

Ph. Müllhaupt

Introduction à la Commande des Systèmes Dynamiques

16 mars 2023

Table des matières

1	Systèmes dynamiques et commande	11
1.1	Système dynamique	11
1.1.1	Définition d'ordre général	11
1.1.2	Système	12
1.1.3	Relation chronologique et propriétés des systèmes	12
1.1.4	Système linéaire continu à une seule condition initiale	14
1.1.5	Système discret linéaire à deux conditions initiales	16
1.2	Commande automatique	20
1.2.1	Idée de base	20
1.2.2	Éléments d'une boucle de commande	21
1.2.3	Objectifs de la commande	21
1.3	Exemples	22
1.3.1	Système d'irrigation	22
1.3.2	Immeuble à quatre étages	23
1.3.3	Moteur électrique	23
1.3.4	Bille sur roue	24
2	Modélisation mathématique	25
2.1	Modèles mathématiques	25
2.1.1	Domaines d'applications	25
2.1.2	Classes de modèles mathématiques	25
2.1.3	Procédure de modélisation physique	25
2.1.4	Types de variables	26
2.2	Modèle d'état	28
2.2.1	Concept d'état	28
2.2.2	Sélection des variables d'état	29
2.2.3	Représentation générale	30
2.2.4	Modèle d'état linéaire et stationnaire	31
2.2.5	Exemple : Cuve de mélange	32
2.3	Exemples de modélisation	33
2.3.1	Irrigation	33
2.3.2	Moteur électrique	33
2.3.3	Immeuble	34
2.3.4	Bille sur roue	35
2.4	Simulation d'un modèle d'état	37
2.5	Exemple d'intégration numérique	39
2.6	Approximation linéaire d'un modèle non linéaire	42

2.6.1	Introduction	42
2.6.2	Procédure de linéarisation	43
2.7	Exemples	45
2.7.1	Oscillateur de Van der Pol	45
2.7.2	Dynamique de population	45
2.7.3	Compétition	46
2.7.4	Prédateur-proie	48
3	Représentation entrée-sortie	51
3.1	Introduction et objectifs	51
3.2	Fonctions du temps	51
3.3	Principe de superposition	51
3.3.1	Système	51
3.3.2	Principe de superposition et système linéaire	51
3.4	Réponse indicielle	52
3.4.1	Réponse indicielle	52
3.5	Fonction constante par morceaux	53
3.5.1	Élément de base	53
3.6	Identité Neutre	55
3.6.1	Impulsion de Dirac	56
3.6.2	Construction de l'identité neutre	57
3.7	Réponse impulsionnelle	57
3.7.1	Construction progressive de la réponse impulsionnelle	58
3.8	Produit de convolution	58
3.8.1	Propriétés du produit de convolution	58
3.9	Calcul opérationnel	59
3.9.1	Opérateur neutre $\mathbf{1}$	59
3.9.2	Opérateur intégral \mathbf{i}	59
3.9.3	Opérateur \mathbf{d} (inverse de \mathbf{i})	60
3.9.4	Théorème fondamental	60
3.9.5	Notation abrégée	60
3.9.6	Discontinuité due à la condition initiale	60
3.9.7	Pas de diviseur de zéro (anneau intègre)	61
3.9.8	Construction du corps de fraction	61
3.9.9	Utilité pour la résolution des équations différentielles	61
3.9.10	Equivalence entre fonction et fraction de polynômes en \mathbf{d}	61
3.9.11	Equations différentielle et opérateur associé	62
3.9.12	Table de correspondances (égalité)	63
3.10	Exemple	64
3.10.1	Structure anti-sismique	64
3.11	Conclusion	66
4	Fonction de transfert	69
4.1	Introduction	69
4.2	Transformation de Laplace	69
4.2.1	Définition	69
4.2.2	Existence	69
4.3	Transformée de Laplace de signaux choisis	71
4.3.1	Saut unité	71
4.3.2	Rampe	72

4.3.3	Exponentielle	72
4.3.4	Sinus et cosinus	72
4.3.5	Impulsion de Dirac	72
4.3.6	Dictionnaire de la transformation de Laplace	74
4.4	Propriétés de la transformation de Laplace	74
4.4.1	Dérivation temporelle	74
4.4.2	Intégration temporelle	75
4.4.3	Translation dans le domaine de Laplace $F(s + \lambda)$	75
4.4.4	Translation dans le temps $f(t - \tau)$	76
4.4.5	Linéarité	76
4.4.6	Valeur finale (régime stationnaire)	76
4.4.7	Valeur initiale (comportement initial)	77
4.4.8	Dérivation dans le domaine de Laplace	77
4.4.9	Grammaire de la transformation de Laplace	77
4.5	Exemples de transformée de Laplace	78
4.5.1	Echelon de durée finie	78
4.5.2	Réponse exponentielle	79
4.5.3	Transformation de Laplace inverse	80
4.6	Fonction de transfert	80
4.6.1	Définition	80
4.6.2	Equations différentielles linéaires à coefficients constants	81
4.6.3	Systèmes multivariables	82
4.6.4	Domaine temporel et domaine de Laplace	83
4.7	Transformation de Laplace inverse	83
4.7.1	Introduction	83
4.7.2	Éléments simples	83
4.7.3	Décomposition en éléments simples par réduction au même dénominateur	84
4.7.4	Décomposition en éléments simples par la méthode des résidus	85
4.7.5	Cas particuliers	85
4.8	Exercices résolus	87
4.9	Symboles utilisés	98
5	Analyse temporelle	101
5.1	définitions préliminaires	101
5.1.1	Introduction	101
5.1.2	Gain statique, pôles et zéros, équation caractéristique	101
5.1.3	Ordre d'un système	102
5.2	Étude d'un système simple : salle chauffée	102
5.2.1	Variables écart	102
5.2.2	Modélisation du système	103
5.2.3	Fonctions de transfert	103
5.2.4	Réponse de $T(t)$ à un saut unité de $P(t)$	104
5.2.5	Réponse de $T(t)$ à un saut unité de $T_{ext}(t)$	105
5.2.6	Remarque importante concernant les notations	106
5.3	Système du premier ordre	107
5.3.1	Représentation	107
5.3.2	Réponse indicielle	107
5.3.3	Réponse impulsionnelle	109
5.3.4	Réponse à une rampe	110
5.3.5	Réponse harmonique	110

5.4	Système intégrateur du premier ordre	113
5.4.1	Représentation	113
5.4.2	Réponse indicielle	113
5.4.3	Exemple	113
5.5	Système du deuxième ordre sans zéro	115
5.5.1	Représentation	115
5.5.2	Réponse indicielle	116
5.5.3	Systèmes oscillants et non oscillants	118
5.5.4	Identification de la fonction de transfert	118
5.6	Relation entre position des pôles et réponse temporelle	121
5.7	Exercices résolus	122
5.8	Symboles utilisés	129
6	Commandes élémentaires	131
6.1	Types de commande	131
6.1.1	Commande manuelle	132
6.1.2	Commande en boucle ouverte	132
6.1.3	Commande en boucle fermée	133
6.1.4	Réduction de schémas fonctionnels	133
6.2	Exemple : régulation de température	135
6.2.1	Modélisation	135
6.2.2	Analyse des éléments de la boucle de commande	136
6.3	Commande tout-ou-rien	140
6.4	Commande proportionnelle	142
6.4.1	Fonction de transfert du régulateur proportionnel	142
6.4.2	Statisme	143
6.4.3	Saturation du régulateur	143
6.4.4	Effet de la consigne $T_c(t)$ sur $T(t)$	144
6.4.5	Effet de la perturbation $T_e(t)$ sur $T(t)$	145
6.4.6	Action directe ou inverse ?	146
6.5	Commande intégrale	147
6.6	Commande dérivée	148
6.7	Commande proportionnelle-intégrale	148
6.7.1	fonction de transfert du régulateur PI	148
6.7.2	Effet de la consigne $T : c(t)$ sur $T(t)$	148
6.7.3	Effet de la perturbation $T_e(t)$ sur $T(t)$	149
6.8	Commande proportionnelle-intégrale-dérivée	149
6.8.1	Fonction de transfert PID	149
6.8.2	Effet de la consigne $T_c(t)$ sur $T(t)$	150
6.8.3	Effet de la perturbation $T_e(t)$ sur $T(t)$	150
6.8.4	Effets des termes P, I et D du régulateur PID	151
6.9	Dimensionnement des régulateurs P, PI ET PID	152
6.9.1	Caractéristiques souhaitées du système bouclé	152
6.9.2	Dimensionnement du régulateur (choix de K_R, τ_I et τ_D)	152
6.9.3	Méthode empirique en boucle fermée	153
6.9.4	Méthode de Ziegler-Nichols	153
6.9.5	Spécification du système bouclé	156
6.9.6	Exemple	157
6.10	Exercices résolus	159
6.11	Symbole utilisés	164

7	Stabilité et performance des systèmes bouclés	167
7.1	Définition et critère de stabilité	167
7.1.1	Définition	167
7.1.2	Critère de stabilité	167
7.1.3	Exemples	170
7.2	Critère de stabilité de Routh-Hurwitz	171
7.2.1	Principe	172
7.2.2	Exemples	172
7.2.3	Approximation d'un retard pur	173
7.3	Performance d'un système bouclé	174
7.3.1	Objectifs de la commande	174
7.3.2	Asservissement et régulation	175
7.4	Exercices résolus	176
7.5	Symboles utilisés	180
8	Diagramme de Nyquist	181
8.1	Introduction et objectifs	181
8.2	Boucle ouverte et boucle fermée	181
8.2.1	Boucle ouverte	182
8.2.2	Boucle fermée	183
8.3	Principe et critères de Nyquist	183
8.3.1	Critère de Nyquist simplifié	184
8.3.2	Critère de Nyquist généralisé	184
8.4	Un peu d'analyse complexe...	184
8.4.1	Polynômes	184
8.4.2	Fonction entière	184
8.4.3	Fonction analytique	184
8.4.4	Fonction méromorphe	185
8.4.5	Exemples de fonctions méromorphes	185
8.4.6	Transformation définie par une fonction méromorphe	185
8.4.7	Courbe Γ	186
8.4.8	Image de Γ par la fonction méromorphe	186
8.4.9	Nombre d'encerclements de l'origine et singularités	187
8.4.10	Exemples supplémentaires	188
8.4.11	Principe de l'argument	190
8.5	Démonstration du critère de Nyquist généralisé	191
8.6	Exemples	192
8.6.1	Critère de Nyquist simplifié	192
8.6.2	Critère de Nyquist généralisé	194
8.6.3	Exemple : bille sur une roue	194
8.7	Conclusion	195
	Index	197

Avant-propos

Le présent polycopié est quasiment identique au polycopié 2018. Il incorpore l'errata 2019.

