Commande des systèmes dynamiques
3. Simulation

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Contenu

Représentation d'état

Equations différentielles non-linéaires

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

Equations différentielles linéaires

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

dimensions

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$,
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Approximation de la dérivée

Définition de la dérivée

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h)-\mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t-h)}{h}$$

Approximation sur un intervalle fini : pas h

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t+h)-\mathbf{x}(t)}{h} \qquad \text{anticipatif}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t-h)}{h} \qquad \text{non-anticipatif}$$

Méthode de Euler

Méthode de Euler explicite

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) &= \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \\ \mathbf{x}(t+h) &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Méthode de Euler implicite

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t+h), \mathbf{u}(t+h)) &= \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \\ h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t+h), \mathbf{u}(t+h)) - \mathbf{x}(t+h) &= -\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Méthode de Runge-Kutta à pas fixe

On utilise plusieurs approximations de le dérivée

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}(t + \frac{h}{2})) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{u}(t + \frac{h}{2})) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + h\mathbf{k}_3, \mathbf{u}(t + h))
\end{aligned}$$

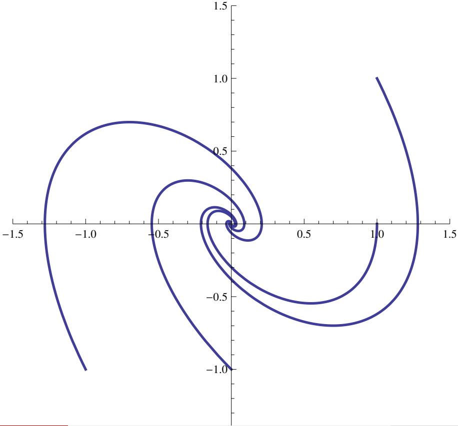
Ensuite on moyenne les estimées des dérivées

$$\mathbf{x}(t+h) = \frac{h}{6}\Big(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\Big) + \mathbf{x}(t)$$

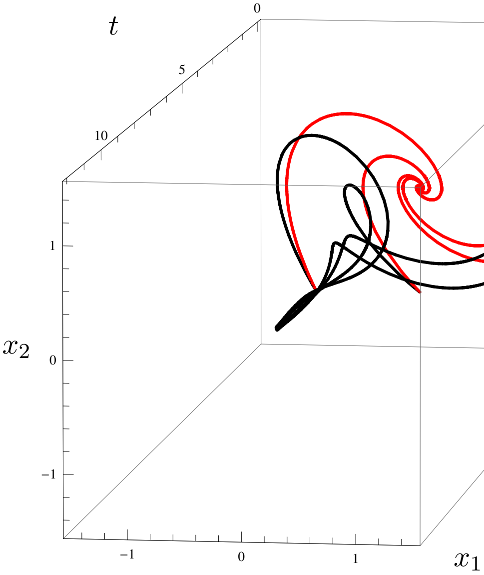
Exemple

Exemple 2D

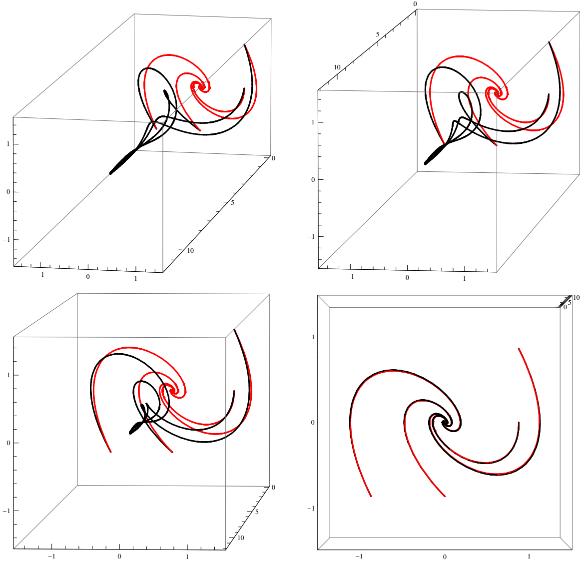
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$



