Commande des systèmes dynamiques
2. Modélisation

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Contenu

Irrigation

Lois fondamentales

- Conservation du volume (masse)
- Pression hydrostatique et force
- Loi d'absorption

Le modèle

$$
\begin{aligned}
A_1 \dot{h}_1 &= A_1 v - \rho h_1 - u - \kappa \sqrt{2g|h_1 - h_2|}\,\text{sign}\,(h_1 - h_2) \\
A_2 \dot{h}_2 &= u + \kappa \sqrt{2g|h_1 - h_2|}\,\text{sign}\,(h_1 - h_2)
\end{aligned}
$$

Les variables d'état et les paramètres

Variables d'état

- $x_1 = h_1$
- $x_2 = h_2$

Paramètres

- A_1, A_2, surfaces
- ρ, coefficient d'absorption
- κ, constante de rendement
- g, constante de la gravité

Les entrées et les sorties

Entrée

- u, débit de pompage

Perturbation

- v, densité de pluie

Sorties

- N'importe quelle fonction de h_1 et h_2 et de l'entrée u

Structure anti-sismique

Les lois fondamentales

- Les lois de Newton de la mécanique
- La loi de l'élasticité
- La résistance des matériaux

Le modèle

Frottement extérieur à la structure élastique :

$$
\begin{aligned}
m\ddot{d}_1 &= k(d_0 - d_1) + k(d_2 - d_1) - b\dot{d}_1 \\
m\ddot{d}_2 &= k(d_1 - d_2) + k(d_3 - d_2) - b\dot{d}_2 \\
m\ddot{d}_3 &= k(d_2 - d_3) + k(d_4 - d_3) - b\dot{d}_3 \\
m\ddot{d}_4 &= k(d_3 - d_4) - b\dot{d}_4
\end{aligned}
$$

Le modèle

Frottement à l'intérieur de la structure élastique :

$$\begin{aligned}
m\ddot{d}_1 &= k(d_0 - d_1) + k(d_2 - d_1) + b(\dot{d}_0 - \dot{d}_1) + b(\dot{d}_2 - \dot{d}_1) \\
m\ddot{d}_2 &= k(d_1 - d_2) + k(d_3 - d_2) + b(\dot{d}_1 - \dot{d}_2) + b(\dot{d}_3 - \dot{d}_2) \\
m\ddot{d}_3 &= k(d_2 - d_3) + k(d_4 - d_3) + b(\dot{d}_2 - \dot{d}_3) + b(\dot{d}_4 - \dot{d}_3) \\
m\ddot{d}_4 &= k(d_3 - d_4) + b(\dot{d}_3 - \dot{d}_4)
\end{aligned}$$

Les variables d'état et les paramètres

Etat

- $d_1, \dot{d}_1, d_2, \dot{d}_2, d_3, \dot{d}_3, d_4, \dot{d}_4$

Paramètres

- m, masse
- k, constante d'élasticité
- b, constante de frottement (visqueux)

Les entrées et les sorties

Perturbation

- d_0, le déplacement suite à une secousse sismique

Sortie

- N'importe quelle fonction des variables d'état

Le moteur électrique à courant continu

Les lois fondamentales

- Les lois de Newton de la mécanique
- La loi du couple proportionnel au courant
- La tension induite de mouvement (effet dynamo)

Le modèle

Equation électrique (somme des tensions)

$$u = Ri + K\dot{\theta}$$

Equation mécanique

$$I\ddot{\theta} = Ki - b\dot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} = \frac{K}{R}u - \left(b + \frac{K^2}{R}\right)\dot{\theta}$$

Les variables d'état et les paramètres

Variables d'état

$x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$.

Paramètres

- Constante de couple K (constante de tension induite)
- Coefficient de frottement b
- Résistance électrique R
- Inertie I

Les entrées et les sorties

Entrée

- La tension d'entrée u

Sorties

- N'importe quelle fonction des états θ et $\dot{\theta}$ et de l'entrée u

La bille sur une roue

Les lois fondamentales

- Les lois de la mécanique (analytique)
- La cinématique

Le modèle

Liaison cinématique

$$\mu = \frac{r}{R}\phi + \theta$$

Equations dynamiques

$$\begin{aligned}
u &= gm(r+R)\cos(\frac{r}{R}\phi+\theta) + m\frac{r}{R}(r+R)^2\ddot{\phi} + (I_R + m(r+R)^2)\ddot{\theta} \\
0 &= gm\frac{r}{R}(r+R)\cos(\frac{r}{R}\phi+\theta) + \left(I_r + m\frac{r^2}{R^2}(r+R)^2\right)\ddot{\phi} + m\frac{r}{R}(r+R)^2\ddot{\theta}
\end{aligned}$$

Le modèle

$$
\begin{pmatrix} I_R + m(r+R)^2 & \frac{r}{R} m(r+R)^2 \\ \frac{r}{R} m(r+R)^2 & I_r + \frac{r^2}{R^2} m(r+R)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg(r+R)\cos\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right) + \tau \\ -mg(r+R)\frac{r}{R}\cos\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right) \end{pmatrix}
$$

Le modèle

Le lagrangien

$$
\begin{aligned}
L &= E_c - E_p \\
E_c &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_R\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_r\dot{\phi}^2 \\
E_p &= mgy \\
x &= (r+R)\cos(\frac{r}{R}\phi + \theta) \\
y &= (r+R)\sin(\frac{r}{R}\phi + \theta)
\end{aligned}
$$

Le modèle

Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = u$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

Les variables d'état et les paramètres

Etat

- $\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}$

Paramètres

- r, R, rayons (R : roue, r : bille)
- I_r, I_R, inerties
- m_r, masse de la bille
- g, constante de la gravité

Les entrées et les sorties

Entrée

- u, couple sur la roue

Sorties

- N'importe quelle fonction de $\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}$ et du couple d'entrée u

Résumé des structures communes

Des équations différentielles ordinaires

- Déterminent l'évolution des grandeurs dans le temps
- Elles se décomposent en une interconnection d'équation du premier ordre
- A chaque équation du premier ordre correspond une condition initiale

Résumé des structures communes

Classification des variables

- Les paramètres : Ce sont les quantités qui n'évoluent pas ou très lentement par rapport au temps
- Les variables d'états : Elles correspondent aux conditions initiales. Les variables détat au temps $t = 0$ donnent les conditions initiales. Les variables d'état sont notées x_1, x_2, ..., x_n, où n donne l'ordre complet du modèle
- Les entrées : Ce sont des grandeurs que l'on peut changer instantanément. Elles sont notées u_1, u_2, ..., u_p
- Les sorties : Ce sont des fonctions de l'état et des entrées. Elles sont notées y_1, y_2, ..., y_m
- Les perturbations : Ce sont des entrées qui sont manipulées de manière non prévisible par une tierse personne, souvent la nature. Elles sont notées v_1, v_2, ... v_o