \mathbb{C}$  donne un nombre complexe qui donne à la fois le gain en amplitude et le déphasage d'un signal sinusoïdal pour une pulsation  $\omega$  donnée.

L'expression  $G(j\omega)$  est appelée la fonction de transfert harmonique.

**Définition 1.** La réponse harmonique complexe est la réponse en équilibre dynamique d'un système dynamique linéaire stationnaire causal  $y(t) = \hat{y}e^{j\omega t + \phi}$  lorsque l'entrée est un un phaseur complexe  $u(t) = e^{j\omega t}$ .

*Remarque 5.* Comme pour le cas réel, la réponse harmonique complexe est le comportement asymptotique quelles que soient les conditions initiales pour un système BIBO stable. Pour les systèmes instables, c'est un équilibre dynamique oscillatoire qui apparaît que pour des conditions initiales spécifiques.

Reprenons l'exemple de

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

En prenant la transformée de Laplace de l'entrée

$$u(t) = e^{j\omega t} \leftrightarrow \frac{1}{s-j\omega} = U(s)$$

la transformée de Laplace de la sortie devient

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+2} \frac{1}{s-j\omega} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-j\omega}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s-j\omega} = \frac{1}{-2-j\omega}$$

et

$$B = \lim_{s \rightarrow j\omega} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{j\omega+2}$$

ce qui conduit à

$$Y(s) = \frac{1}{-2-j\omega} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-j\omega}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse

$$y(t) \leftrightarrow -\frac{1}{2+j\omega} e^{-2t} + \frac{1}{j\omega+2} e^{j\omega t} \quad (1.3)$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  le premier terme s'annule et il ne reste que le régime harmonique complexe, avec le même abus de notation de désigner (1.3) et (1.4) par  $y(t)$ .



$$y(t) = \frac{1}{j\omega + 2} e^{j\omega t} \quad (1.4)$$

*Remarque 6.* On constate que le régime harmonique est obtenu lorsque la variable  $s$  est remplacée par  $j\omega$ . En effet le facteur devant  $e^{j\omega t}$  dans (1.4) est bien  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ .

**Définition 2.** On appelle  $G(j\omega)$  la fonction de transfert harmonique. C'est un nombre complexe pour  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Theorem 1.** Lorsque le système est BIBO stable, le régime harmonique complexe asymptotique est donné par

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t}$$

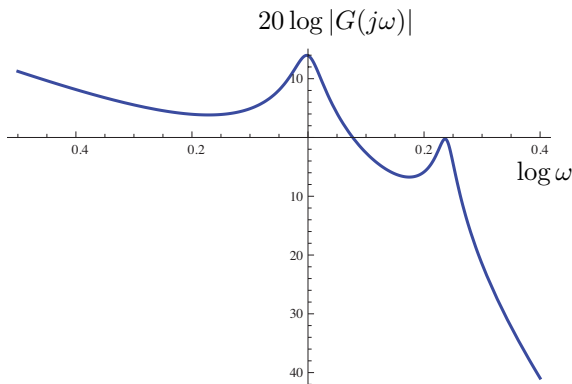
quelles que soient les conditions initiales.

Démonstration : Il suffit d'effectuer la décomposition en éléments simples. On procède comme dans l'exemple conduisant à partir de (1.3) d'établir (1.4).

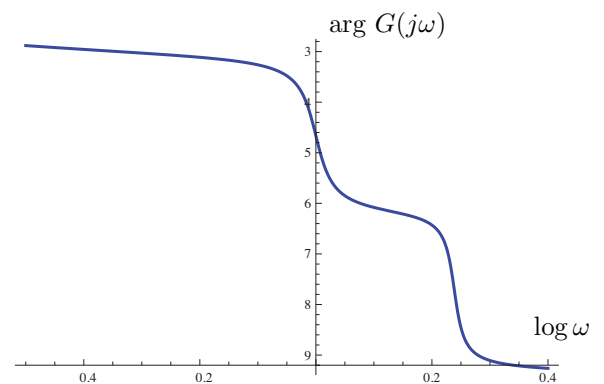
### 1.3 Le diagramme de Bode

On représente  $G(j\omega)$  par deux graphiques. Un graphique qui représente le module de  $G(j\omega)$  en échelle logarithmique (avec en abscisse le logarithme des pulsations  $\log \omega$ , ou  $\omega$  en échelle logarithmique). Et un deuxième graphique qui représente l'argument de la réponse harmonique. Ceci donne par exemple pour l'immeuble avec deux étages les graphiques suivants :

Module



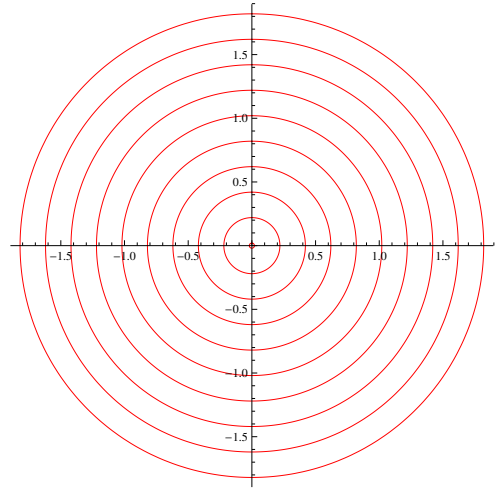
Phase



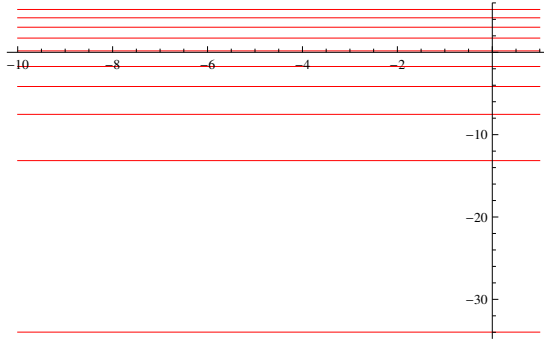
#### 1.3.1 Lien entre le diagramme de Bode et le diagramme de Nyquist

Le gain de la fonction de transfert harmonique  $|G(j\omega)|$  donne un nombre réel qui est le facteur d'amplification. Ce nombre correspond à un cercle dans le diagramme de Nyquist et à une ligne horizontale dans le diagramme de Bode en module.

Module constant dans Nyquist



Module constant dans Bode



## 1.4 Esquisse asymptotique du diagramme de Bode

### 1.4.1 Les systèmes non résonants, pôles réels simples

Dans un premier temps on peut calculer le gain statique  $G(0)$  si celui-ci est bien défini, autrement dit en absence de pôles à l'origine. Si c'est le cas le diagramme de Bode asymptotique commence par une droite horizontale à la hauteur  $-20 \log_{10} G(0)$  en [dB].

Lors la présence de pôles à l'origine (effet intégrateur), on compte le nombre de ceux-ci (le nombre d'intégrateurs), disons  $l$ . Le diagramme de Bode commence par une pente négative de  $l \times 20$  [dB/decade], ce qui signifie une pente de  $-20 \times l$  [dB] chaque fois que la pulsation est multipliée par 10. Pour déterminer le point de départ, il suffit de calculer une fois  $20 \log_{10} |G(j\omega_0)|$  avec  $\omega_0$  la pulsation du début du dessin. La valeur  $\omega_0$  est toujours différente de 0, car l'échelle horizontale est logarithmique et la pulsation  $\omega_0$  correspond donc à l'abscisse  $-\infty$ . Pour la suite du dessin, la fonction de transfert est factorisée pour faire apparaître les zéros et les pôles. Dans ce paragraphe ceux-ci sont considérés tous réels. En conséquence,

$$G(s) = \frac{\gamma(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s^l(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

On considère également que le système est causal, c.-à-d.  $n \geq m$ . Une fois la factorisation effectuée, on classe les pôles et les zéros ensembles par ordre des valeurs absolues en commençant par la plus petite vers la plus grande valeur absolue, et on représente le résultat sous la forme d'un tableau. On laisse une colonne vide entre les zéros/pôles. Dans la colonne vide, on indique +20 [dB/dec] si on se trouve à droite d'un zéro, et -20 [dB/dec] si on se situe à droite d'un pôle. Par exemple, pour un système avec  $m = 2$  et  $n = 3$  avec

$$|p_1| < |z_1| < |p_2| < |z_2| < |p_3|$$

cela donne le tableau

nb integ.	$ p_1 $	$ z_1 $	$ p_2 $	$ z_2 $	$ p_3 $
	-20 [dB/dec]	+20 [dB/dec]	-20 [dB/dec]	+20 [dB/dec]	-20 [dB/dec]

L'idée de ce tableau revient à examiner l'effet de la pulsation juste après l'apparition d'un pôle/zéro.

Par exemple, supposons un zéro  $z_i$  réel ou négatif, et examinons l'effet de

$$j\omega - z_i$$

lorsque  $\omega$  varie entre  $\omega = |z_i|$  et  $\omega \gg |z_i|$ . On constate que l'on ajoute 20 [dB] chaque fois que l'on multiplie par 10 la pulsation  $\omega_1 = |z_i|$  à cause du logarithme et du fait que le zéro se situe au numérateur de la fonction de transfert.

Lors d'un pôle, on examine l'effet de

$$\frac{1}{j\omega - p_i}$$

avec  $p_i$  réel positif ou négatif. Lorsque  $\omega$  varie entre  $\omega = |p_i|$  et  $\omega \gg |p_i|$ . On constate que l'on soustrait 20 [dB] chaque fois que l'on multiplie par 10 la pulsation  $\omega_i = |p_i|$  à cause du logarithme et du fait que le pôle se trouve au dénominateur de la fonction de transfert.

On prend les valeurs absolues des pôles/zéros car on se place du point de vue de  $\omega$ .

Pour tracer le diagramme asymptotique en module, on dessine des traits penchés ou droits en commençant par une droite horizontale si le gain statique est défini (absence d'intégrateur) ou par une droite de pente négative (en présence d'intégrateurs). On progresse ensuite dans le tableau en corrigeant les pentes de la quantités qui apparaissent dans la colonne qui suit le pôle/zéro correspondant en reportant le changement de pente pour  $\omega$  correspondant à la valeur absolue du pôle/zéro et en augmentant la pente si c'est un zéro ou en diminuant la pente si c'est un pôle.