Exemple : les trajectoires exactes



Exemple : les trajectoires exactes (suite)

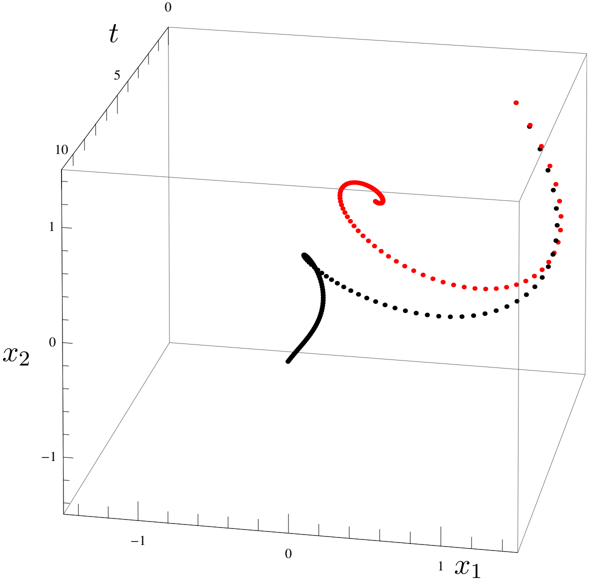


Exemple : méthode de Euler explicite

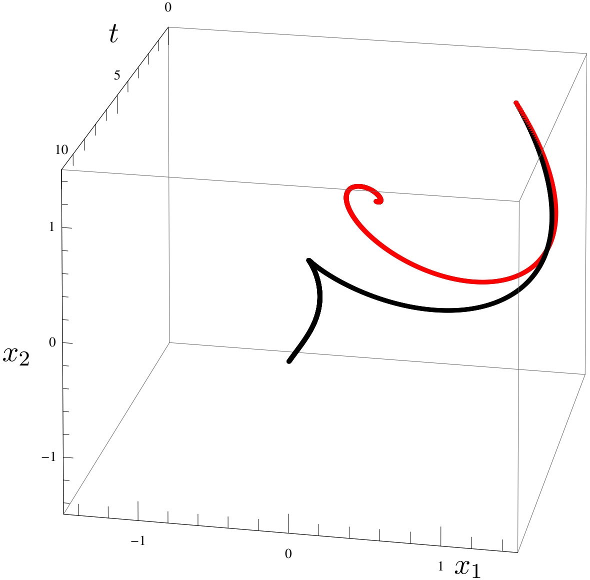
Formule récursive

$$\begin{aligned} x_1(t+h) &= hx_2(t) + x_1(t) \\ x_2(t+h) &= -hx_1(t) - hx_2(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

