Introduction à la commande des systèmes dynamiques

SIE

Série III

Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice III.1

Rappel

$$\{a(t)\} * \{b(t)\} = \left\{ \int_0^t a(\tau)b(t-\tau)d\tau \right\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau \right\}$$

Vérifier les formules suivantes :

1. $\{1\} * \{e^t\} = \{e^t - 1\}$
2. $\{1\} * \{\cos t\} = \{\sin t\}$
3. $\{1\} * \{1\} = \{t\}$
4. $\{t^2\} * \{t^3\} = \{\frac{1}{60}t^6\}$

Exercice III.2

A l'aide de l'identité vue au cours

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{\mathfrak{d} - \alpha},$$

et de la définition de l'opérateur $\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{d} * \{f(t)\} = \{f'(t)\} + f(0),$$

déterminer la solution de l'équation différentielle de l'exercice II.1.3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

A cette fin, commencer par montrer que

$$\{x_1(t)\} = \frac{\alpha + \beta\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}^2 - 2}$$

avec α et β des expressions des conditions initiales (déterminer ces deux constantes réelles). Ensuite, trouver une expression analogue (utilisant également l'opérateur $\mathfrak{d}$) pour $\{x_2(t)\}$. Finalement, décomposer les opérateurs obtenus sous la forme de deux expressions du type

$$\frac{A}{\mathfrak{d} - \sqrt{2}} + \frac{B}{\mathfrak{d} + \sqrt{2}}$$

et déterminer ainsi la solution de l'équation différentielle. Dessiner la solution pour les quatre conditions initiales proposées dans II.1.3 et comparer avec la simulation.

Exercice III.3

Exprimer à l'aide de l'opérateur $\mathfrak{d}$ les fonctions

$$\{\cos(\omega t)\} \qquad \text{et} \qquad \{\sin(\omega t)\}$$

Pour y arriver, calculer

$$\mathfrak{d} * \mathfrak{d} * \{\cos(\omega t)\}$$

et factoriser $\{\cos(\omega t)\}$.

On procéde ensuite de manière analogue pour $\{\sin(\omega t)\}$.

Exercice III.4
a. Calculer les transformées de Laplace des expressions suivantes :

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-3t}) \tag{1}$$
$$5(\cos(\omega t) + e^{-t}\sin(\omega t)) \tag{2}$$
$$(t+3)^2\cos(\omega t) \tag{3}$$
$$\cos(\omega(t+\alpha)) \tag{4}$$
$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 3\dot{x} + 6x \tag{5}$$
$$\ddot{y} + 5y = \sin(3t) \tag{6}$$

b. Calculer les transformées de Laplace inverses :

$$\frac{2s+1}{s^2+4s+8} \tag{7}$$
$$\frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+5)} \tag{8}$$
$$\frac{4}{s^2+2s} \tag{9}$$
$$\frac{s}{s^2+9} \tag{10}$$
$$\frac{5}{(s+2)^2} + \frac{5}{s+2} \tag{11}$$