Dr. Philippe Müllhaupt
Mars 2021

Systèmes dynamiques et commande

Ce polycopié présente quelques techniques d'analyse et de modification du comportement des systèmes dynamiques avec un point de vue universel du domaine d'application. C'est la raison pour laquelle les exemples ne sont pas limités au génie de l'environnement. Le formalisme présenté peut paraître abstrait en première lecture car il recelle la possibilité de l'appliquer à toutes sortes de disciplines, une fois le formalisme maîtrisé. En particulier, l'application au domaine du génie de l'environnement devient de plus en plus médiatisé. En effet, le monde devenant de plus en plus interconnecté, par l'entremise des systèmes dits intelligents (présence de microprocesseur et algorithmes), la théorie des systèmes dynamiques touche aussi bien la domotique que presque toutes les activités humaines ayant un impact sur l'environnement (voiture intelligente, usine entièrement automatisée, etc). La possibilité d'automatiser les tâches et de traiter et stocker les données de manière massive permettent d'améliorer la vie de tous les jours, dans certains cas, mais conduit également à une dégradation de l'environnement et de la qualité de vie, dans d'autres cas. Ainsi, une bonne compréhension des systèmes dynamiques devient de plus en plus importante pour le bagage de l'ingénieur en environnement.

Il s'agit donc de présenter ce que l'on entend par *système dynamique* et par *modification du comportement*. Cette dernière notion est, de manière plus sommaire, appelée *commande* du système dynamique. La commande peut être manuelle ou, le plus souvent, automatique, c'est-à-dire sans intervention humaine immédiate, ou, plus précisément, par l'application systématique d'un résultat obtenu de manière mécanique par une méthode algorithmique. Cette méthode algorithmique peut, ou non, être le résultat de l'élaboration d'une stratégie issue d'une réflexion humaine.

1.1 Système dynamique

1.1.1 Définition d'ordre général

Lorsque les notions de système et de variable sont définies (cf. section suivante), un système dynamique est grosso modo une relation entre les *variables* décrivant le *système* et une *variable chronologique* représentant le plus souvent le temps. Cette relation sera, dans notre exposé, modélisée par une progression déterminée par une fonction.

La distinction précise de la variable chronologique (qui n'est rien d'autre qu'une variable particulière) par rapport aux autres variables, consiste en l'existence d'un certain ordre de progression des autres variables par rapport à la variable chronologique. Cette progression sera, dans notre contexte, supposée être déterminée par la relation décrivant le système dynamique. Ainsi, on attribuera aux variables du système un indexage par rapport à la variable chronologique.

Nous commençons par laisser momentanément de côté à la fois la variable chronologique et la relation décrivant le système dynamique pour nous concentrer sur la notion de système et de ses variables.

1.1.2 Système

La notion de **système** est souvent introduite pour décrire l'objet de notre étude et l'isoler ainsi de son environnement. Un système peut représenter :

- Un ensemble d'éléments en interaction organisé pour un but précis (*une entreprise*).
- Un ensemble de composants qui sont intégrés pour accomplir une tâche (*un mécanisme*).
- Un ensemble d'objets en interaction qui peut, en première approximation, être considéré comme avoir peu de relation avec l'extérieur (*le système solaire*).
- Le contenu d'une boîte noire mal connue par l'observateur (*une télévision*).

La notion de système est large, pour ne pas dire vague. Le seul point commun entre le système métrique, un système d'équations ou le système solaire est, justement le mot *système*, c'est-à-dire un ensemble d'éléments.

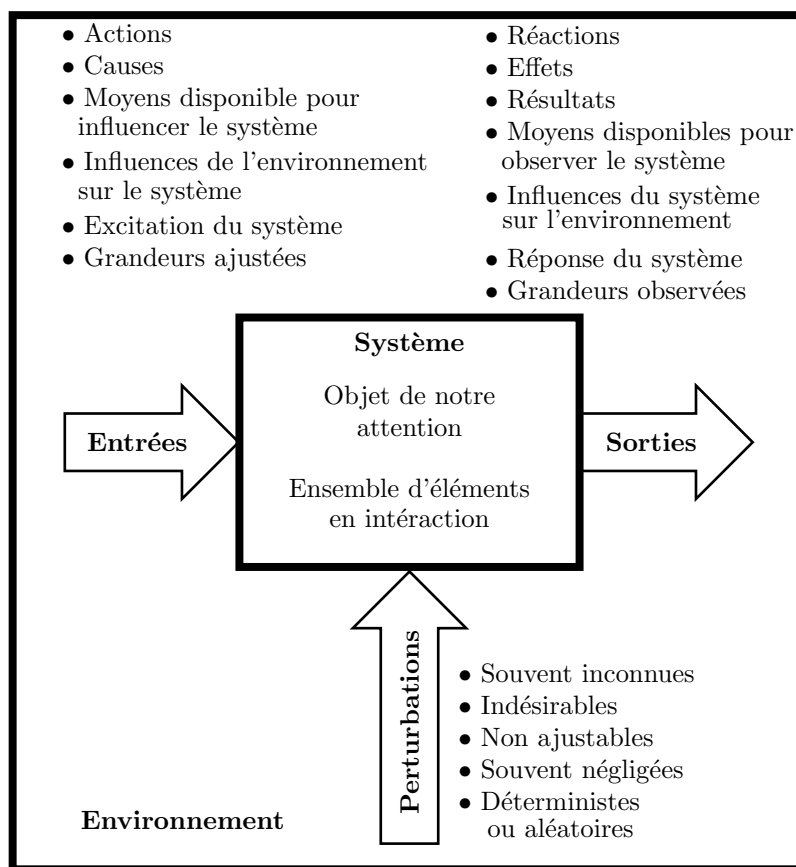


Figure 1.1. Interaction du système avec son environnement.

Les différentes notions relatives à l'interaction d'un système avec son environnement sont représentées à la figure 1.1.

1.1.3 Relation chronologique et propriétés des systèmes

Variable chronologique et règle de progression

Nous considérerons deux classes de systèmes dynamiques, ceux continus dont la variable chronologique est réelle, et ceux discrets dont la variable chronologique est discrète.

Dans le premier cas, une variable réelle (c.-à-d. appartenant à \mathbb{R}) obéissant à une règle simple de progression sera déterminée (cette variable particulière se réfère, dans la majeure partie des cas, au temps). La variable est notée t et la règle de progression est déterminée par l'équation différentielle ordinaire $\dot{t} = 1$.

Dans le second cas, une variable discrète (c.-à-d. appartenant à \mathbb{Z}) est choisie et la règle de progression devient celle du successeur. Elle est notée k .

Indexation des variables par la variable chronologique

Dans la présentation des systèmes, nous avons vu que les variables pouvaient être de nature différente (une vitesse, un prix, une quantité de matière, une chaleur, une température, une concentration, etc.) et toutes peuvent prendre des valeurs différentes.

Lors de la présence d'une variable chronologique, il est alors possible de considérer, non pas les variables (mise à part la variable chronologique) comme des quantités fixées une fois pour toute selon l'ordre de progression de la variable chronologique, mais comme un nouvel ensemble de variables distinctes, de même nature, indexées par rapport à la variable chronologique. Par conséquent, on peut se référer à la variable vitesse à un instant donné, au prix du marché à un instant discret précis, à la température en début ou en fin de journée par exemple.

Soit x_1, x_2, x_3 trois variables au sens de la présentation des systèmes donnée à la section précédente. Lors de la présence d'une variable chronologique, ces trois variables donnent naissance à une multitude infinie de variables, toutes indexées par la variable chronologique.

Dans le cas continu, elles sont notées $x_1(t), x_2(t), x_3(t), t \in \mathbb{R}$ et en particulier on pourra se référer par exemple à $x_1(0.2), x_1(2.3), x_1(1.2345), x_2(2.345)$, et $x_3(100001.2)$ toutes ces cinq nouvelles quantités sont des variables à part entière étant donné que ces cinq quantités peuvent a priori prendre n'importe quelle valeur.

Dans le cas discret, nous avons une genèse similaire. En effet, x_1, x_2, x_3 donnent naissance aux variables dénombrables mais infinies $x_1(k), x_2(k), x_3(k), k \in \mathbb{Z}$ et l'on peut se référer à $x_1(0), x_1(-3), x_3(4), x_3(5), x_3(6)$, etc. chacune étant une variable à part entière puisque ces quantités peuvent, a priori, prendre n'importe quelle valeur.