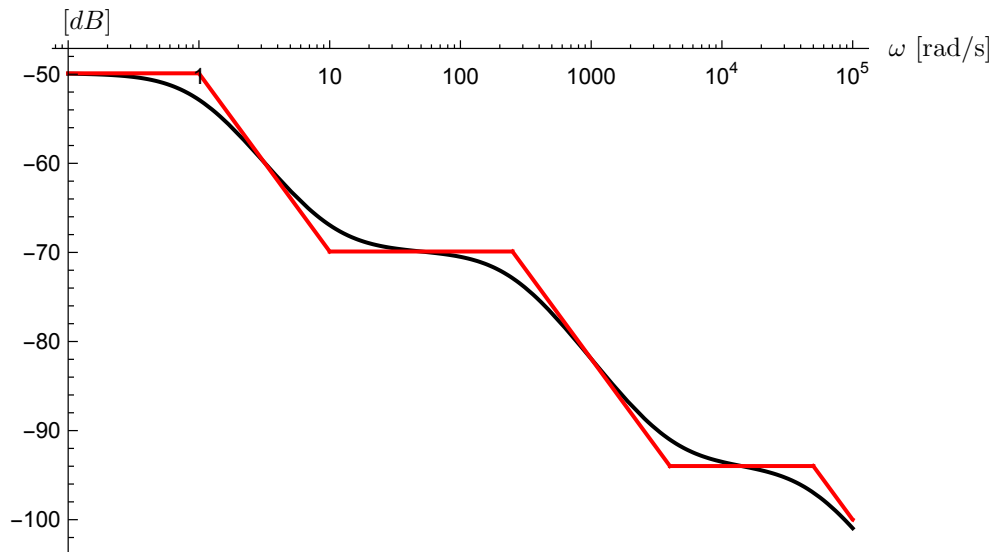
Par exemple pour

$$G(s) = \frac{(s - 10)(s + 4000)}{(s - 1)(s + 250)(s - 50000)}$$

On aboutit au tableau

	1	10	250	4000	50000	
nb integ.	-20 [dB/dec]	+20 [dB/dec]	-20 [dB/dec]	+20 [dB/dec]	-20 [dB/dec]	

Pour dessiner le diagramme asymptotique, comme il n'y a pas de pôle en 0 (pas d'intégrateur), on commence par une droite horizontale. Lorsque  $\omega = 1$  [rad/s] on trace une droite qui descend avec une pente de -20 [dB/dec]. Arrivé en  $\omega = 10$  [rad/s] on remonte la pente de 20 [dB/dec] ce qui donne une droite horizontale jusqu'en  $\omega = 250$ , et on continue de la sorte en respectant le tableau. Le résultat est illustré ci-après.



**Figure 1.1.** Diagramme de Bode en module. En rouge, le diagramme asymptotique. En noir, le diagramme exact. A chaque fréquence de coupure (coude), le diagramme réel est séparé du diagramme asymptotique de  $\pm 3$  [dB].

Les 3 [dB] provient du calcul

$$20 \log_{10} \left| \frac{1}{j + 1} \right| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ [dB]}$$

obtenu à partir de l'élément simple normalisé

$$\frac{1}{s+1}$$

et en posant  $s = j\omega$  et  $\omega = 1$  est la pulsation de coupure associée.

#### 1.4.2 Les systèmes résonants, pôles complexes conjugués

Pour tracer le diagramme de Bode de systèmes comportants des pôles complexes conjugué, on procède de manière similaire aux pôles réels simples, sauf que l'on groupe les pôles complexes conjugués par paires et on trace un diagramme par paire de pôles complexes. Autrement dit la factorisation de la fonction de transfert est effectuée de la manière suivante :

$$G(s) = \frac{\gamma(s-z_1)(s-z-2)\cdots(s-z_p)(s^2+a_1s+b_1)(s^2+a_2+b_2)\cdots(s^2+a_qs+b_q)}{s^l(s-p_1)\cdots(s-p_r)(s^2+\alpha_1s+\beta_1)\cdots(s^2+\alpha_ss+\beta_s)}$$

Avec, par exemple,  $(s^2 + \alpha_1s + \beta_1)$  qui représente  $(s - z_{q+1})(s - z_{q+1}^*)$  le produit correspondant aux pôles complexes conjugués  $z_{q+1}$  et  $z_{q+1}^*$ .

Examinons la fonction de transfert normalisée ( $\beta = 1$ , la fréquence de coupure autour de laquelle la fréquence de résonance apparaît est normalisée à  $\omega = 1$ )

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha s + 1} \quad (1.5)$$

Cette fonction de transfert servira de template pour tous les pôles complexes conjugués et il est donc bien de se familiariser avec avec une représentation précise des différents cas du paramètre  $\alpha$ . La figure suivante illustre le diagramme de Bode en amplitude pour les valeurs

$$\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.2, 1.5,$$

La valeur  $\alpha = 0.01$  correspond à la résonance la plus marquée et la valeur  $\alpha = 0.9$  correspond à la quasi disparition de la résonance. La valeur  $\alpha = 2$  (non représentée) correspond à la disparition des parties imaginaires car alors le dénominateur se factorise  $s^2 + 2s + 1 = (s+1)(s+1)$  pour faire apparaître une paire de pôles réels au même endroit à la pulsation  $\omega = 1$  et on peut traiter ce cas par la méthode des pôles réels. On obtiendra alors deux droites, la première horizontale jusqu'à  $\omega = 1$  et ensuite une droite de pente -40 [dB/dec] passé  $\omega = 1$ . La courbe réelle sera alors à -6 [dB].

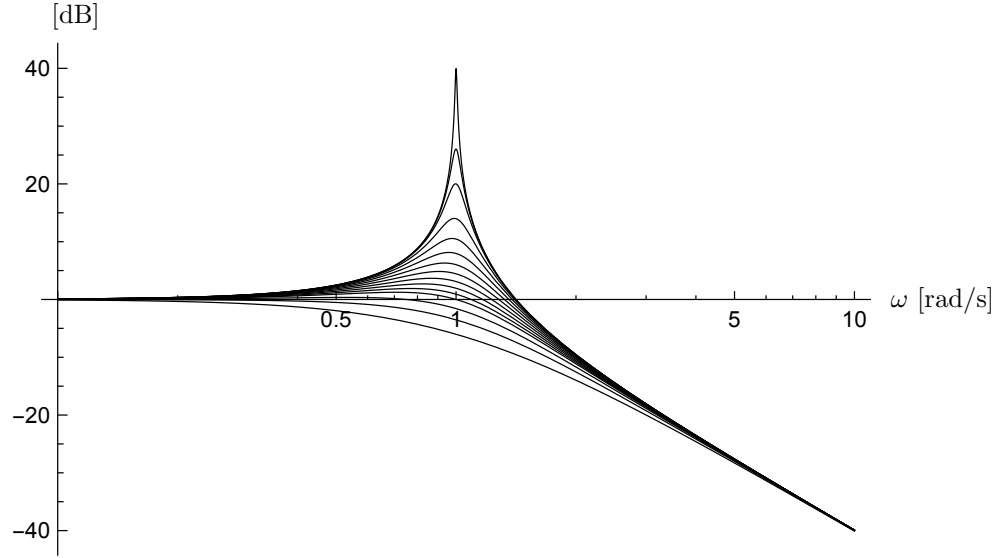
La phase est représentée à la figure 1.3. Le changement de phase entre 0 [rad] pour  $\omega = 0$  et  $-\pi$  [rad] pour  $\omega \rightarrow \infty$  est le plus abrupte lorsque la résonance est forte ( $\alpha = 0.01$ ) et la transition est moins appuyée lorsque  $\alpha$  augmente (résonance moins marquée).

Les diagrammes de Bode en module ne permettent pas de distinguer les systèmes stables des systèmes instables en boucle ouverte. Prenons par exemple les systèmes normalisés instables suivants

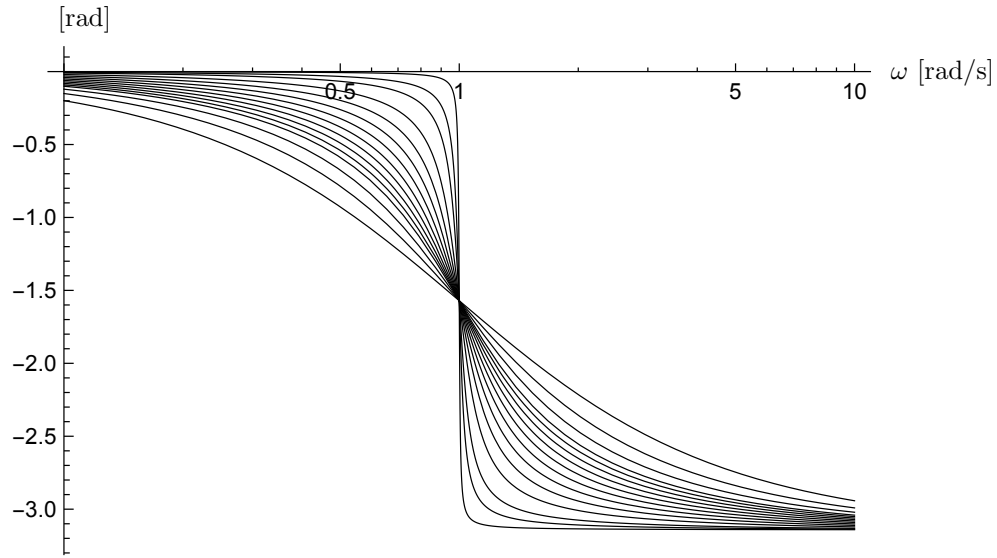
$$G_{ni} = \frac{1}{s^2 - \alpha s + 1}$$

associés aux systèmes stables donnés par  $G_n(s)$  formule (1.5) avec les mêmes  $\alpha > 0$ . Les diagrammes en module seront rigoureusement identiques à ceux représentés à la figure 1.2. Par contre, la phase progresse dans le sens inverse de  $\omega = 0$  vers  $\omega = +\infty$ . L'angle est positif cette fois et les phases sont représentées à la figure 1.4.

En ce qui concerne les zéros, il suffit d'effectuer une réflexion symétrique selon l'axe horizontal pour obtenir les diagrammes de Bode en module et en phase. En effet, l'utilisation du logarithme dans l'expression du module transforme la division en une soustraction (ce qui correspond à une réflexion symétrique selon l'axe horizontal). En ce qui concerne la phase, la division conduit à une soustraction des phases, ce qui correspond également à une réflexion symétrique. Le diagramme en module de la fonction de transfert



**Figure 1.2.** Diagramme de Bode en amplitude de la fonction de transfert  $G_n(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha s + 1}$  pour les valeurs  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 1.2, 1.5$ .

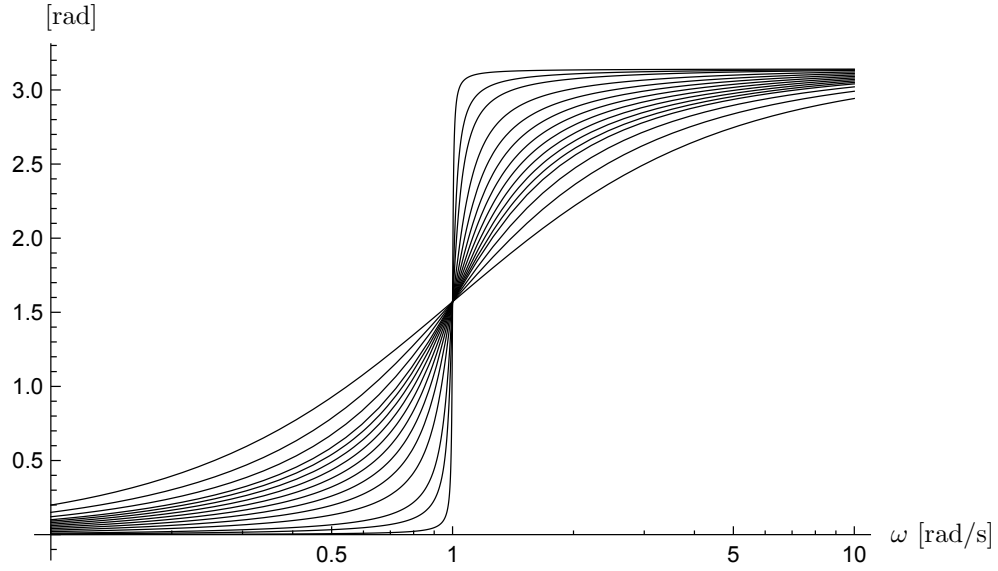


**Figure 1.3.** Diagramme de Bode en phase de la fonction de transfert stable  $G_n(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha s + 1}$  pour les valeurs  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 1.2, 1.5$ . Le flanc correspond à  $\alpha = 0.01$  et la courbe la moins infléchie à  $\alpha = 1.5$ . Toutes les courbes se coupent pour  $\omega = 1$  et donne  $-\frac{\pi}{2}$  [rad] à ce moment là. La phase indique mieux la pulsation de coupure que le diagramme de Bode en module.