Exemple : méthode de Euler explicite pour $h = 0.1$



Exemple : méthode de Euler explicite pour $h = 0.01$



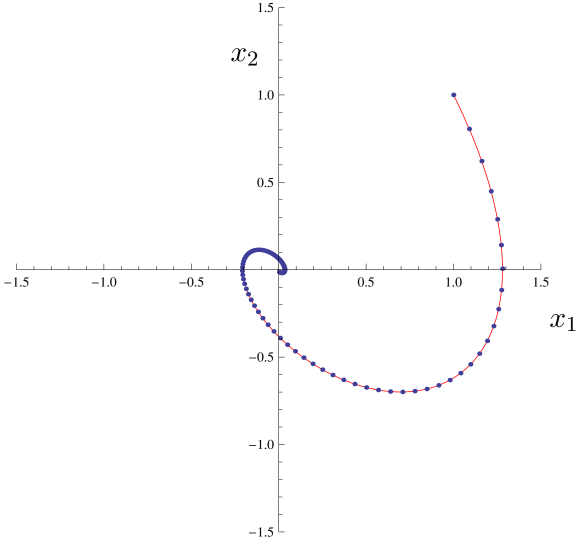
Runge Kutta appliqué à l'exemple 2D

Algorithme récursif avec pas h

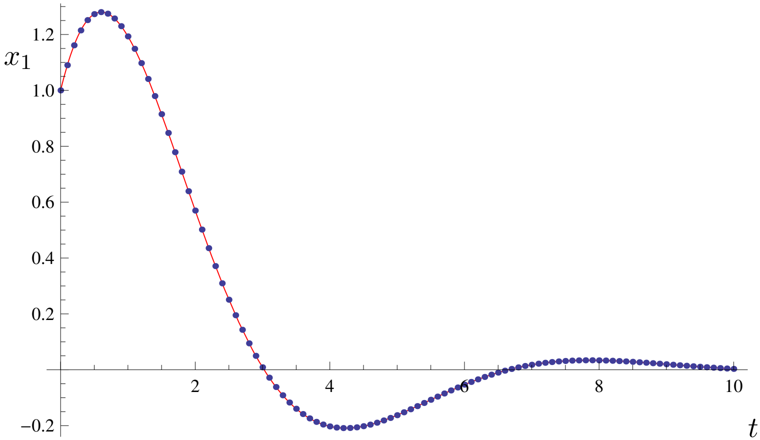
$$
\begin{aligned}
k_1 &= \; = f(x(t)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \\
k_2 &= f(x(t) + \frac{h}{2}k_1) = \begin{pmatrix} x_2 - \frac{1}{2}h(x_1 + x_2) \\ -x_2 + \frac{1}{2}(h-2)x_1 \end{pmatrix} \\
k_3 &= f(x(t) + \frac{h}{2}k_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(h-2)(hx_1 - 2x_2) \\ \frac{1}{4}(h-2)(2x_1 + (h+2)x_2 \end{pmatrix} \\
k_4 &= f(x(t) + hk_3) = \begin{pmatrix} x_2 + \frac{1}{4}(h-2)h(2x_1 + (h+2)x_2) \\ \frac{1}{4}\left((-(4 - 4h + h^3)x_1 - (4 - 2h^2 + h^3)x_2\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
$$

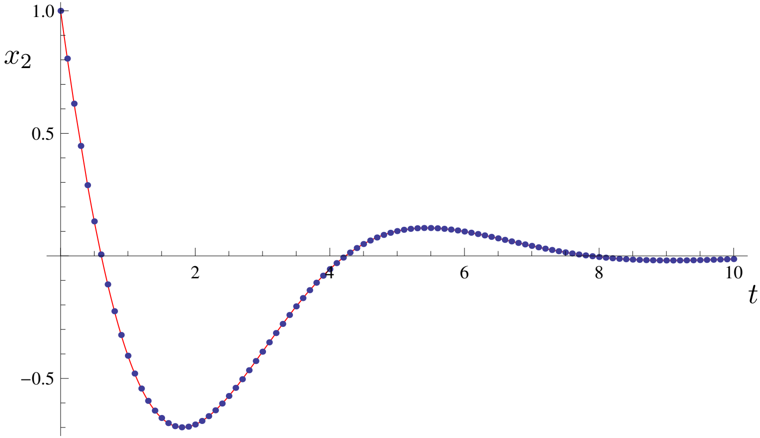
Résulstas RK avec $h = 0.1$ pour l'exemple 2D



Résulstas RK avec $h = 0.1$ pour l'exemple 2D



Résulstas RK avec $h = 0.1$ pour l'exemple 2D



Linéarisation

Point de fonctionnement (ou point d'équilibre)

Déterminer $\bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$ de telle sorte que

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$$

Développement de Taylor

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})$$

Dérivée de l'accroissement

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{0}$$

Modèle linéarisé

Modéle d'état linéaire pour les accroissements

$$\mathbf{A} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

$$\mathbf{B} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

$$\dot{\Delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}$$