Fonctions dynamiques chronologiques

Un système dynamique met en relation une sous partie des variables indexées par la variable chronologique à un autre sous ensemble de ces variables selon une relation qui sera appelée la *relation chronologique*. Nous ne considérons, dans ces notes, que les relations données sous la forme de règle de progression provenant de fonctions uniquement. Dans le cas continu cela sera un ensemble d'équations différentielles ordinaires, autrement dit, des équations dont le membre de droite est une fonction et le membre de gauche est une différentielle ordinaire. Voici donc le modèle pour les relations chronologiques décrivant un système dynamique continu :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &:= f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_p(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &:= f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_p(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &:= f_n(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_p(t), t)\end{aligned}$$

Il est important de constater que p et n sont deux entiers positifs non nécessairement égaux et que l'on peut avoir soit $p < n$, soit $p = n$, ou encore $p > n$. Dans le cas discret la règle de progression sera celle du successeur. Elle sera donnée par le modèle suivant :

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &:= f_1(x_1(k), x_2(k), x_3(k), \dots, x_p(k), k) \\ x_2(k+1) &:= f_2(x_1(k), x_2(k), x_3(k), \dots, x_p(k), k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &:= f_n(x_1(k), x_2(k), x_3(k), \dots, x_p(k), k)\end{aligned}$$

A nouveau p et n ne sont pas nécessairement égaux. Dans ces deux cas les membres de droite déterminent les fonctions dynamiques chronologiques.

Il est important de constater que les deux modèles ci-dessus de relations chronologiques ne sont pas complètement généraux et que l'on peut en envisager d'autres, comme par exemple, dans le cas continu, la relation fonctionnelle suivante :

$$\dot{x}_1(t) := f_1(x_1([t, t+T]))$$

La progression d'une variable à un instant précis est conditionné par toute son évolution future sur un intervalle de durée T . Ou alors, dans le cas discret, la progression :

$$x_1(k+1) := f_1(x_1(k-2), x_1(k-1), x_1(k), x_1(k+1), x_1(k+2))$$

que l'on retrouve fréquemment en traitement du signal faisant intervenir une progression dépendant des variables indexées en avant de l'index chronologique courant. En traitement d'image par exemple, l'index chronologique est spatial et la relation discrète ci-dessus peut représenter un filtre dont l'objectif est d'adoucir ou de renforcer les contours d'une image.

Voici un exemple élémentaire de système dynamique discret où la variable chronologique est $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{[k+1]} = 2x_{[k]}, \quad (1.1)$$

avec $x_{[k]} \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il comporte une série de variables indexées par rapport à l'indice discret temporel k . Son comportement est très différent de celui de l'équation

$$x_{[k+1]} = \frac{1}{2}x_{[k]}. \quad (1.2)$$

avec $x_{[k]} \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Calculons le comportement à long terme pour $k = N$ connaissant ce que l'on appelle *la condition initiale* $x_{[0]} = 3$.

Pour l'équation (1.1) :

$$\begin{aligned} x_{[0]} &= 3 \\ x_{[1]} &= 2 \cdot x_{[0]} = 2 \cdot 3 = 6 \\ x_{[2]} &= 2 \cdot x_{[1]} = 2 \cdot 2 \cdot x_{[0]} = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ &\vdots \\ x_{[N]} &= 2 \cdot x_{[N-1]} = 2 \cdot 2 \cdot x_{[N-2]} = 2^N x_{[0]} = 2^N \cdot 3 \end{aligned}$$

ce qui correspond à la suite de nombres **croissants** 3, 6, 12, 24, ..., $2^N \cdot 3$.

Pour l'équation (1.2) :

$$\begin{aligned} x_{[0]} &= 3 \\ x_{[1]} &= \frac{1}{2} \cdot x_{[0]} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \\ x_{[2]} &= \frac{1}{2} \cdot x_{[1]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_{[0]} = \frac{1}{4} \cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 = \frac{3}{4} \\ &\vdots \\ x_{[N]} &= \frac{1}{2} \cdot x_{[N-1]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x_{[N-2]} \cdot x_{[0]} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot 3 \end{aligned}$$

ce qui correspond à la suite de nombres **décroissants** 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, ..., $\frac{3}{2^N}$.

1.1.4 Système linéaire continu à une seule condition initiale

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = 2x \quad (1.3)$$

dont la solution est

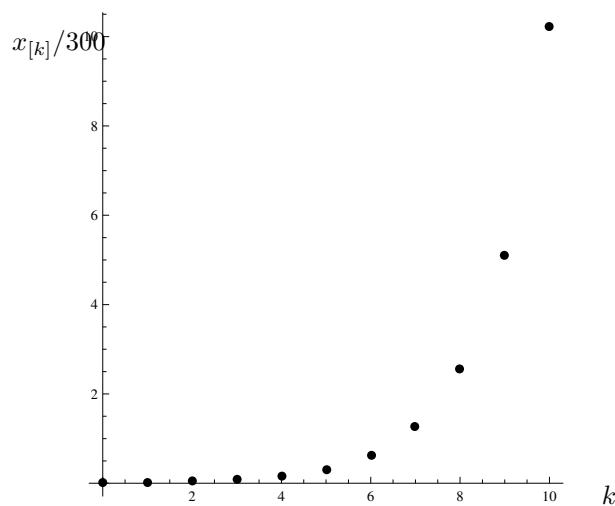


Figure 1.2. Suite de nombres générée par le système discret (1.1).

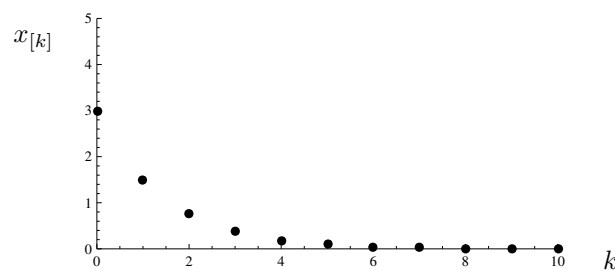


Figure 1.3. Suite de nombres générée par le système discret (1.2).

$$\mathcal{X}(x_0, t) = x_0 e^{2t}.$$

Elle ne comporte qu'une seule condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$. On vérifie bien que

$$\mathcal{X}(x_0, 0) = x_0 e^{2t} \big|_0 = x_0 e^0 = x_0 \cdot 1 = x_0,$$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \mathcal{X}(x_0, t) = \frac{d}{dt} (x_0 e^{2t}) = 2x_0 e^{2t} = 2\mathcal{X}(x_0, t) = 2x.$$

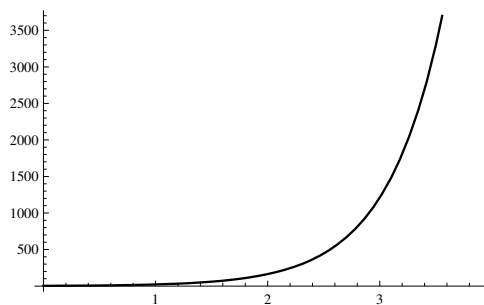


Figure 1.4. Solution de l'équation différentielle $\dot{x} = 2x$ partant de la condition initiale $x_0 = x(0) = 3$.

1.1.5 Système discret linéaire à deux conditions initiales

Deux séries de variables $x_{1,[k]}$ et $x_{2,[k]}$ indexées par rapport au temps sont nécessaires. Il faut deux conditions initiales $x_{1,[0]} \in \mathbb{R}$ et $x_{2,[0]} \in \mathbb{R}$ pour pouvoir déterminer le comportement futur du système.

Soit par exemple les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} x_{1,[k+1]} = \frac{1}{2}x_{1,[k]} + \frac{2}{5}x_{2,[k]} \\ x_{2,[k+1]} = \frac{2}{5}x_{1,[k]} + \frac{1}{2}x_{2,[k]} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} x_{1,[k+1]} = \frac{1}{2}x_{1,[k]} + \frac{3}{5}x_{2,[k]} \\ x_{2,[k+1]} = \frac{3}{5}x_{1,[k]} + \frac{1}{2}x_{2,[k]} \end{cases} \quad (1.5)$$

On constate que les deux systèmes ne diffèrent que par le facteur de couplage croisé qui passe de $\frac{2}{5}$ à $\frac{3}{5}$.

Écriture matricielle

On rassemble les variables correspondants aux conditions initiales nécessaires et suffisantes pour connaître l'évolution futur du système dans un vecteur. Un vecteur $[x_{1,[k]} \ x_{2,[k]}]^T$ est ainsi constitué qui est itérativement mis à jour par produit matriciel avec une matrice associée. Les conditions initiales forment les composantes du vecteur initial. Pour le système (1.4) :

$$\begin{bmatrix} x_{1,[k+1]} \\ x_{2,[k+1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,[k]} \\ x_{2,[k]} \end{bmatrix}$$

En partant de $\begin{bmatrix} x_{1,[0]} \\ x_{2,[0]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

on obtient successivement $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{41}{100} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{73}{200} \\ \frac{91}{250} \end{bmatrix}, \dots$

Valeurs propres et vecteurs propres

Pour isoler le comportement individuel de chaque dimension, il faut diagonaliser la matrice. Ceci peut être interprété en introduisant un changement de variables (coordonnées)

$$\begin{bmatrix} z_{1,[k]} \\ z_{2,[k]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,[k]} \\ x_{2,[k]} \end{bmatrix}$$

ou de manière plus compacte

$$z_k = Px_k$$

de telle sorte que dans les nouvelles variables les deux équations sont découplées et donc indépendantes. La matrice décrivant la dynamique devient une matrice diagonale.

$$\begin{bmatrix} z_{1,[k+1]} \\ z_{2,[k+1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,[k]} \\ z_{2,[k]} \end{bmatrix}$$