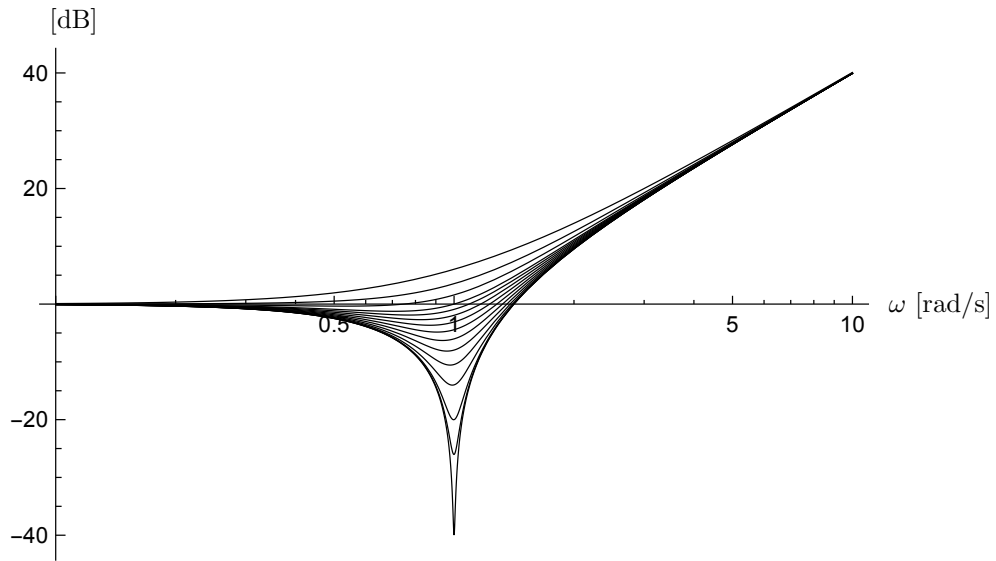
$$G_{nz}(s) = s^2 + \alpha s + 1 = \frac{1}{G_n(s)}$$

est donné à la figure 1.5 et la phase correspondante à la figure 1.6.

Le traçage des diagrammes procèdent de manière similaire à la section précédente concernant les pôles réels simples, en groupant chaque élément du second ordre ensemble et en utilisant la propriété du logarithme d'additionner les éléments simples correspondants lorsqu'ils sont multipliés. Il s'agit donc d'utiliser le diagramme normalisé correspondant et de le translater horizontalement pour obtenir la bonne pulsation de coupure et verticalement pour s'aligner avec l'asymptote de l'élément précédent (ou simplement d'ajuster le module pour être à la bonne hauteur).



**Figure 1.4.** Diagramme de Bode en phase de la fonction de transfert instable  $G_{ni}(s) = \frac{1}{s^2 - \alpha s + 1}$  pour les valeurs  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 1.2, 1.5$ . Le flanc correspond à  $\alpha = 0.01$  et la courbe la moins infléchie à  $\alpha = 1.5$ . Toutes les courbes se coupent pour  $\omega = 1$  et donne  $+\frac{\pi}{2}$  [rad] à ce moment là. La phase indique mieux la pulsation de coupure que le diagramme de Bode en module.



**Figure 1.5.** Diagramme de Bode en module de la fonction de transfert  $G_{nz}(s) = s^2 + \alpha s + 1$  pour les valeurs  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 1.2, 1.5$ .

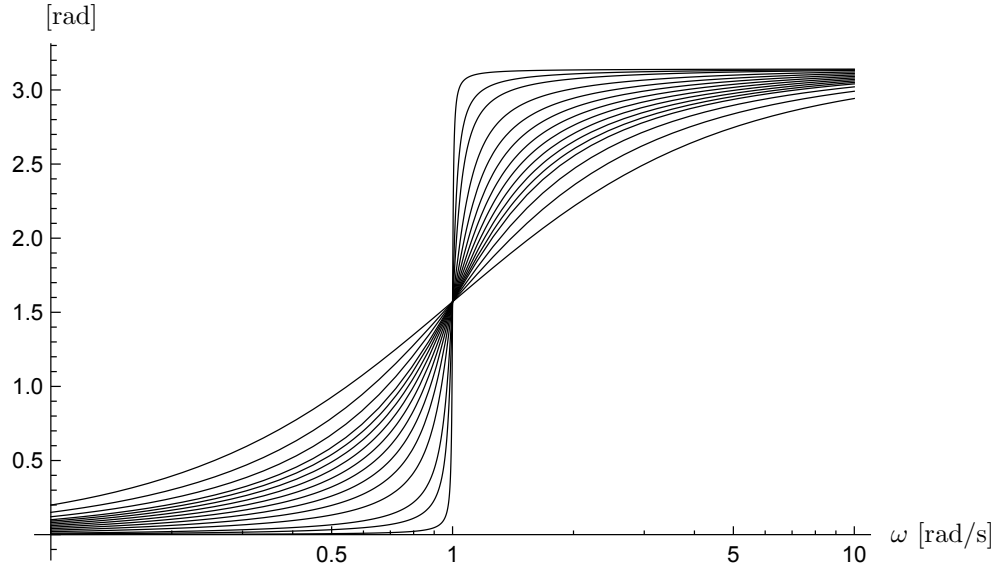
L'étape clé est de trouver la bonne courbe normalisée. Un exemple suffira pour illustrer la méthode. Considérons l'élément simple suivant

$$G_1(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$$

Pour déterminer l'élément normalisé procédons à une mise en échelle de la pulsation en posant

$$\Omega = \frac{\omega}{10}$$

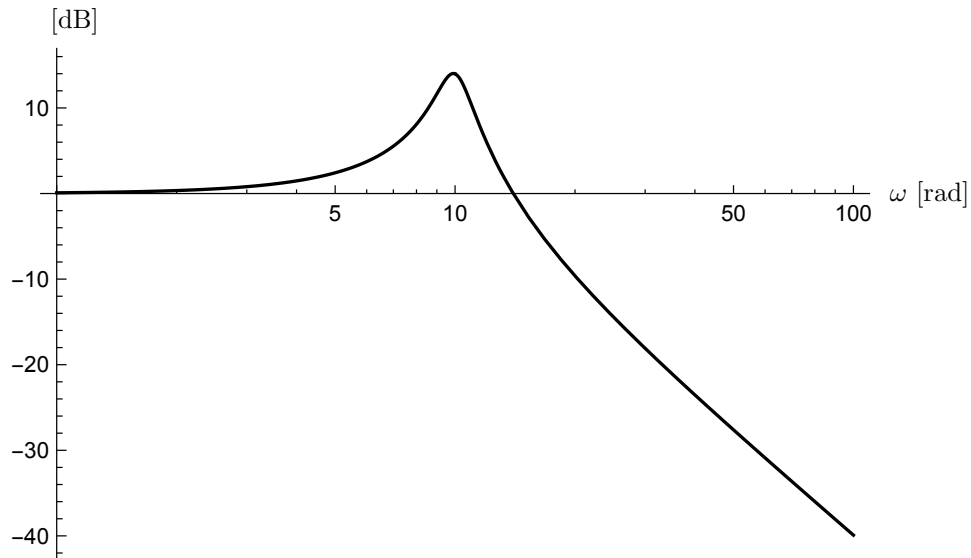
En posant  $s = 10w$  cela donne



**Figure 1.6.** Diagramme de Bode en phase de la fonction de transfert  $G_{nz}(s) = s^2 + \alpha s + 1$  pour les valeurs  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 1.2, 1.5$ . Le flanc correspond à  $\alpha = 0.01$  et la courbe la moins infléchie à  $\alpha = 1.5$ . Toutes les courbes se coupent pour  $\omega = 1$  et donne  $+\frac{\pi}{2}$  [rad] à ce moment là. La phase indique mieux la pulsation de coupure que le diagramme de Bode en module.

$$G_1(w) = \frac{100}{100w^2 + 20w + 100} = \frac{1}{w^2 + 0.5w + 1}$$

on obtient la courbe normalisée correspondant à  $\alpha = 0.5$  du diagramme normalisé. Il suffit alors de translater cette courbe pour centrer la pulsation de coupure et de la placer à  $\omega = 10$  ce qui correspond à la pulsation normalisée  $\Omega = 1$ . Le résultat est donné à la figure 1.7.



**Figure 1.7.** Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\frac{100}{s^2 + 2s + 100}$

La phase est obtenue de manière similaire en translatant la phase normalisée correspondant au bon  $\alpha$  vers la pulsation de coupure.

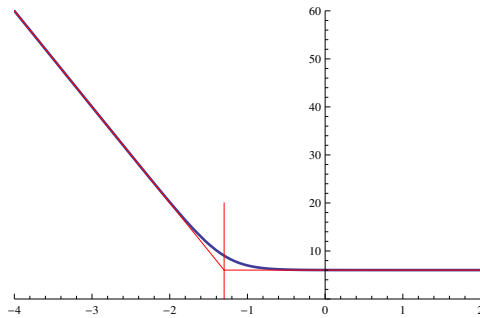
En résumé, pour le diagramme de Bode pour des éléments à paire complexes conjuguée, on introduit dans le colonnes du diagramme asymptotique, les pulsations de coupure associées ainsi que le facteur  $\alpha$  correspondant au diagramme normalisé. Cela permet de tracer le diagramme de manière approximative en superposant (additionnant) les diagrammes individuels.

