Introduction à la commande des systèmes dynamiques

SIE

Série II

Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice II.1
Intégrer (papier crayon) avec la méthode d'Euler les systèmes d'équations différentielles suivants (choisir le pas d'intégration $h = 0.1$ et comme condition initiale $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$) :

1. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Pour le deuxième système, utiliser également le schéma non-anticipatif (conduisant à la méthode d'Euler implicite)

$$\dot{x}(k+1) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{h}$$

au lieu du schéma anticipatif (vu au cours, appelé également Euler explicite)

$$\dot{x}(k) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{h}$$

En quoi cette nouvelle méthode fonctionne mieux que le schéma vu au cours en ce qui concerne le deuxième système ?

Changer de coordonnées en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos(\theta) \\ x_2 &= \rho\sin(\theta) \end{aligned}$$

et écrire le système d'équations 2. sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \ldots \\ \dot{\rho} &= \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Refaire l'intégration dans ces nouvelles coordonnées.

Pour le système 3., partir des conditions initiales

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Exercice II.2

Ecrire les équations du moteur électrique et les équations de l'immeuble sous la forme standard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

En considérant les sorties suivantes : pour le moteur, la position, puis la vitesse ; pour l'immeuble, le deuxième étage, puis le quatrième étage.

Exercice II.3 (nécessite un ordinateur)

Simuler avec Runge-Kutta (à pas fixe) le système 'bille sur une roue' avec les paramètres suivants :

I_R	1	[kg m^2]
I_r	0.01	[kg m^2]
m	0.01	[kg]
R	1	[m]
r	0.01	[m]

Comparer vos simulations avec la méthode de Runge Kutta à pas variable de MATLAB (taper 'help ode45' et suivre le mode d'emploi ; lire également la partie du polycopié qui présente Runge Kutta, car il y a des exemples avec MATLAB et Mathematica).