En utilisant la notation compacte

$$x_{k+1} = Ax_k$$

nous obtenons

$$z_{k+1} = Px_{k+1} = PAx_k = PAP^{-1}z_k.$$

Définissons $\bar{A} := PAP^{-1}$ qui est la matrice diagonale

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Nous supposons que la matrice A possède des valeurs propres réelles. Dans un tel cas, les vecteurs propres ont des composantes réelles et doivent satisfaire la condition

$$Av = \lambda v.$$

En d'autres termes, il faut que l'équation matricielle $(A - \lambda I)v = 0$ possède une solution v non triviale (c.-à-d. $v \neq 0$) et donc il faut que la matrice $A - \lambda I$ ne soit pas de rang plein (son déterminant doit être nul). Ainsi pour obtenir les valeurs propres, il faut résoudre

$$|A - \lambda I| = 0$$

pour obtenir λ_1 et λ_2 . Ensuite on constate que

$$\bar{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui provient directement de la structure diagonale de la matrice \bar{A} . En réintroduisant

$$\bar{A} = PAP^{-1},$$

on obtient les identités

$$\begin{aligned} PAP^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ AP^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= P^{-1} \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} PAP^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ AP^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \lambda_2 P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mais on sait que

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

que l'on résoud pour les deux vecteurs v_1 et v_2 et donc

$$\begin{aligned} v_1 &= P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & v_2 &= P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ P^{-1} &= P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la dernière équation donne l'inverse de la matrice P en fonction des vecteurs propres. Il est alors possible d'appliquer ceci au deux cas (1.4) et (1.5). En ce qui concerne (1.4), la matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

donne les valeurs propres $\lambda_1 = \frac{9}{10}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{10}$, toutes deux inférieures en module à 1, ce qui correspond à un système stable. La matrice de changement de base (coordonnées) est, compte tenu des vecteurs propres associés $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ et $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En ce qui concerne le système (1.5), la matrice

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

donne les valeurs propres $\lambda_1 = \frac{11}{10}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{10}$, dont la première est supérieure en module à un. Ceci aura comme conséquence une divergence des variables $z_{1,[k]}$ et par conséquent, une divergence des variables $x_{1,[k]}$ et $x_{2,[k]}$. Les vecteurs propres sont les mêmes que pour la matrice A_1 et par conséquent $P_2 = P_1$.

Ainsi, pour qu'un système dynamique linéaire *discret*, à coefficients constants, et à deux conditions initiales, conduise à des suites de nombres qui convergent vers zero, il est nécessaire et suffisant que les deux valeurs propres associées aient un module inférieur à l'unité.

L'analyse pour les systèmes dynamiques *continus* linéaires à coefficients constants et à deux conditions initiales s'en suit de manière similaire. La conclusion du comportement est toutefois différente que dans le cas *discret*. Pour tester si les trajectoires solutions des équations différentielles sont convergentes vers l'origine, il est nécessaire et suffisant que les deux valeurs propres aient des parties réelles négatives.

Ces considérations de stabilité seront étudiées plus en détails dans un contexte mathématique différent dans les chapitres suivants, en particulier au chapitre 4.

Une autre remarque très importante est que dans le cas instable, il n'est pas possible, pour l'instant, de modifier le système afin de le rendre stable, sauf lorsqu'il est possible d'agir directement sur une ou plusieurs variables x directement. C'est l'un des objectifs des chapitres suivants.

Entrées, perturbations, paramètres

Parmi les grandeurs $x_i(t)$ ou $x_i(k)$, $i = 1, \dots, p$, dont il a été question au paragraphe précédent, celles d'indice supérieures à n , c.-à-d. celles qui n'apparaissent pas dans les relations chronologiques seront soit des entrées, des perturbations, ou des paramètres, en fonction de certaines de leurs caractéristiques propres. Ceci ne signifie pas pour autant qu'elles ne dépendent pas de la variable chronologique en tant que tel (elles peuvent être fonction du temps). Cependant elles sont considérées comme des grandeurs qui évoluent *sans aucune relation explicite chronologique*, c.-à-d. sans leur fonction f_i , $i = n + 1, \dots, n$. Ainsi, dans le cas où $p > n$ seulement, les variables d'indices x_{n+1} , x_{n+2} , \dots , x_p seront des *variables exogènes*. Parmi les variables exogènes, nous faisons la distinction entre :

- Les entrées. Ce sont des variables que l'opérateur peut changer à sa guise. Ce sont les variables manipulées et déterminées par la stratégie de commande que l'on cherchera à déterminer.
- Les perturbations. Ce sont également des sortes d'entrées, mais dont la spécification ne dépend pas de l'opérateur. On peut les assimiler à une entrée d'un autre intervenant, d'un autre joueur, qui cherche à remplir des objectifs pas nécessairement concurrents à ceux de l'opérateur. Les perturbations sont la plupart du temps de nature aléatoire et souvent difficilement modélisables.
- Les paramètres à proprement dit, c'est-à-dire toutes les autres variables n'ayant pas de relation chronologique explicite. Les paramètres sont, la plupart du temps, constants, ou alors, lentement ou peu variables par rapport à la variable chronologique.

Les systèmes dynamiques que nous allons étudier sont de nature très générale. Nous allons cependant les représenter de manière plus ou moins approximative par des modèles dynamiques, linéaires, stationnaires, causals et initialement au repos. Ces propriétés sont décrites ci dessous.

- a) Linéarité : un système est **linéaire** s'il obéit au principe de superposition défini par les propriétés d'additivité et d'homogénéité. Considérons le système S donné à la figure 1.5 avec l'entrée u et la sortie y .

Si le système est initialement au repos et que l'entrée $u_1(t)$ produit la sortie $y_1(t)$ et l'entrée $u_2(t)$ produit

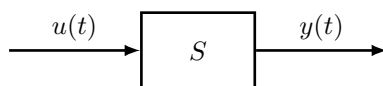


Figure 1.5. Système dynamique.

la sortie $y_2(t)$, alors la réponse à la somme $u_1 + u_2$ est la somme $y_1 + y_2$:

$$\text{principe d'additivité : } u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$\text{principe d'homogénéité : } \alpha u_1(t) \rightarrow \alpha y_1(t); \quad \alpha = \text{nombre réel}$$

Il s'ensuit qu'une combinaison linéaire de signaux d'entrée appliquées à un système linéaire produit la *même* combinaison linéaire des signaux de sortie correspondants :

$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

Il faut parfois faire attention car la représentation mathématique d'un système linéaire peut ne pas satisfaire au principe de superposition. Par exemple, bien qu'exprimant l'équation d'une droite, la relation statique

$$y = ax + b$$

n'est pas linéaire à cause du terme constant b . On dit qu'une telle relation est **affine** en x . En définissant $\tilde{a} = ax$, laquelle est linéaire.

- b) Stationnarité : un système est **stationnaire** (ou invariant) si tous ses paramètres sont constants par rapport au temps. Les entrées et sorties peuvent varier, par exemple $P(t)$ et $T(t)$, mais les paramètres physiques du système restent constants (par exemple, sa géométrie, masse, chaleur spécifique). On dit aussi qu'un système stationnaire ne vieillit pas. Il se comportera plus tard de la même façon que maintenant. Dans le cas contraire, on parle d'un système non stationnaire (ou évolutif).

- c) Causalité : un système est **causal** si sa réponse à une excitation ne précède pas l'excitation elle-même (fig. 1.6). Ceci signifie que dans les relations chronologiques spécifiant les variables à l'instant t (ou k) les autres variables à l'instant plus grand que t ou d'indice supérieure à k ne peuvent apparaître. Tous les systèmes physiques évoluant en temps réel sont causals, l'effet ne pouvant en effet pas précéder la cause.

Mais on peut aisément construire des systèmes dynamiques non causals. Considérons par exemple des

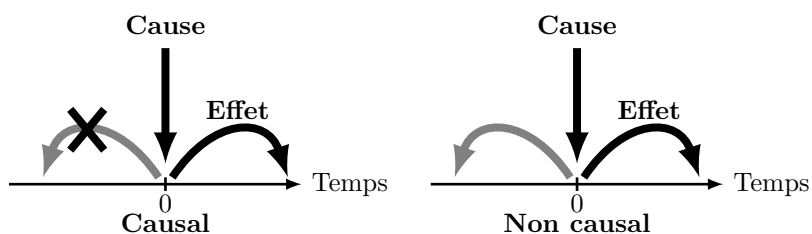


Figure 1.6. Distinction entre système causal et non causal.

données bruitées que l'on a mesurées en fonction du temps lors de l'expérience. Après coup, donc pas en temps réel, on décide de lisser ces données avec un filtre, c'est-à-dire un système dynamique qui prend les

données mesurées en entrée et génère les données filtrées en sortie. Ce filtre est de préférence non causal car il détermine la valeur filtrée à un instant donné en considérant la valeur mesurée à cet instant mais aussi aux instants précédents et suivants.

- d) Au repos : un système dynamique est **au repos**, à un instant donné, si toutes les quantités qui décrivent son état interne demeurent constantes dans le temps. Il se trouve à l'état stationnaire et ainsi, en l'absence d'excitation extérieure, le système n'évolue pas. Ses mémoires sont vides. Dans le cas contraire, on dit que le système est chargé (fig. 1.7).

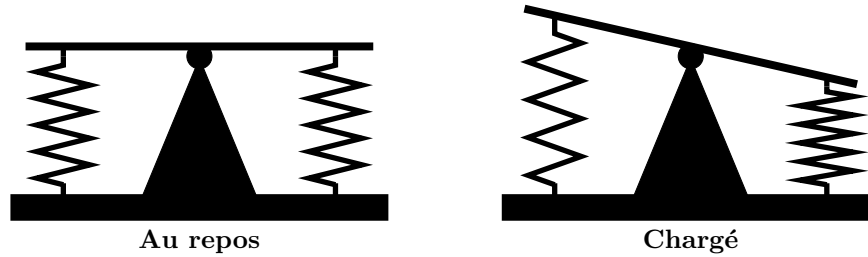


Figure 1.7. Distinction entre système au repos et chargé.