## 1.5 Synthèse dans le diagramme de Bode

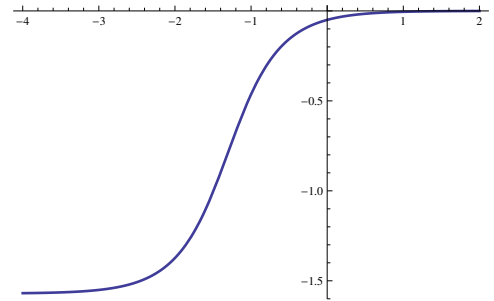
### 1.5.1 Diagramme de Bode des régulateurs simples

#### Diagramme de Bode du régulateur PI

Module  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$

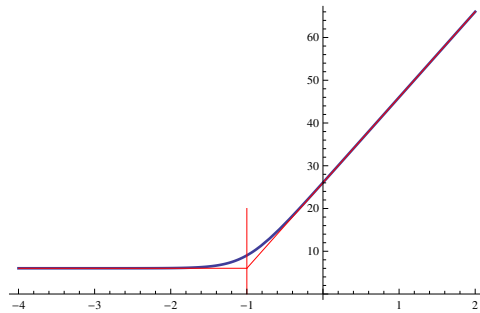


Argument  $\arg G(j\omega)$

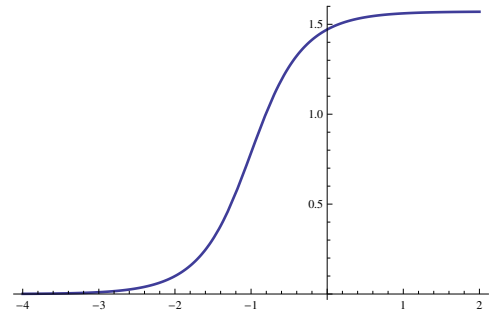


#### Diagramme de Bode du régulateur PD

Module  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$



Argument  $\arg G(j\omega)$



Les diagrammes asymptotiques en module sont dessinés en rouge fin dans les diagramme en module. Pour le PI, la droite descend de  $-20$  dB/decade jusqu'à  $\omega = \frac{1}{T_i}$  puis continue tout droit. La valeur asymptotique est  $20 \log_{10} K_p$ . Pour le PD, la droite est horizontale pour les petites pulsations et égal à  $20 \log_{10} K_p$  jusqu'à  $\omega = \frac{1}{T_d}$ , puis suit une droite de  $+20$  dB/decade. Le trait vertical rouge coupe la courbe réelle à  $\pm 3$  dB,  $+3$  dB pour le PI, et  $-3$  dB pour le PD.

En ce qui concerne le diagramme asymptotique en phase pour le PI (non représenté), il est constant et égal à  $-\frac{\pi}{2}$  pour  $\omega < \frac{1}{T_i}$ , constant et égal à  $0$  pour  $\omega > \frac{1}{T_i}$ . Il est égal à  $-\frac{\pi}{4}$  uniquement et exactement pour  $\omega = \frac{1}{T_i}$ . Quelque chose de similaire a lieu pour le diagramme asymptotique en phase du PD (non représenté), il est constant et égal à  $0$  pour  $\omega < \frac{1}{T_d}$ , constant et égal à  $\frac{\pi}{2}$  pour  $\omega > \frac{1}{T_d}$ . Il est égal à  $+\frac{\pi}{4}$  exactement pour  $\omega = \frac{1}{T_d}$ .

### 1.5.2 La règle d'or fondée sur le critère de Nyquist simplifié

#### Synthèse en asservissement dans le diagramme de Bode

Fondé sur le critère de Nyquist simplifié (le système est donc stable en boucle ouverte) l'idée est d'avoir un système proche d'un intégrateur en boucle ouverte autour du module unité, ce qui promet :

- la stabilité en boucle fermée



- une bonne marge de phase
- une bonne marge de gain

à condition que le module soit monotone décroissant à partir de la pulsation de croisement  $\omega_x$  (la pulsation telle que  $|G(j\omega_x)| = 1$ , module unité) et que le gain soit suffisamment grand pour les pulsations inférieures à la pulsation de croisement.

Une illustration de ce critère est de considérer un gain  $K = k \in \mathbb{R}$  avec un intégrateur

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Le diagramme de Bode en module de la boucle couverte  $kG(s) = \frac{k}{s}$  est une droite de pente -20 dB/decade et qui coupe l'axe des 0 dB (module 1) à la pulsation  $\omega = k$  (car alors  $|k/(jk)| = 1$ ).

Un tel système en boucle ouverte correspond à la fonction de transfert d'asservissement en boucle fermée

$$\frac{kG}{1+kG} = \frac{\frac{k}{s}}{1+\frac{k}{s}} = \frac{k}{s+k}$$

ce qui correspond à un premier ordre stable  $k > 0$ , sans statisme  $G(0) = 1$ . En ce qui concerne la régulation,

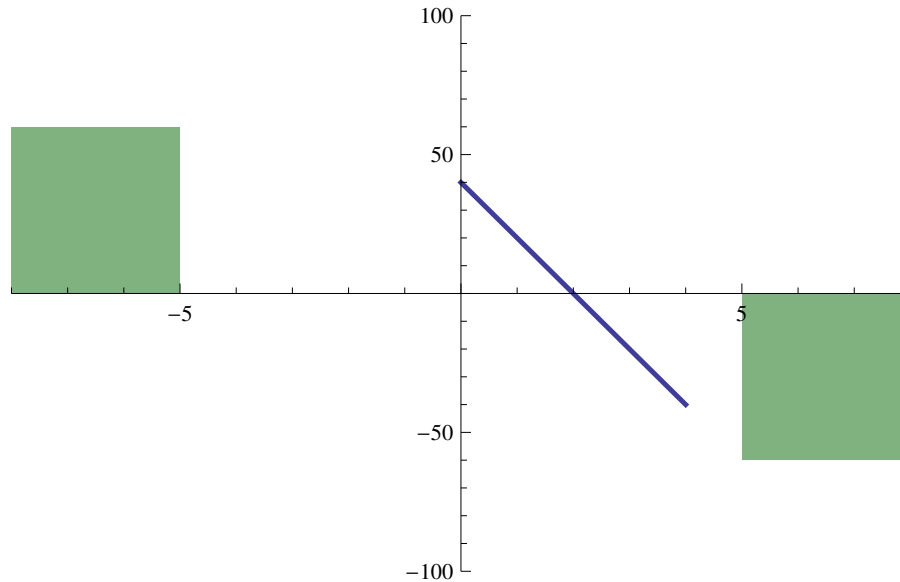
$$\frac{G}{1+kG} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{k}{s}} = \frac{1}{s+k}$$

et les perturbations asymptotiques sont rejetées car la valeur asymptotique est multipliée par  $\frac{1}{k}$ , et avec un  $k$  suffisamment élevé, les perturbations asymptotiques sont fortement atténuées.

La marge de phase est de  $\frac{\pi}{2}$  car  $\text{Arg}\left(\frac{k}{j\omega}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\forall \omega$ , et  $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

La marge de gain est infinie pour un intégrateur, car il est impossible de croiser le point  $-1$  quel que soit  $k$ .

Pour un système autre qu'un premier ordre, la règle consiste donc à se rapprocher le plus possible à un intégrateur en boucle ouverte autour de la pulsation de croisement  $\omega_x$ , de garantir un grand gain avant la pulsation de croisement et que le gain chute rapidement après la pulsation de croisement. Ceci est illustré à la figure suivante avec  $\omega_x = 2$  [rad/s].



En basse fréquence il faut un grand gain pour supprimer le statisme et rejeter les perturbations. Le diagramme de Bode en module doit se situer au dessus de la première zone verte à partir de la gauche.

En haute fréquence pour atténuer les bruits et les dynamiques négligées, il faut un petit gain. Le diagramme de Bode en module doit se situer en dessous de la deuxième zone verte.

La pulsation de croisement  $\omega_x$  fixe la vitesse de réponse (la constante de temps dominante  $\tau = \frac{1}{\omega_x}$ ).

## 1.6 Exemple

Nous allons illustrer la règle d'or ainsi que la compensation d'un pic de résonance Prenons l'immeuble à quatre étages décrits par la représentation d'état

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k & k & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ k & -2k & k & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & k & -2k & k & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & k & -k & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Avec comme valeurs numériques  $k = 20$ ,  $b = 0.5$ .

Les valeurs propres sont calculées avec la commande Matlab

```
>> eig(A)

ans =

-0.2500 + 8.4011i
-0.2500 - 8.4011i
-0.2500 + 6.8471i
-0.2500 - 6.8471i
-0.2500 + 4.4651i
-0.2500 - 4.4651i
-0.2500 + 1.5329i
-0.2500 - 1.5329i
```

On constate que les oscillations seront toutes amorties car la partie réelle  $-0.25$  est strictement négative. Les parties imaginaires donnent les pulsations des oscillations. Il y a quatre modes,  $\omega_1 = 1.5329$ ,  $\omega_2 = 4.4651$ ,  $\omega_3 = 6.8471$  et  $\omega_4 = 8.4011$ . Ces quatre pulsations peuvent représenter des fréquences de résonance en fonction de l'allure du diagramme de Bode autour de ces pulsations. Si le diagramme de Bode en module présente un maximum autour de ces fréquences, alors il y a une résonance à la fréquence correspondant au maximum. Le facteur d'amplification sera donné par la valeur maximum du diagramme de Bode en amplitude.

La fonction de transfert se calcule par

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

La commande Matlab associée est

```
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C,0)

>> num1

num1 =
```

```

1.0e+05 *
      0      0      0      0      0  0.0800  0.0800  3.2200  1.6000

>> den1

den1 =

1.0e+05 *
      0.0000  0.0000  0.0014  0.0021  0.0611  0.0602  0.8150  0.4000  1.6000

```

On peut entrer quelque chose de similaire à la main par

```

num = 160000;
den = [1 2 141.5 210.5 6105 6017.5 81500 40000 160000];

G = tf(num,den);

>> roots(den1)

ans =

-0.2500 + 8.4011i
-0.2500 - 8.4011i
-0.2500 + 6.8471i
-0.2500 - 6.8471i
-0.2500 + 4.4651i
-0.2500 - 4.4651i
-0.2500 + 1.5329i
-0.2500 - 1.5329i

>> roots(den)

ans =

-0.2500 + 8.4014i
-0.2500 - 8.4014i
-0.2499 + 6.8468i
-0.2499 - 6.8468i
-0.2500 + 4.4653i
-0.2500 - 4.4653i
-0.2500 + 1.5329i
-0.2500 - 1.5329i

```

Et on constate que la fonction de transfert  $G(s)$  contient les mêmes valeurs des pôles que les valeurs propres de la matrice  $A$ .

Pour constituer le régulateur, on va placer une paire de zéros complexes conjuguées sur le premier mode de résonance.

En lisant le diagramme de Bode en amplitude (et par calcul des valeurs propres) on a déterminé  $\omega_1 \approx 1.533$  [rad/s] avec

$$20 \log_{10} |G(j\omega_1)| \approx 11.7 \text{ [dB]}$$

Le deuxième mode est  $\omega_2 = 4.4653$  avec un module  $\approx 9.39$  [dB], donc plus atténué.