Il est important de noter les différences qui existent entre un système stationnaire, un système dynamique à l'état stationnaire et un système statique :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= 0 && \text{système stationnaire } (\theta : \text{vecteur de paramètres}) \\ \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} &= 0 && \text{système à l'état stationnaire ou à un point d'équilibre} \\ &&& (u, y : \text{signaux temporels}) \\ y(t) &= f[u(t)] && \text{système statique (pas de mémoire)} \end{aligned}$$

La nomenclature pour ces propriétés peut parfois prêter à confusion. On la résume ici dans différentes langues :

Français	Allemand	Anglais
stationnaire	zeitinvariant	time invariant
à l'état stationnaire	beim stationären	at steady state
statique	statisch	static

La plupart des modèles que nous allons utiliser pour l'analyse et la synthèse de systèmes automatiques posséderont ces cinq propriétés. On pourra alors les représenter par des équations différentielles (a) linéaires (b) à coefficient constant (c) et avec des conditions initiales nulles (e). On utilisera aussi l'appellation **système lscr** pour désigner un système **l**inéaire, **s**tationnaire, **c**ausal et **i**ntialement **a**u **r**epos.

Les systèmes physiques peuvent posséder plusieurs entrées et plusieurs sorties, comme par exemple dans l'exemple de la conduite automobile présentée précédemment. On appelle de tels systèmes des **systèmes multivariables**. Cependant, on isole très souvent une entrée et une sortie pour étudier une boucle de commande. On parle alors de **systèmes monovaryables**, lesquels seront étudiés en priorité dans ce cours.

1.2 Commande automatique

1.2.1 Idée de base

Le domaine de l'**automatique** comprend l'ensemble des méthodes permettant de conduire un système sans *intervention humaine* sur la base de mesures liées à son comportement. Le but de la commande consiste à

déterminer les entrées qu'il faut appliquer au système pour obtenir un comportement désiré.

Un exemple de commande manuelle est celui de la conduite d'un automobile où le pilote, compte tenu de la connaissance qu'il a du comportement de son véhicule et des différentes mesures que son oeil effectue, détermine les actions de direction et d'accélération qui lui permettront de couvrir son parcours de la manière souhaitée (fig. 1.8). Nous remarquons la présence d'une **boucle de rétroaction** dans laquelle, en plus du système à commander (automobile), se situent le régulateur (cerveau du pilote), l'organe de mesure (yeux du pilote) et les organes de commande (pieds et mains du pilote).

La commande automatique d'une automobile est plus difficile à réaliser. Si les sorties (position et vitesse) sont

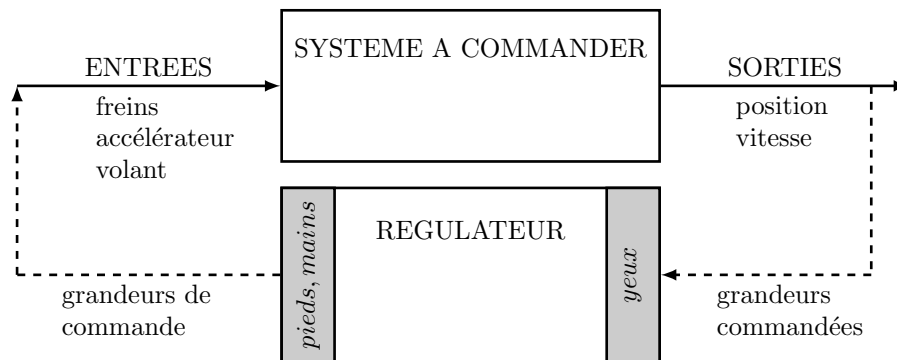


Figure 1.8. Automobile commandée manuellement.

facilement mesurables, il convient de tenir compte de l'environnement et notamment de la route et du trafic routier. Pour appréhender correctement l'environnement, il est nécessaire de disposer de caméras et de traiter les images en temps réel. Un ordinateur joue alors le rôle du pilote et transmet ses ordres aux entrées (freins, accélérateur et volant).

En tant que science, l'automatique essaie de dégager des modèles abstraits des problèmes d'automatisations et de formuler des solutions d'intérêt général. C'est ce processus d'abstraction et de solutions qui fait l'objet de ce cours.

1.2.2 Éléments d'une boucle de commande

Dans une boucle de rétro-action nous avons les grandeurs suivantes :

- grandeur commandée ou grandeur à commander,
- grandeur de commande,
- grandeur perturbatrice ou perturbation,
- grandeur de consigne,
- erreur ou écart de commande.

L'objet à commander est appelé processus ou **système à commander**. Pour mesurer la grandeur commandée et la perturbation, nous disposons d'**organes de mesure** (capteurs). La grandeur de commande est imposée au processus à l'aide d'un **organe de commande** (actionneurs). Souvent, on considère comme système à commander l'ensemble "processus, organe de mesure et organe de commande".

1.2.3 Objectifs de la commande

Nous distinguerons les deux problèmes principaux suivants :

- a) Problème d'asservissement ou de poursuite : la grandeur commandée doit suivre une consigne qui *varie* dans le temps (exemples : démarrage d'un réacteur discontinu, positionnement de la table d'une machine-outil, conduite d'une automobile, d'un avion, d'un missile, etc.).
- b) Problème de régulation : la grandeur commandée doit suivre une consigne *constante* en dépit de variations internes du processus ou de la présence de perturbations (exemple : régulation d'un processus industriel autour de son point de fonctionnement).

Contrairement à la commande par compensation de perturbation, la commande par rétroaction est apte à compenser *toutes* les sources d'erreurs qui influencent T puisque cette dernière est mesurée. C'est là que réside l'avantage de mesurer la grandeur commandée et d'utiliser une commande par rétroaction. Cette approche constitue la partie principale de ce cours. Un schéma de commande par compensation de perturbation ne sera efficace que si les trois conditions suivantes sont remplies :

- a) il n'y a qu'une seule perturbation affectant la grandeur commandée ;
- b) la perturbation peut être mesurée précisément ;
- c) l'effet de la perturbation sur la grandeur commandée est bien connu, afin qu'il puisse être compensé.

La mise au point d'un régulateur nécessite en général une bonne connaissance du système à commander. Le chapitre 2 traitera de l'étude de systèmes et leur modélisation.

1.3 Exemples

Nous présentons quatre exemples permettant de mettre en évidence une partie spécifique du cours. Ils ne sont pas nécessairement du domaine de l'ingénierie de l'environnement (par exemple le moteur électrique et la bille sur la roue). Toutefois ils sont importants car ils illustrent la nature universelle de la théorie des systèmes dynamiques et ils permettent également d'étudier certains aspects de manière plus directe. Par exemple, la bille sur la roue est un joli exemple d'équilibrisme spectaculaire étant donné la nature instable du système. Le moteur est un exemple simple donnant naissance à une fonction de transfert élémentaire. De plus, c'est un système très concret et très répandu.

Nous présentons dans ce chapitre les quatre exemples suivants :

1. Système d'irrigation.
2. Immeuble à quatre étages et structure anti-sismique.
3. Moteur électrique.
4. Bille sur roue.

La modélisation par des équations différentielles ainsi que la synthèse de régulateurs pour ces systèmes pour atteindre les objectifs de commande seront présentés dans les chapitres suivants. Nous insisterons pour l'instant sur les signaux et les systèmes de manière descriptive et phénoménologique.

1.3.1 Système d'irrigation

Un réservoir d'eau possède une vanne/pompe qui permet d'alimenter un circuit d'irrigation connecté à un champ d'une surface donnée. Ce champ est en plein air et sujet aux pluies et avaries. L'objectif du régulateur est de maintenir un taux d'humidité le plus constant possible malgré les fluctuations climatiques, telle que sécheresse momentanée, pluies soutenues, etc. Le régulateur est connecté à la pompe et actionne celle-ci en fonction de la valeur de l'humidité du champ et permet de collecter le surplus d'eau en la collectant dans le réservoir ou, en cas de sécheresse, d'alimenter le circuit d'irrigation en actionnant la pompe dans le sens contraire et en vidant le réservoir.

On peut ainsi distinguer les signaux et système suivant :

- perturbation : pluie

- système : champ + absorption
- régulateur : ordinateur, algorithme, réservoir et pompe
- grandeur de commande : commande de la pompe
- grandeur commandée : taux d'humidité
- grandeur mesurée : taux d'humidité

1.3.2 Immeuble à quatre étages

Un petit immeuble consiste en quatre dalles non-déformables représentant les planchers et sols connectés les uns aux autres par une structure porteuse de parois latérales. L'hypothèse est que les parois latérales peuvent se déformer et agissent comme des forces de ressort sur les dalles situées de part et d'autre des parois. Le système entre donc en oscillation si le sol se met à vibrer. Lors d'un séisme, l'énergie est transmise dans l'immeuble qui agit comme un résonateur. Si cette énergie ne peut être dissipée, cela conduit à la destruction des parois et des dalles. L'objectif est d'ajouter un système anti-sismique qui génère des forces supplémentaires entre le sol et le premier étage. Ces forces permettent d'absorber de l'énergie permettant à l'immeuble de mieux encaisser le séisme.

Les signaux et systèmes associés sont :

- perturbation : tremblement de terre.
- système : étages (dalles) et structure porteuse (parois)
- régulateur : générateur de forces entre le sol et le premier étage et algorithme de commande
- grandeur de commande : consigne de force au générateur
- grandeur commandée : différence de position latérale entre la première dalle (étage 1) et le sol
- grandeur mesurée : écart entre deux étages

Remarquer qu'il n'est pas nécessaire de mesurer l'écart entre deux étages particuliers. Seul un écart entre deux étages quelconques est nécessaire. La théorie associée est celle de l'observation et la construction d'observateurs. Nous n'aborderons pas cette approche mais nous nous contenterons d'une approche entrée-sortie classique pour arriver aux objectifs de commande et de régulation.

1.3.3 Moteur électrique

Un moteur électrique à courant continu est considéré. Une tension d'alimentation continue engendre un courant électrique dans l'armature du moteur. Ce courant électrique agit sur des aimants et/ou (selon les types de moteur) sur une autre bobine et provoque une force électromagnétique responsable d'un couple (moment de force) entraînant le rotor (partie mobile rotative) à tourner autour du stator (partie fixe qui guide l'axe du rotor). On distinguera, le circuit électrique constitué d'une inductance et d'une résistance électrique couplée à un générateur de tension induite par le mouvement du rotor, du comportement mécanique modélisé par une inertie avec ou sans frottement mécanique sujet à un couple proportionnel au courant électrique. Il est parfois d'usage de négliger l'inductance dans le circuit électrique.

- perturbation : couple de freinage agissant sur le rotor
- système : moteur électrique
- régulateur : ordinateur, générateur de tension
- grandeur de commande : tension aux bornes du moteur
- grandeur commandée : vitesse ou position angulaire du moteur
- grandeur mesurée : vitesse ou position angulaire du moteur

1.3.4 Bille sur roue

Une roue est actionnée par un moment de force et peut donc tourner et se positionner librement à l'aide du moment de force. L'axe de la roue est perpendiculaire à la gravité de telle sorte qu'une bille qui roule sans glisser sur la roue tombe sous l'effet de la gravité. L'objectif est de maintenir la bille en position instable en utilisant le moment de force pour agir sur la roue.

- perturbation : aucune, ou déplacement de temps en temps de la bille de son point d'équilibre
- système : bille et roue
- régulateur : ordinateur et générateur de moment de force (moteur) qui permet de déplacer la position angulaire de la roue
- grandeur de commande : moment de force
- grandeur commandée : position de la bille
- grandeur mesurée : écart de la bille par rapport à sa position d'équilibre

Modélisation mathématique

2.1 Modèles mathématiques

Un modèle mathématique est un ensemble de relations mathématiques liant les grandeurs d'entrée et de sortie d'un processus (ou système) physique.

2.1.1 Domaines d'applications

Un modèle mathématique permet :

- d'analyser certaines propriétés du processus,
- de mieux comprendre le processus en effectuant des simulations,
- de développer une stratégie de commande permettant d'ajuster certaines grandeurs afin que les grandeurs commandées suivent les consignes correspondantes,
- d'optimiser le comportement du processus.

2.1.2 Classes de modèles mathématiques

On distingue deux classes de modèles mathématiques :

- Le **modèle de connaissance** élaboré à partir de lois physiques connues, d'où son autre nom de modèle physique. Un tel modèle peut être développé même si le processus correspondant n'est pas encore disponible. Cependant, si certains paramètres physiques sont inconnus, ils doivent être déterminés expérimentalement.
- Le **modèle de représentation** pour lequel une structure simple est proposée sur la base du comportement du processus face à des excitations particulières. Le modèle met en relation directe chaque entrée et chaque sortie du système. Les paramètres du modèle sont identifiés à partir d'essais expérimentaux.

Cette distinction entre modèle de connaissance et modèle de représentation est illustrée à la figure 2.1.

Ce chapitre traite exclusivement de modélisation pour arriver à des modèles de connaissance dynamiques. Par contre, l'approche de commande développée dans les chapitres suivants considérera les systèmes dynamiques indépendamment de leur mode d'élaboration (connaissance ou représentation).

2.1.3 Procédure de modélisation physique

L'élaboration d'un modèle de connaissance comporte généralement quatre étapes principales :

1. *Structuration du problème* qui permet de définir les phénomènes physiques dominants pour l'étude envisagée et d'en déduire les grandeurs caractéristiques du modèle (entrée ou variables indépendantes, sorties ou variables dépendantes). Dans cette étape de structuration, la contribution principale de l'ingénieur consiste à distinguer les éléments importants de ceux qui peuvent être négligés.

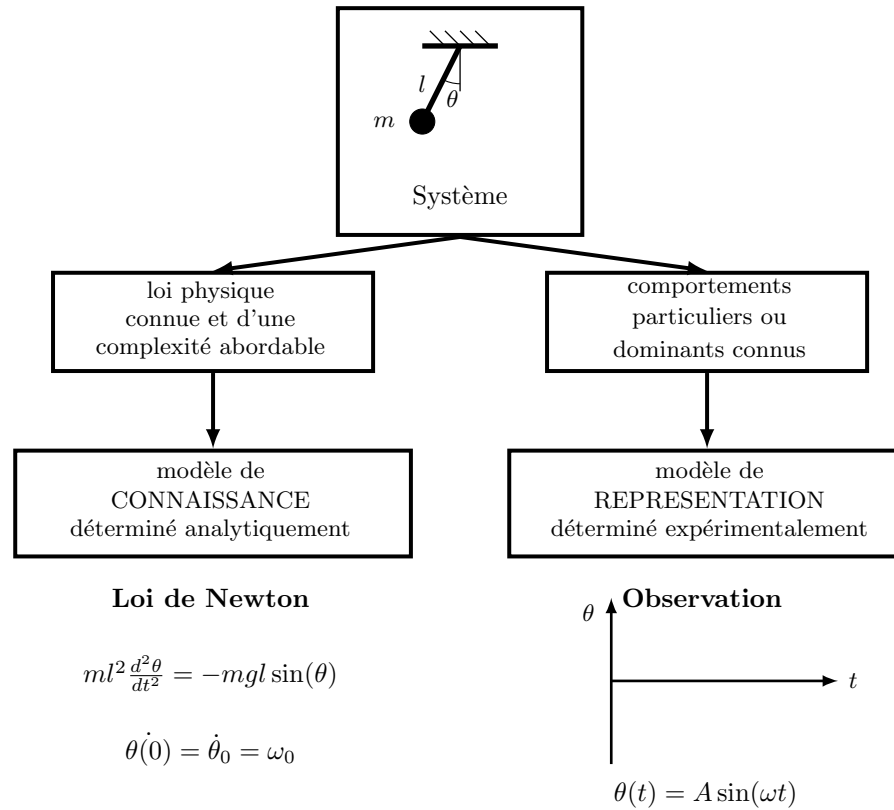


Figure 2.1. Modèle de connaissance et modèle de représentation pour un pendule.

2. Mise en équations en utilisant des lois connues, par exemple :

- Des **lois de conservation** (par exemple, de masse, d'énergie, de quantité de mouvement, de flux magnétique ou de charges électriques, selon la nature du système étudié). Ces relations sont généralement de type *différentiel*.
- Des **relations constitutives** qui mettent en relation des grandeurs de nature différente, par exemple, le courant et la tension dans une résistance ($u = Ri$), ou la pression, le volume et la température d'un gaz dans un système fermé ($pV = nRT$), ou encore la différence de pression et le débit à travers une vanne ($q = \alpha C_V \sqrt{\Delta p}$). Ces relations sont le plus souvent de type *algébrique*.

On obtient ainsi un système d'équations différentielles et algébriques qui décrivent le comportement dynamique du système. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) + bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

où $u(t)$ est l'entrée, $x(t)$ l'état, $y(t)$ la sortie, t le temps, a , b , c et d les paramètres du modèle et x_0 la condition initiale du système dynamique.

3. Identification des paramètres à partir de données physiques ou de mesures expérimentales.

4. Validation du modèle dans le cadre de l'étude considérée, en comportant les prévisions qu'il fournit avec certaines données mesurées expérimentalement.

Nous nous proposons de modéliser des systèmes dynamiques de nature chimique, thermique et hydraulique.

2.1.4 Types de variables

On appelle **variable d'entrée** toute *variable indépendante* qui peut être, en principe directement *modifiée* par l'opérateur.

On appelle **variable d'état** toute *variable dépendant* des variables d'entrée ou d'autre variables d'état ; ces variables d'état servent à représenter le comportement *dynamique* du processus et sont donc associées aux termes dynamiques ou d'accumulation ; une variable d'état ne peut être modifiée qu'indirectement par l'intermédiaire de la modification d'une variable d'entrée.

On appelle **variable de sortie** tout variable d'état (ou combinaison de celles-ci) qui peut être *mesurée*.

Remarque importante

En automatique, lorsque l'on parle de « variable d'entrée » ou de « variable de sortie » (comme définies ci-dessus), on ne parle pas nécessairement de ce qui entre ou sort physiquement du processus considéré (réacteur chimique, échangeur de chaleur, etc.). Il convient de distinguer le processus physique réel (réacteur chimique, échangeur de chaleur, etc.) du système abstrait permettant une description mathématique des relations entre variables indépendantes et variables dépendantes. On peut représenter la situation par le schéma de la figure 2.2.

Pour illustrer ceci, prenons l'exemple d'une cuve, avec un débit volumique d'alimentation q_e , un débit volumique de fuite q_s , une surface de section S et la hauteur de niveau h (fig. 2.3).