Pour placer la paire de zéros complexes conjuguées qui va compenser le premier mode, on choisit un polynôme du numérateur de la forme

$$s^2 + \alpha s + (\omega_r)^2$$

avec  $\omega_r$  proche et ajusté par rapport à  $\omega_1$ . Au dénominateur on choisira

$$s^2 + \beta s + (\omega_r)^2$$

Lorsque  $\alpha = 0$  on aura une antirésonance très marquée puisque les zéros seront purement imaginaires. En augmentant  $\alpha$  cela diminue le creux. Le paramètre  $\beta$  sera toujours choisit supérieur à  $\alpha$ . Si ce n'est pas le cas, au lieu d'un creux pour compenser la résonance, il y aura une bosse et donc cela amplifiera la résonance. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  seront choisis pour un compromis entre l'élargissement du pic et l'atténuation de la résonance. Un approche itérative par essai/erreur est illustrée ci-après.

```
bode([1 0.053 1.56^2],[1 0.2 1.56^2])
K = tf([1 0.053 1.56^2],[1 0.2 1.56^2]);
bode(K*G)
K = tf([1 1.5*0.053 1.56^2],[1 1.5*0.2 1.56^2]);
bode(K*G)
K = tf([1 3*0.053 1.56^2],[1 3*0.2 1.56^2]);
bode(K*G)
K = tf([1 5*0.053 1.56^2],[1 5*0.2 1.56^2]);
bode(tf([1 5*0.053 1.56^2],[1 5*0.2 1.56^2])* G)
bode(tf([1 8*0.053 1.56^2],[1 8*0.2 1.56^2])* G)
```

Finalement, le dernier essai donne la bonne compensation. Il faut maintenant fixer la bonne constante de temps en boucle fermée en ajoutant un premier ordre pour avoir la règle d'or  $-20$  [dB/dec].

```
K = tf([1 8*0.053 1.56^2],[1 8*0.2 1.56^2])*tf(0.01,[1 0.01]);
figure(2)
bode(K*G)
```

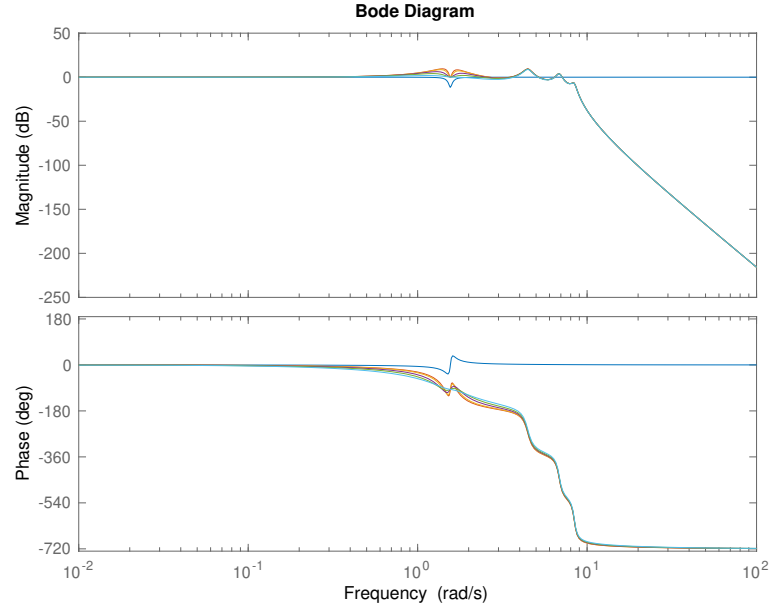
Le gain constant est ensuite choisi pour avoir un croisement à  $-20$  [dB/dec] à la pulsation requise pour avoir une constante de temps en  $1/\omega_x$  ou  $\omega_x$  est la pulsation de croisement à 0 [dB]. Dans cet exemple, on choisit un gain constant égal à  $+30$  [dB], et donc

```
K = 31.6228*tf([1 8*0.053 1.56^2],[1 8*0.2 1.56^2])*tf(0.01,[1 0.01]);
figure(2)
bode(K*G)

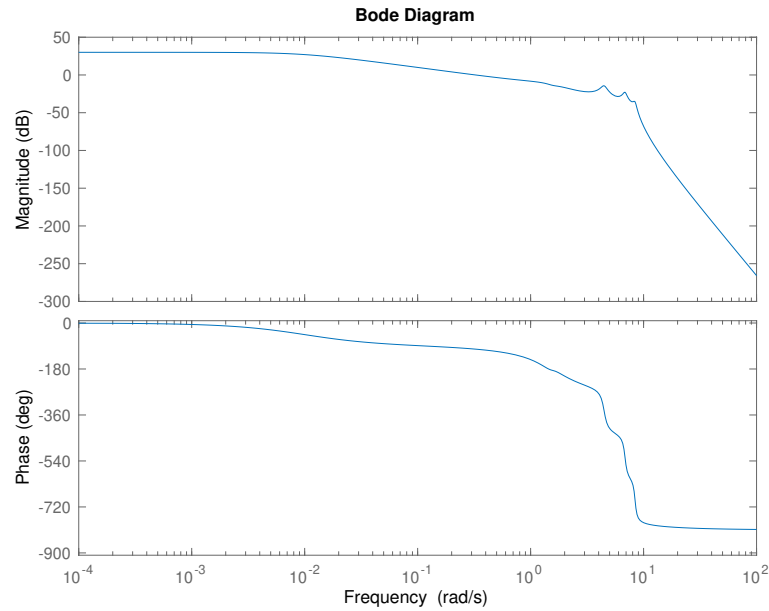
figure(3)
step(feedback(K*G,1))
hold on
step(G)
```

## 1.7 Exemple supplémentaire

Soit le système en boucle ouverte donné par sa fonction de transfert



**Figure 1.8.** Représentation du diagramme de Bode du système à régler (immeuble) avec plusieurs régulateurs différents qui atténue le premier mode en  $\omega = 1.5329$ . Le régulateur type est également représenté (la courbe avec une valeur asymptotique horizontale).

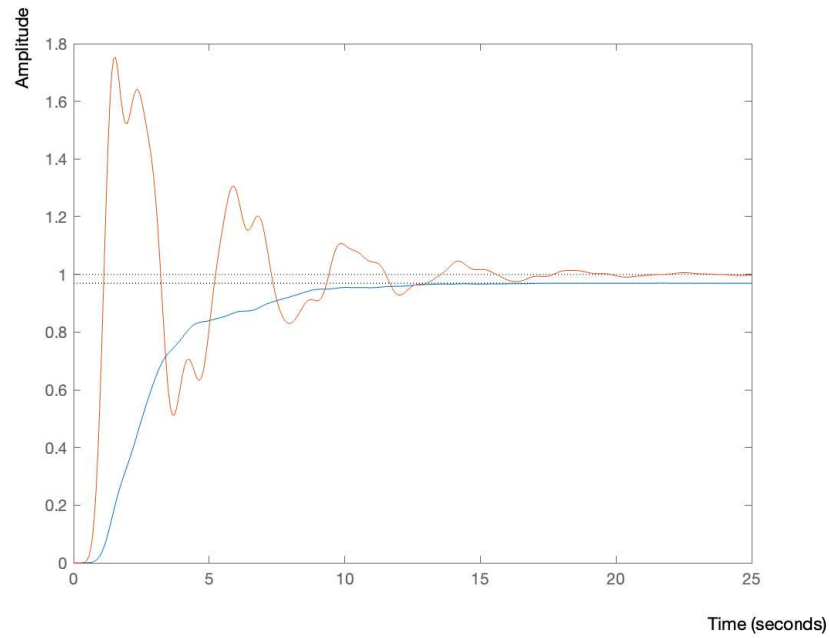


**Figure 1.9.** Représentation du diagramme de Bode du système réglé (immeuble + régulateur) avec un régulateur qui place un pôle réel autour de  $7 \times 10^{-3}$ . On distingue les trois derniers modes à  $\omega_2 = 4.4651$  [rad/s],  $\omega_3 = 6.8471$  [rad/s] et  $\omega_4 = 8.4148$  [rad/s]. Seul le premier pic à  $\omega_1 = 1.5329$  à été compensé. Les trois pics suivants sont suffisamment amortis par le régulateur pour ne pas devoir être compensés. On remarque la descente en  $-20$  dB/decade autour de 0 dB. On satisfait bien à la règle d'or.

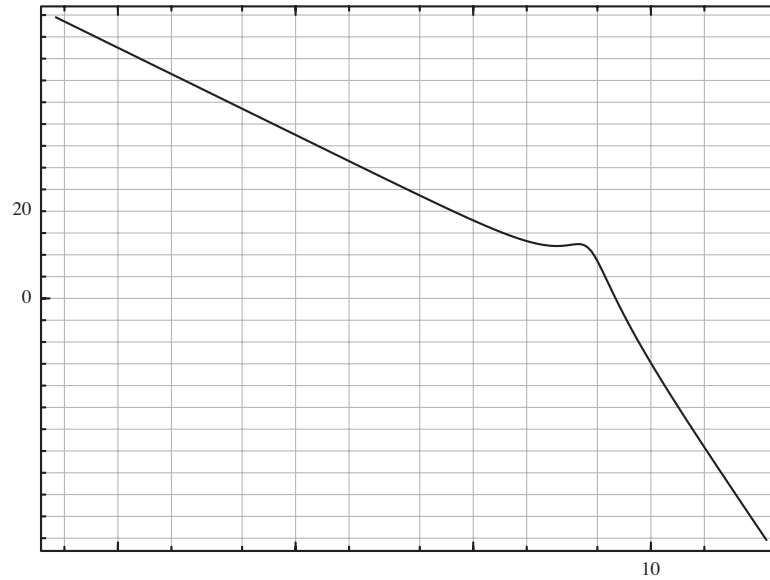
$$G(s) = \frac{150}{s^3 + 2s^2 + 20s} \quad (1.7)$$

On a représenté à la figure 1.11 le diagramme de Bode du module de la fonction de transfert à la figure 1.12 la phase de ce même diagramme de Bode. Un diagramme de Nyquist de  $G$  est donné à la figure 1.13.

On a également dimensionné un régulateur de la forme



**Figure 1.10.** En orange, la réponse indicielle de l'immeuble en boucle ouverte sans la structure anti-sismique. En bleu, la réponse indicielle de l'immeuble en boucle fermée avec la structure anti-sismique.



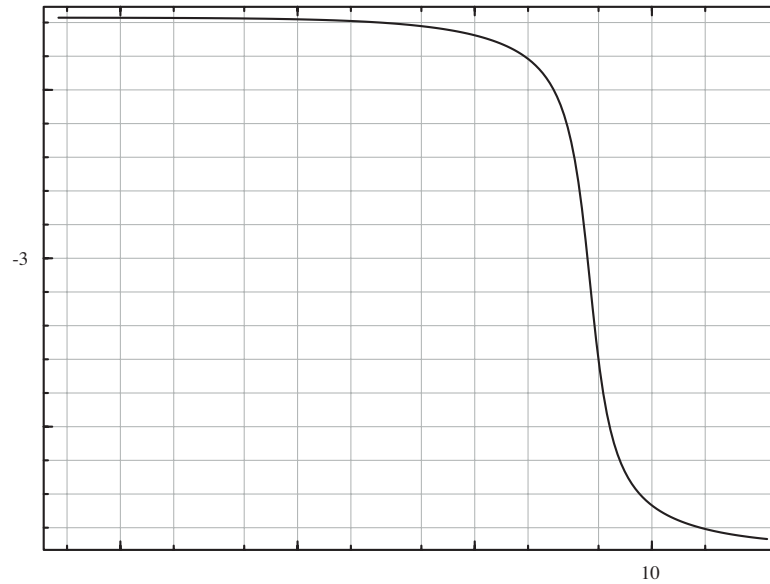
**Figure 1.11.** Diagramme de Bode du module en [dB] de la fonction de transfert donnée en (1.7). On a indiqué 10 [rad/s] sur l'axe horizontal et 0 et 20 [dB] sur l'axe vertical.

$$K(s) = \frac{s + a}{s + b} \quad (1.8)$$

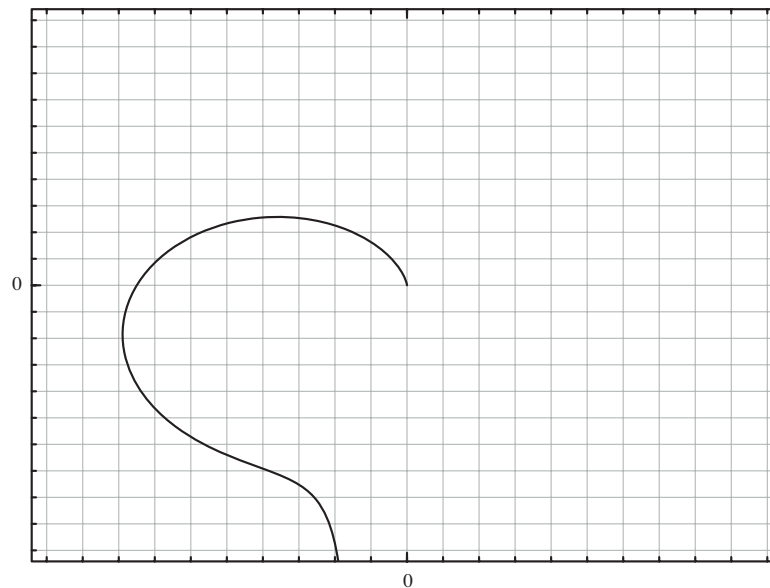
avec  $a < b$ . On a représenté avec le diagramme de Bode de  $G$ , celui du produit  $KG$ , en module, à la figure 1.14, et en phase, à la figure 1.15.