En effet, on cherche avec un modèle mathématique à représenter la variation de la hauteur du liquide dans la

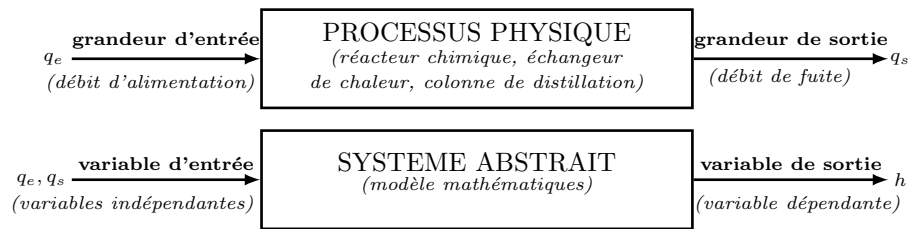


Figure 2.2. Processus physique et système abstrait.

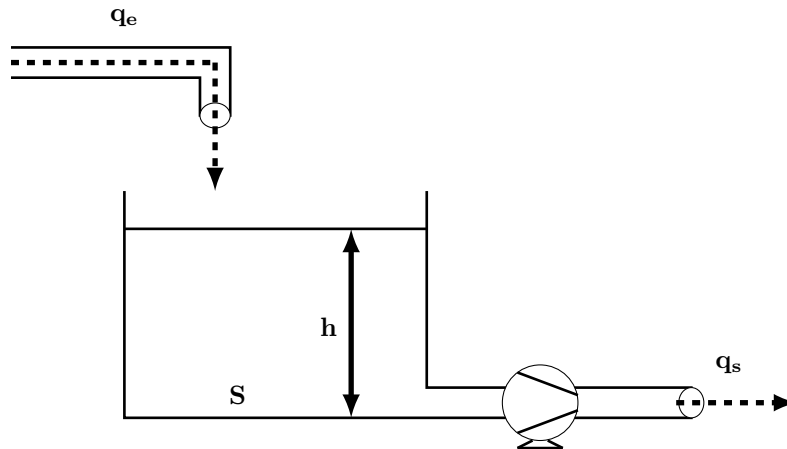


Figure 2.3. Cuve avec volume variable.

cuve en fonction des débits volumiques d'alimentation *et* de fuite.

2.2 Modèle d'état

2.2.1 Concept d'état

L'*état* d'un système dynamique déterministe à un instant donné est l'information minimale qui permet, à partir des entrées futures, de déterminer de façon univoque le comportement futur du système.

Plus précisément :

$$\left. \begin{array}{l} \text{état à } t_0 \\ u_{[t_0, \infty)} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{comportement pour } t \geq t_0$$

Ainsi, l'état d'un système est l'information résumant parfaitement le passé du système puisqu'il fixe l'évolution future une fois les entrées futures spécifiées. Les équations différentielles qui décrivent un système dynamique possèdent des conditions initiales pour t_0 . Ces conditions initiales représentent précisément l'état du système au temps t_0 . Ainsi, même si le système n'est pas relâché au temps t_0 , la connaissance de son état à t_0 résume complètement l'effet du passé.

Dans ce cours, on ne considère que les systèmes pour lesquels l'état à un instant donné est un nombre fini n de nombres réels. Ceux-ci sont tout naturellement rassemblés dans un vecteur $x(t)$ de dimension n appelé **vecteur d'état** :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Les coordonnées $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ du vecteur d'état représentent les variables d'état au temps t . L'entier n est par définition l'**ordre** du système dynamique. Il s'ensuit qu'un système statique est d'ordre zéro car son modèle ne contient aucune équation différentielle.

Dans le but d'alléger les notations, les entrées $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ sont elles aussi regroupées dans un vecteur $u(t)$ de dimension p appelé **vecteur d'entrée** :

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Il en est de même des sorties $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$, réunies dans un vecteur $y(t)$ de dimension q appelé **vecteur de sortie** :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Exemple 1

Soit un objet auquel on applique une force $u[t_0, \infty)$ pour $t \geq t_0$. Afin de déterminer de façon complète la position future de l'objet, il est nécessaire de connaître sa position et sa vitesse initiales. Il résulte de la définition de l'état d'un système que $x(t_0)$ et $\dot{x}(t_0)$ représentent l'état du système à t_0 . Par généralisation, $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ représentent l'état du système au temps t .

On définit l'état comme $x(t)$ et $\dot{x}(t)$, c'est-à-dire la position et la vitesse de l'objet. Cependant, le choix des variables d'état n'est pas unique. On peut très bien choisir d'autres combinaisons des variables position et vitesse comme, par exemple, $2x(t)$ et $x(t) - 5\dot{x}(t)$. Ces deux dernières quantités sont alors des variables d'état qui ne possèdent plus une signification physique immédiate.

Exemple 2

Soit le retard unité $y(t) = u(t - 1)$

Afin de déterminer $y[t_0, \infty)$ à partir de $u[t_0, \infty)$ il faut connaître $u[t_0 - 1, t_0)$ qui représente donc l'état du système dynamique à t_0 . Comme il y a une infinité de valeurs de u entre $t_0 - 1$ et t_0 , il s'agit donc d'un système dynamique d'ordre infini.

2.2.2 Sélection des variables d'état

Pour extraire les variables qui permettent de décrire le système dans le formalisme d'état choisi, il faut tout d'abord inventorier l'ensemble des grandeurs qui apparaissent sous forme différentielle dans les équations. Ces grandeurs sont notées $\gamma_i, i = 1, \dots, n_\gamma$. L'ordre maximale de dérivation de γ_i est noté ρ_i , lequel définit le nombre de variables d'état qu'il faut introduire pour représenter la grandeur γ_i . Ces variables d'état sont, par ordre de dérivation :

$$\gamma_i^{(0)}, \gamma_i^{(1)}, \dots, \gamma_i^{(\rho_i-1)}$$

où

$$\gamma_i^{(0)} = \gamma_i \quad \text{et} \quad \gamma_i^{(k)} = \frac{d^k \gamma_i}{dt^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \rho_i - 1$$

L'ordre du système est alors égal à $\sum_{i=1}^{n_\gamma} \rho_i$.

La sélection des entrées et des sorties est fonction de l'application considérée. Les entrées sont les variables indépendantes ajustables, alors que les sorties sont les variables dépendantes mesurées. Il peut également y avoir des variables indépendantes non ajustables appelées génériquement perturbations. Les grandeurs qui ne sont ni des variables d'état, ni des entrées, ni des sorties, ni des perturbations, doivent être éliminées par substitution.

Exemple

Soit le système d'équations différentielles :

$$a\ddot{w} + \sin \dot{z} = u_1^2$$

$$\sqrt{\dot{v}} + \cos \dot{z} = u_2$$

$$\dot{z} + z = \alpha t$$

avec les conditions initiales $v(t_0) = v_0, w(t_0) = w_0, \dot{w}(t_0) = a_0$ et $z(t_0) = z_0$.

Le tableau 2.1 inventorie les grandeurs différentielles de ce système dynamique ainsi que leur ordre respectif. Il est alors possible de définir les variables d'état. On remarque également que les conditions initiales correspondent à $x(t_0)$.

i	grandeur γ_i	ordre ρ_i	variables d'état
1	v	1	$x_1 = v$
2	w	2	$x_2 = w, x_3 = \dot{w}$
3	z	1	$x_4 = z$

Table 2.1. Sélection des variables d'état.

L'ordre de ce système est donné par l'expression $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 4$.

Le modèle dynamique qui résulte de l'expression de la première dérivée de chaque variable d'état sélectionnée est appelé **modèle d'état**. Les équations originales sont exploitées pour exprimer par substitution ces dérivées en fonction des variables d'état et des entrées :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{v} = (u_2 - \cos \dot{z})^2 = [u_2 - \cos(-x_4 + \alpha t)]^2 \\ \dot{x}_2 = \dot{w} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \ddot{w} = \frac{1}{a}[u_1^2 - \sin(-x_4 + \alpha t)] \\ \dot{x}_4 = \dot{z} = -x_4 + \alpha t \end{cases}$$

La même démarche est exploitée pour exprimer les sorties en fonction des variables d'état et des entrées. Par exemple, si seule la grandeur w est mesurée :

$$y = w = x_2$$

2.2.3 Représentation générale

A partir des lois physiques du mouvement, de nombreux systèmes dynamiques peuvent être ainsi décrits par des équations différentielles et algébriques exhibant la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t] & x_1(t_0) = x_{1,0} \\ \dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t] & x_2(t_0) = x_{2,0} \\ \vdots & \\ \dot{x}_n(t) = f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t] & x_n(t_0) = x_{n,0} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = g_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t] \\ \dot{y}_2(t) = g_2[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t] \\ \vdots \\ \dot{y}_q(t) = g_q[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t] \end{cases} \quad (2.5)$$

La variable t est le temps. On introduit les notations vectorielles (2.1)-(2.3) et les fonctions vectorielles f et g :

$$f[x(t), u(t), t] = \begin{bmatrix} f_1[x(t), u(t), t] \\ f_2[x(t), u(t), t] \\ \vdots \\ f_n[x(t), u(t), t] \end{bmatrix}$$

$$g[x(t), u(t), t] = \begin{bmatrix} g_1[x(t), u(t), t] \\ g_2[x(t), u(t), t] \\ \vdots \\ g_q[x(t), u(t), t] \end{bmatrix}$$

La dérivée du vecteur d'état s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{bmatrix}$$

Les relations (2.4) et (2.5) prennent alors l'allure vectorielle très compacte :

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \quad (2.7)$$

Le vecteur $u(t)$ est l'entrée du système et $y(t)$ sa sortie. Si $x(t_0)$ et $u(t)$, $t \geq t_0$, sont connus, l'équation (2.6) peut être intégrée pour donner $x(t)$, $t \geq t_0$. La relation (2.7) permet ensuite le calcul de $y(t)$ pour $t \geq t_0$. Ainsi,

comme la notation le laissait présumer, $x(t_0)$ représente l'état au temps t_0 .