On demande :

1. Compléter les échelles sur tous les diagrammes.
2. Est-ce que le gain  $K = 1$  au lieu du  $K$  proposé stabilise  $G$  en boucle fermée ?



**Figure 1.12.** Diagramme de Bode en phase de la fonction de transfert donnée en (1.7). On a indiqué 10 [rad/s] sur l'axe horizontal et -3 [rad] sur l'axe vertical.



**Figure 1.13.** Diagramme de Nyquist de la fonction de transfert donnée en (1.7).

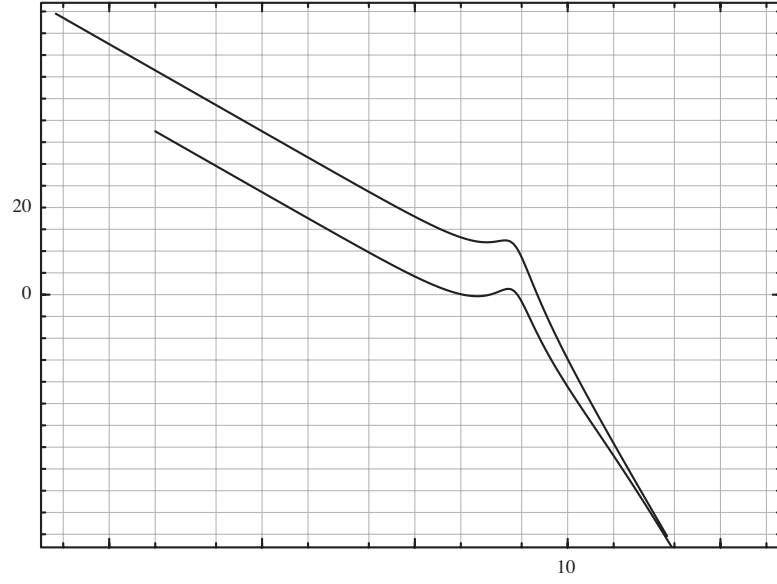
3. Déterminer  $a$  et  $b$  du régulateur  $K$  proposé cf. (1.8).
4. Est-ce que le  $K$  donné en (1.8) stabilise  $G$  en boucle fermée ?
5. Donner la fonction de transfert en boucle fermée d'asservissement résultant de  $K$  donné en (1.8).

*Corrigé du problème supplémentaire*

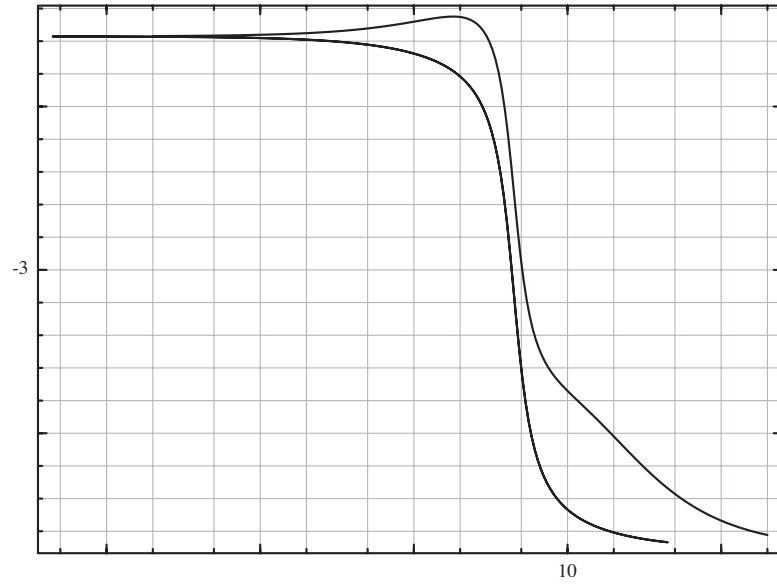
*1. Echelles sur les diagrammes.*

Les diagrammes sont représentés avec les échelles correspondantes.

Pour la Figure 1, le 10 indiqué est en [rad/s] ainsi pour trouver l'amplitude, il suffit de remplacer  $s$  par  $j10$  dans la fonction de transfert, cela donne en échelle logarithmique



**Figure 1.14.** Diagramme de Bode en module ([dB]) de  $G$  et de  $KG$  avec  $K$  donné par (1.8).



**Figure 1.15.** Diagramme de Bode en phase de  $G$  et de  $KG$  avec  $K$  donné par (1.8).

$$\begin{aligned}
 20 \log_{10}(|G(j10)|) &= 20 \log_{10} \left| \frac{150}{-j 1000 - 200 + 200j} \right| \\
 &= 20 \log_{10} \left( \frac{150}{\sqrt{(200 - 1000)^2 + 200^2}} \right) \\
 &= 20 \log_{10} 0.1819 = -14.8 \text{ [dB]}
 \end{aligned}$$

Ensuite pour obtenir les différentes abscisses, il faut extraire l'intégrateur de la fonction de transfert. Cet intégrateur domine en basse fréquence et il est responsable de -20 [dB] par décade. A basse pulsation, on peut



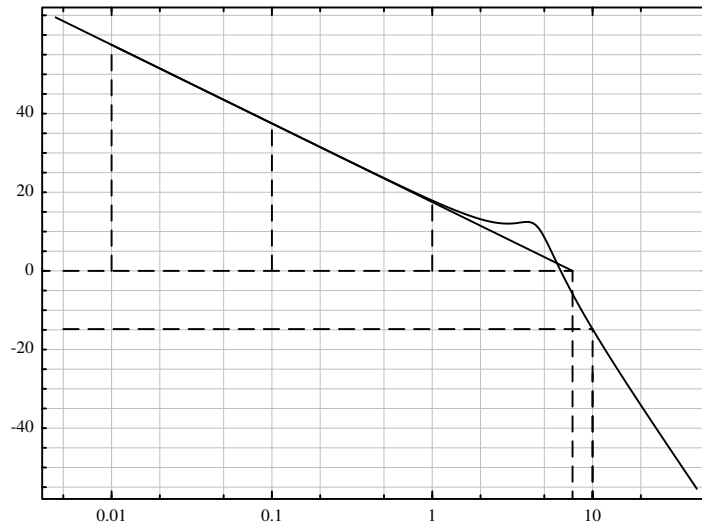
factoriser la fonction de transfert de la manière suivante

$$G(s) = \frac{150}{s^3 + 2s^2 + 20s} = \frac{150}{20s} \frac{20}{s^2 + 2s + 20} \approx \frac{150}{20s}$$

Cette approximation a comme module 1 exactement lorsque  $\omega = \frac{150}{20} = 7.5$  [rad/s]. On a reporté à la figure 1.16 un trait vertical qui vient coupé l'approximation de la fonction de transfert  $\frac{150}{20s}$  (intégrateur) exactement à 0 [dB]. On a également illustré le résultat précédent ainsi que les valeur verticales pour  $\omega = 1, 0.1, 0.01$ . Les valeurs en décibels de  $\frac{150}{20j\omega}$  pour ces pulsations sont données dans le tableau

$\omega$ [rad/s]	$20 \log_{10} \left  \frac{150}{20j\omega} \right $
7.5	0 [dB]
1	$20 \log_{10} \left( \frac{150}{20} \right) = 17.5$ [dB]
0.1	$20 \log_{10} \left( \frac{150}{2} \right) = 37.5$ [dB]
0.01	$20 \log_{10} \left( \frac{150}{0.2} \right) = 57.5$ [dB]

On a représenté des traits verticaux allant depuis 0 [dB] jusqu'aux valeurs données par le tableau aux pulsations correspondantes (cf. Figure 1.16). Ceci permet de compléter l'échelle en ordonnée en y inscrivant 20, 40, -20, -40 [dB], etc.



**Figure 1.16.** En plus de  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$  (dont on remarque la bosse correspondant à une résonance), On a représenté l'intégrateur  $20 \log_{10} \left| \frac{150}{j\omega} \right|$  ainsi que des traits verticaux aux pulsations  $\omega = 0.01, 0.1, 1, 7.5, 10$  [rad/s]. On a une pente de -20 [dB/decade]. On a également reporté les -14.8 [dB] que l'on a calculé pour la fonction de transfert  $G(s)$  à la pulsation  $\omega = 10$  [rad/s].  $\omega = 7.5$  [rad/s] correspond au 0 [dB] de l'intégrateur  $\frac{150}{20s}$  qui domine le comportement en basse fréquence dans la fonction de transfert  $G(s)$ .

En ce qui concerne la phase, on a deux indications, en abscisse 10 [rad/s] et en ordonnée -3 mais sans unité. On soupçonne des [rad]. Pour confirmer ceci calculons la phase pour  $\omega = 10$  [rad/s]

$$\begin{aligned} \arg G(j10) &= \arg \frac{150}{-j1000 - 200 + 200j} = -\arg -800j - 200 \\ &= -(\pi + \arctan(4)) = -(\pi + 1.325817) = -4.46741 \text{ [rad]} \end{aligned}$$

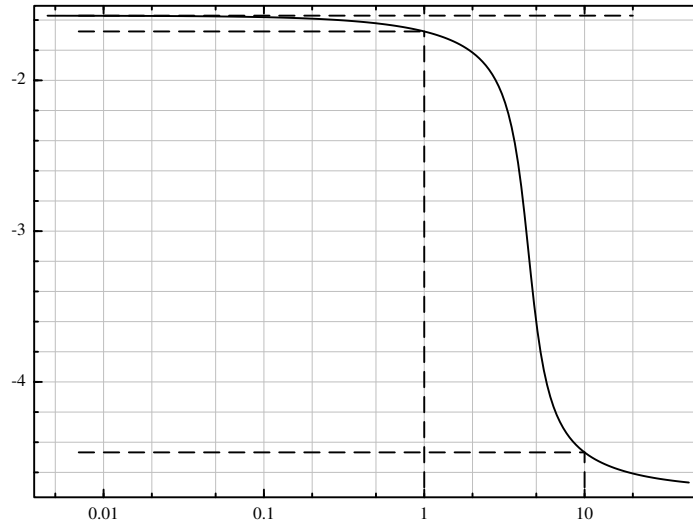
Calculons également la phase pour  $\omega = 1$  [rad/s]

$$\begin{aligned}
\arg G(j1) &= \arg \frac{150}{-j - 2 + 20j} = 0 - \arg(19j - 2) \\
&= 0 - \pi + \arctan\left(\frac{19}{2}\right) = -\pi + 1.465919388 \\
&= -1.67567 \text{ [rad]}
\end{aligned}$$

Pour les basses pulsations on a l'argument d'un intégrateur

$$\arg G(j\omega) \approx \arg \frac{150}{20j\omega} = -\frac{\pi}{2} = -1.5708 \text{ [rad]}$$

On a représenté les quantités calculées sur la figure 1.17 ce qui permet de compléter l'échelle horizontale en échelle logarithmique faisant apparaître  $\omega = 1$  (pour l'angle  $-1.67567$  calculé) et ensuite de proche en proche par facteur de 10, à savoir  $\omega = 0.1$  et  $\omega = 0.01$ . La valeur  $-3$  indique bien des [rad].



**Figure 1.17.** Diagramme de phase de  $G(s)$ . On a représenté l'argument  $\arg G(j10) = -4.46741$  ainsi que  $\arg G(j1) = -1.67567$  calculé à partir de  $G(s) = \frac{150}{s^3 + 2s^2 + 20s}$ . On également représenté un trait horizontal supérieur à  $-1.5708$ . Toutes les unités sur l'ordonnée sont ainsi confirmées être des radians.

En ce qui concerne le diagramme de Nyquist, il faut par exemple déterminer le point avec une partie imaginaire nulle. Ce point est ainsi l'intersection sur l'axe réel avec l'ordonnée nulle.

$$\begin{aligned}
0 &= \Im G(j\omega) = \Im \left( \frac{150}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + 20j\omega} \right) \\
0 &= \Im ((20\omega - \omega^3)j - 2\omega^2) \\
&= \omega(20 - \omega^2)
\end{aligned}$$

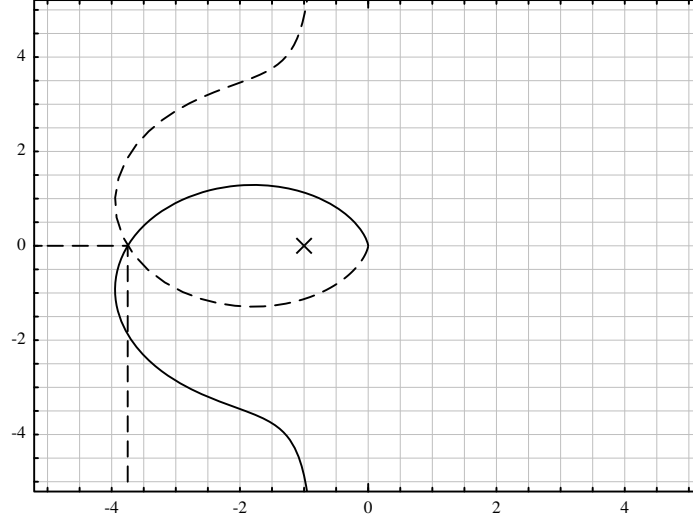
On trouve  $\omega = 0$  avec comme valeur infinie et

$$\omega = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5} \approx \pm 4.47 \quad [\text{rad/s}]$$

La valeur de du transfert à cette pulsation est purement réelle et donnée par

$$G(j2\sqrt{5}) = \frac{150}{-2 \times 20} = -\frac{15}{4} = -3.75$$

On peut donc inscrire cette valeur sur le graphique et compléter ainsi les échelles en abscisse et ordonnée. Ceci est représenté dans la figure 1.18.



**Figure 1.18.** Le point d'intersection avec l'axe réel négatif a lieu lorsque  $\omega = \pm 2\sqrt{5} \approx \pm 4.47$ . La valeur correspondante est  $G(\pm j2\sqrt{5}) = -3.75$ . On a représenté des traits hachurés rectilignes pour mettre en évidence ce résultat. Il permet de compléter les échelles en  $x$  et en  $y$ . La courbe est complétée avec la courbe hachurée qui correspond aux pulsations négatives,  $\omega < 0$

## 2. Stabilité avec rétroaction unité.

Si un gain proportionnel pur de  $K = 1$  est appliqué, cela conduira à un comportement en boucle fermée instable. En effet, on applique le critère de Nyquist simplifié. En regardant la figure 1.18, on constate que le contour complet encercle le point  $-1$  qui est représenté avec une croix.

*Remarque 7.* On remarque que le pôle en  $s = 0$  n'est pas compté comme un pôle dans le demi plan droit de la boucle ouverte. La justification est que l'on peut prendre une petite modification du contour initial qui est l'axe imaginaire lorsqu'on applique le critère de Nyquist. Tout se passe donc comme si la fonction de transfert est stable en boucle ouverte avec aucun pôle dans le demi-plan droit. On applique donc le critère de Nyquist simplifié.

## 3. Valeurs de $a$ et $b$ pour le régulateur proposé.

Il faut utiliser la figure 4 où est représenté le produit  $KG$  qui est sous la courbe de  $G$ . Le régulateur atténue donc en basse pulsation ainsi  $b > a$ . On remarque également que l'atténuation est environ de 15 [dB]. On en déduit

$$\frac{a}{b} = 10^{-15/20} = 0.1778$$

On pose donc  $a = 0.1178b$ . On utilise ensuite le diagramme de phase de la Figure 5 avec les échelles en radians que l'on a établi. On s'intéresse à la différence de phase la plus marquée. Par exemple pour  $\omega = 10$  [rad] la différence est bien prononcée. On peut donc utiliser cette information pour déterminer  $b$ .

Nous avons obtenu la phase de  $-4.46741$  [rad] en calculant celle-ci pour  $\omega = 10$  [rad/s], i.e.  $\arg(G(j10)) = -4.46741$ . En observant la figure 5, le produit  $KG$  a une phase valant approximativement  $-3.78$  ce qui donne

$$\arg K(j10) = \arg(K(j10)G(j10)) - \arg(G(j10)) = -3.78 - (-4.46741) = 0.68741$$

Autrement dit, en posant  $\alpha = 0.1778$  et  $\beta = 0.68741$

$$\arg \frac{j10 + \alpha b}{j10 + b} = \beta$$

$$\arg \frac{-(j10 + \alpha b)(j10 - b)}{100 + b^2} = \beta$$

$$\arg(100 - \alpha b 10 j + b 10 j + \alpha b^2) = \beta$$

et en faisant le rapport de la parti imaginaire sur la partie réelle

$$\tan(0.68741) = \frac{10b(1 - \alpha)}{100 + \alpha b^2}$$

ce qui conduit à la quadratique en l'inconnue  $b$

$$\alpha \tan(\beta) b^2 - 10(1 - \alpha) b + 100 \tan(\beta) = 0$$

et donc

$$b = \frac{10(1 - \alpha) \pm \sqrt{100(1 - \alpha)^2 - 400\alpha \tan^2(\beta)}}{2\alpha \tan(\beta)}$$

$$\approx \frac{8.222 \pm \sqrt{19.6645}}{0.2919} = \begin{cases} 43.36 \\ 12.975 \end{cases}$$

on a ainsi soit  $b \approx 13$  soit  $b \approx 43$  et donc deux choix possibles pour  $K$  :

$$K_1 = \frac{s + 2.31}{s + 13}$$

$$K_2 = \frac{s + 7.7}{s + 43}$$

#### 4. Est-ce que $K$ stabilise la boucle fermée ?

Il s'agit de vérifier que le point  $-1$  n'est pas encerclé par le diagramme de Nyquist. L'ordinateur étant indisponible pendant l'examen, on se contente d'obtenir les marges de phase et de gain en examinant les figures 4 et 5.

*Marge de phase.*

La courbe inférieure dans le diagramme de la figure 4 coupe 0 [dB] en grosso modo deux valeurs. Une première fois juste après la première graduation après 1 [rad/s] et une seconde à la deuxième graduation juste avant 10 [rad/s]. En donnant 51 unité entre 1 [rad/s] et 10 [rad/s], la deuxième graduation est située à la fraction  $36/54 \approx 0.666$ .

$$\omega = 10^{36/54} \approx 4.64 \text{ [rad/s]}$$

En examinant alors la figure 5, on trouve la phase

$$\arg K(j4.64)G(j4.64) \approx -2.8 \text{ [rad]}$$

La marge de phase

$$\phi = \pi - 2.8 = 0.34 \text{ [rad]}$$

ce qui donne en degré

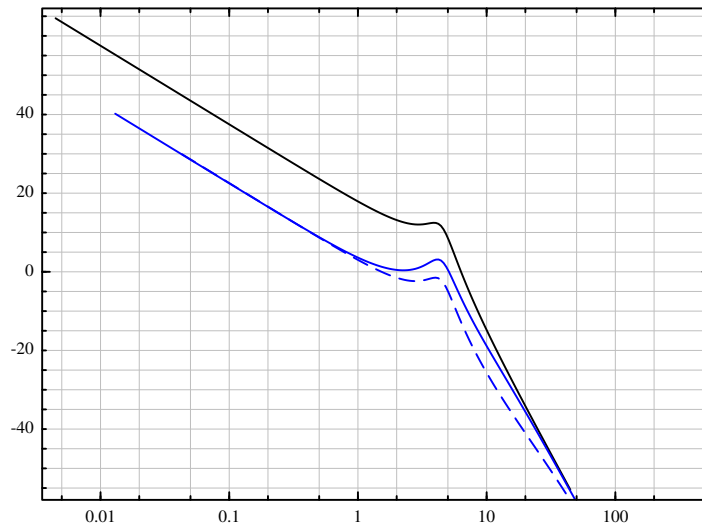
$$\phi = 0.34 \frac{180}{\pi} \approx 19.57 [\text{deg.}]$$

*Marge de gain.*

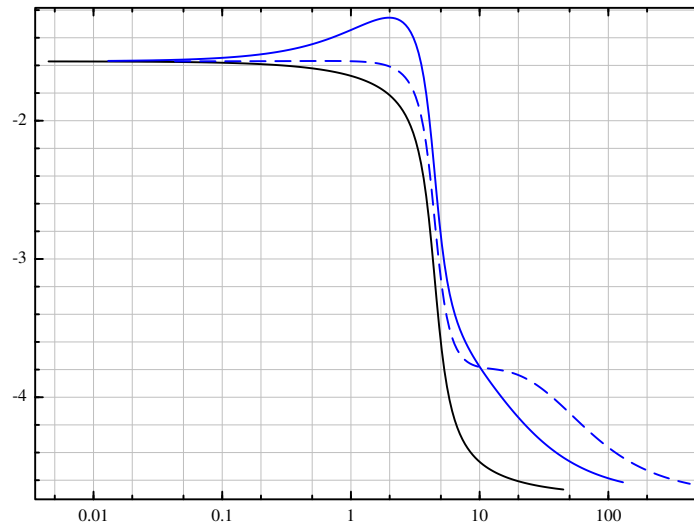
Il faut cette fois se placer un peu après -3 sur le graphique de la figure 5 et remonter ensuite examiner ce qui se passe sur la figure 4. Comme  $\pi = -3.14 < -3 < -2.8$  et que la courbe supérieure de la figure 4 est monotone décroissante à partir de  $-2.8$  [rad/s], on garantit de s'écarter et de ne pas encercler le point  $-1$ .

Le système est stabilisé en boucle fermée par le régulateur proposé.

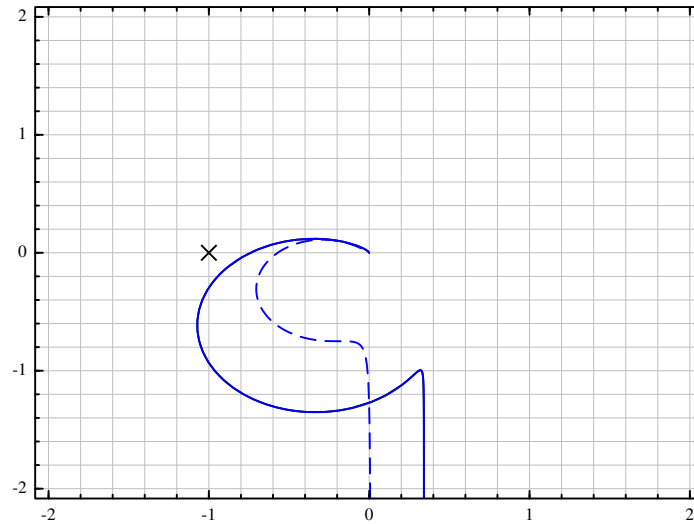
On peut confirmer ceci à l'aide de l'ordinateur. La figure 1.19 donne le diagramme de Bode en module du système en boucle ouverte  $G$  ainsi que la boucle ouverte  $K_1G$  (trait bleu plein) et  $K_2G$  (trait bleu traitillé). Le régulateur proposé dans l'énoncé ressemble plus à  $K_1$  qu'à  $K_2$ . La phase est représentée à la figure 1.20 et le diagramme de Nyquist à la figure 1.21. On confirme que le point  $-1$  n'est pas encerclé dans les deux cas.



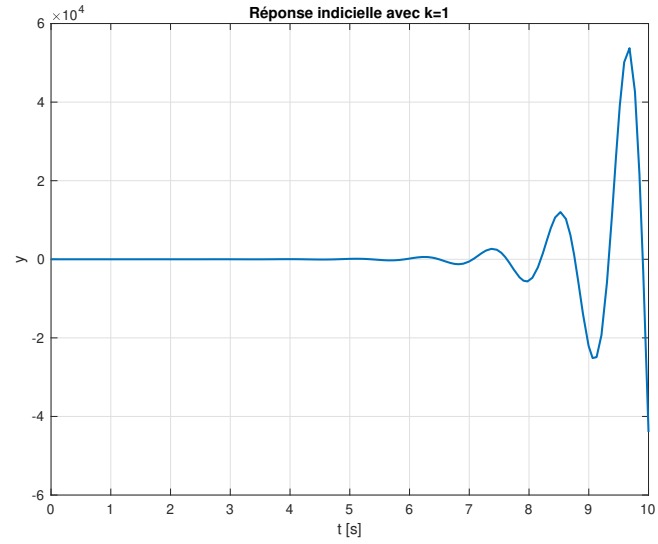
**Figure 1.19.** Illustration des résultats obtenus dans le diagramme de Bode en module [dB]. En trait bleu continu  $K_1G$  et en bleu traitillé  $K_2G$ , avec  $K_1 = (s + 2.31)/(s + 13)$  et  $K_2 = (s + 7.7)/(s + 43)$ .



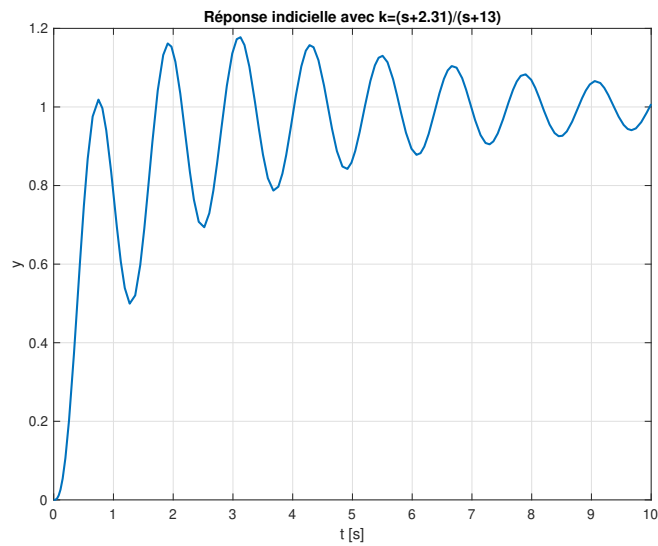
**Figure 1.20.** Illustration des résultats obtenus dans le diagramme de Bode en phase [rad]. En trait bleu continu  $K_1G$  et en bleu traitillé  $K_2G$ , avec  $K_1 = (s + 2.31)/(s + 13)$  et  $K_2 = (s + 7.7)/(s + 43)$ .



**Figure 1.21.** Illustration des résultats obtenus dans le diagramme de Nyquist. En trait bleu continu  $K_1G$  et en bleu traitillé  $K_2G$ , avec  $K_1 = (s + 2.31)/(s + 13)$  et  $K_2 = (s + 7.7)/(s + 43)$ .



**Figure 1.22.** Illustration de la réponse indicielle en boucle fermée avec un gain unité  $K = 1$ . Le système est instable comme prévu avec le critère de Nyquist.



**Figure 1.23.** Illustration de la réponse indicielle en boucle fermée avec le régulateur  $K = \frac{s+2.31}{s+13}$ . La réponse est stable.





---

# Index

- élément de base, 53
- équations différentielles
  - immeuble, 64
- analyse temporelle, 101
  - gain statique, 101
  - gain statique  $K$ , 101
  - l'équation caractéristique, 102
  - pôles, 102
  - salle chauffée, 102
  - zéros, 102
- anneau intègre, 61
- approximation linéaire d'un modèle non linéaire, 41
  - Dynamique de population, 44
  - Oscillateur de Van der Pol, 44
  - Procédure de linéarisation, 42
- approximation linéaire d'un modèle non linéaire
  - point de fonctionnement, 42
- approximation linéaire d'un modèle non linéaire
  - point d'équilibre, 42
- associativité, 58
- bille sur roue, 24
  - modélisation, 35
- boucle
  - fermée, 183
  - ouverte, 182
- calcul opérationnel, 59
- commande automatique, 20
  - boucle de rétroaction, 21
  - Problème d'asservissement, 22
  - Problème de régulation, 22
- commande dérivée, 148
- commande intégrale, 147
- commande proportionnelle, 142
  - effet de la perturbation  $T_e(t)$ , 145
- commande proportionnelle-intégrale, 148
  - effet de la consigne  $T$ , 148
  - effet de la perturbation  $T_e(t)$ , 149
- Commande proportionnelle-intégrale-dérovée
  - effet de la perturbation  $T_e(t)$ , 150
- commande proportionnelle-intégrale-dérovée, 149
  - effet de la consigne  $T_c(t)$ , 150
- commandes élémentaires, 131
  - commande en boucle fermée, 131
  - commande en boucle ouverte, 131
- commutativité, 58
- corps de fraction, 61
- critère
  - fonction entière, 184
- critère de Nyquist, 183
- Critère de stabilité de Routh-Hurwitz, 171
- critère de stabilité de Routh-Hurwitz
  - approximation d'un retard pur, 173
- diagramme
  - Nyquist, 181
- dimensionnement des régulateurs  $P$ ,  $PI$  et  $PID$ 
  - méthode de Ziegler-Nichols, 153
- dimensionnement des régulateurs  $P$ ,  $PI$  et  $PID$ , 152
  - constante de temps dominante, 153
  - spécification du système bouclé, 156
- distributivité, 58
- fonction de transfert, 80
  - en boucle fermée, 183
  - fonction de transfert, 80
- fonction du temps, 51
- identité neutre, 55
- immeuble, 23, 63
  - équations différentielles, 64
  - modèle, 64
  - modélisation, 34
- impulsion de Dirac, 56
- irrigation, 22
  - modélisation, 33
- modélisation, 33
  - bille sur roue, 35
  - immeuble, 34

- irrigation, 33
- moteur électrique, 33
- modèle
  - immeuble, 64
- modèle d'état, 28
  - état, 28
  - concept d'état, 28
  - cuve de mélange, 22
  - modèle d'état, 29
  - vecteur d'état, 28
- modèles mathématiques, 25
  - modèle de connaissance, 25
  - modèle de représentation, 25
- moteur électrique, 23
  - modélisation, 33
- Nyquist, 181
- opérateur
  - dérivée, 60
  - intégral, 59
  - neutre, 59
- performance d'un système bouclé, 174
  - asservissement et régulation, 175
- pincipe
  - de superposition, 51
- position des pôles et réponse temporelle, 121
- position des pôles et réponse temporelle
  - dominant, 122
  - mode, 121
  - signal instable, 121
  - signal stable, 121
  - stable, 122
- principe de superposition, 51
- produit de convolution, 58
- propriétés de la transformation de Laplace, 74
  - Dérivation, 77
  - grammaire, 77
  - intégration temporelle, 75
  - translation dans le domaine de Laplace, 75
  - translation dans le temps, 76
  - valeur finale, 76
  - valeur initiale, 77
- propriétés de la transformation de Laplace
  - dérivation temporelle, 74
- régulation de température, 135
- réponse
  - impulsionnelle, 57
  - indicielle, 52
- résolution
  - d'équations différentielles, 61
- simulation, 37
  - intégration numérique, 37
  - pas d'intégration, 37
  - Runge-Kutta, 38
  - simulation, 37
- stabilité et performance des systèmes bouclés
  - critère de stabilité, 167
  - stabilité BIBO (Bounded Input, Bounded Output) , 167
- stabilité et performance des systèmes bouclés, 167
- structure anti-sismique, 63
- système, 51
  - linéaire, 51
- système du deuxième ordre, 115
  - réponse indicielle, 116
  - systèmes oscillants et non oscillants, 118
- système du deuxième ordre
  - identification de la fonction de transfert, 118
- système du premier ordre, 107
  - réponse harmonique, 110
  - réponse impulsionnelle, 109
  - réponse indicielle, 107
- système dynamique, 11
  - causalité, 19
  - les entrées , 18
  - les paramètres , 18
  - les perturbations , 18
  - linéarité, 19
  - relation chronologique, 12
  - stationnarité, 19
  - système linéaire continu, 14
  - systèmes monovariabiles, 20
  - systèmes multivariabiles , 20
- système intégrateur, 113
- système dynamique
  - entrées, perturbations, paramètres , 18
- table
  - de correspondance des opérateurs, 63
- théorème
  - fondamental, 60
- transformée de Laplace de signaux choisis, 71
  - dictionnaire de la transformation de Laplace, 74
  - impulsion de Dirac, 72
  - réponse impulsionnelle, 73
  - rampe, 72
  - saut unité, 71
  - sinus et cosinus, 72
- transformation de Laplace inverse, 83
  - éléments simples, 83
  - la méthode des résidus, 85
- transformée de Laplace de signaux choisis
  - exponentielle, 72