L'équation (2.6) régissant le comportement dynamique du système est appelée **équation d'état**. Elle décrit le comportement dynamique du vecteur d'état $x(t)$. L'ordre n du système est donné par la dimension du vecteur $x(t)$.

La relation (2.7) est l'**équation de sortie**. Elle indique une relation statique entre les variables d'état $x(t)$ et d'entrée $u(t)$ et le vecteur de sortie $y(t)$. Souvent, $u(t)$ n'intervient pas dans l'équation de sortie (pas d'effet *direct* de l'entrée sur la sortie).

Les équations d'état (2.6) et de sortie (2.7) forment ensemble le modèle d'état. Si $f[x(t), u(t), t]$ et $\partial f / \partial x[x(t), u(t), t]$ sont des fonctions continues de t , on démontre qu'il existe une solution unique pour $x(t)$ étant donnés $x(t_0)$ et $u[t_0, \infty)$.

Pour un système statique, l'équation d'état (2.6) n'existe pas, et le système se réduit à : $y(t) = g[u(t), t]$

2.2.4 Modèle d'état linéaire et stationnaire

Un modèle d'état particulièrement important est celui dans lequel les fonctions f et g sont linéaires par rapport à x et u et indépendantes du temps. Le modèle devient alors :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.8)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.9)$$

où A , B , C et D sont respectivement des matrices de dimensions $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ et $q \times p$. La figure 2.4 représente le schéma fonctionnel de ce système.

Remarquons que, dans ce schéma fonctionnel, les variables d'état apparaissent à la sortie des intégrateurs. Les divers rôles joués par les matrices du modèle ressortent clairement : la **matrice d'entrée B** assure la liaison du vecteur d'entrée $u(t)$ avec la partie dynamique caractéristique par la **matrice du système A** et l'intégrateur ; la **matrice de sortie C** représente la connexion entre cette partie dynamique et le vecteur de sortie $y(t)$, tandis

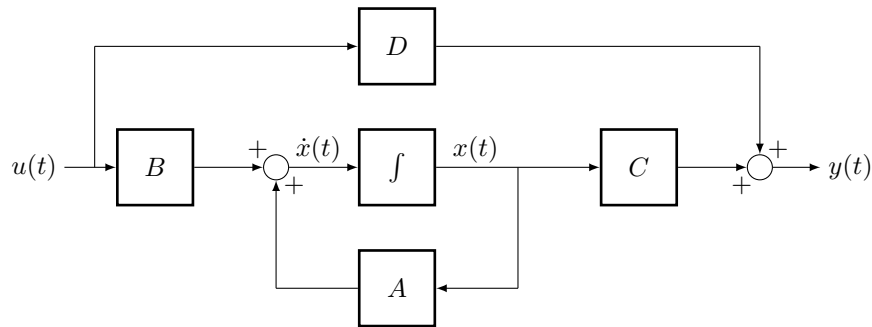


Figure 2.4. Système dynamique linéaire et stationnaire.

que la **matrice de passage D** indique l'effet direct de $u(t)$ sur $y(t)$.

Le cas monovarié est caractérisé par $p = q = 1$. La matrice B devient alors le vecteur colonne b de dimension n , la matrice C le vecteur ligne c^T de dimension n , et la matrice D le scalaire d :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

Le schéma fonctionnel pour le cas monovarié linéaire et stationnaire est donné à la figure 2.5.

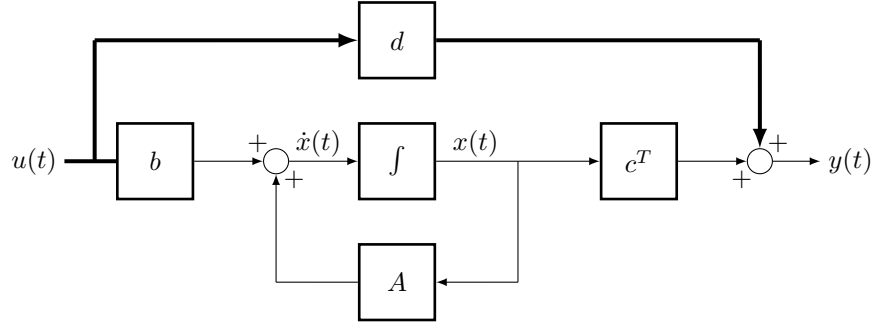


Figure 2.5. Système dynamique linéaire et stationnaire.

2.2.5 Exemple : Cuve de mélange

Une cuve de mélange (fig 2.6) est alimentée par deux vannes fournissant les débits volumiques variables $q_1(t)$ et $q_2(t)$ qui contiennent un produit dissous avec les concentrations constantes c_1 et c_2 . Le brassage étant supposé parfait, la concentration est uniforme dans la cuve et égale à $c(t)$. Le débit de sortie $q(t)$ est proportionnel à la racine carrée de la hauteur du liquide dans la cuve $h(t)$. Les entrées de ce système dynamique sont les débits q_1 et q_2 , les sorties sont la hauteur du liquide dans la cuve $h(t)$ et le rapport de concentration $c(t)/c_1$.

Nous supposons la masse volumique ρ constante. Avec $V(t) = Sh(t)$, ou V est le volume du mélange et S la

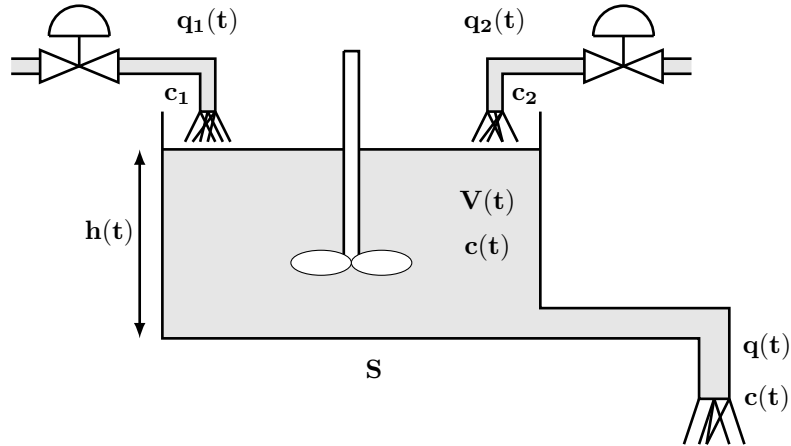


Figure 2.6. Cuve de mélange.

section constante du bac, nous pouvons écrire les bilans de masse totale et de masse pour le produit dissout comme suit :

$$\rho S \frac{d}{dt}(h(t)) = \rho q_1(t) + \rho q_2(t) - \rho q(t) \left[\frac{kg}{s} \right] \quad (2.10)$$

$$\rho S \frac{d}{dt}[c(t)h(t)] = \rho c_1 q_1(t) + \rho c_2 q_2(t) - \rho c(t) q(t) \left[\frac{kgP}{s} \right] \quad (2.11)$$

avec les conditions initiales $h(0) = h_0$ et $c(0) = c_0$.

Le débit de sortie dépend de la hauteur du liquide $h(t)$ selon (écoulement turbulent) :

$$q(t) = k\sqrt{h(t)} \quad (2.12)$$

La constante $k > 0$ se détermine expérimentalement. Les deux bilans peuvent ainsi s'écrire :

$$S\dot{h}(t) = q_1(t) + q_2(t) - k\sqrt{h(t)} \quad (2.13)$$

$$S[h(t)\dot{c}(t) + c(t)\dot{h}(t)] = c_1 q_1(t) + c_2 q_2(t) - c(t)k\sqrt{h(t)} \quad (2.14)$$

En combinant ces deux équations, et en posant $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = c(t)$, $u_1(t) = q_1(t)$ et $u_2(t) = q_2(t)$, on obtient :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{S}[u_1(t) + u_2(t) - k\sqrt{x_1(t)}] \quad x_1(0) = h_0 \quad (2.15)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{Sx_1(t)}[[c_1 - x_2(t)]u_1(t) + [c_2 - x_2(t)]u_2(t)] \quad x_2(0) = c_0 \quad (2.16)$$

C'est l'équation d'état non linéaire de la cuve de mélange. L'équation de sortie s'écrit simplement :

$$y_1(t) = x_1(t)y_2(t) = x_2(t)/c_1$$

2.3 Exemples de modélisation

2.3.1 Irrigation

La modélisation du champ et de la cuve (réservoir) s'effectue en appliquant un simple bilan d'eau. Il y a deux hypothèses importantes cependant. La répartition de l'eau est uniforme sur le champ et une seule variable est utilisée pour modéliser la quantité d'eau dans le champ. La seconde hypothèse est qu'en absence de pompage et une fois les vannes ouvertes, le débit de la cuve obéit à la loi de Toricelli

$$Q = \kappa\sqrt{2g|h_1 - h_2|}\text{sign}(h_1 - h_2)$$

avec h_1 la hauteur de l'eau dans le champ et h_2 la hauteur de l'eau dans la cuve. La constante κ reflète la perte d'énergie dans l'écoulement (type de vanne). Le débit de pluie en [m/s] est noté v . C'est une perturbation. Le débit de pompage est noté u en [m³/s].

Désignons par A_1 la section en [m²] du champs et par A_2 la section de la cuve. Le bilan d'eau conduit ainsi aux deux équations différentielles du premier ordre couplées

$$\begin{aligned} A_1 \dot{h}_1 &= A_1 v - \rho h_1 - u - \kappa \sqrt{2g|h_1 - h_2|} \text{sign}(h_1 - h_2) \\ A_2 \dot{h}_2 &= u + \kappa \sqrt{2g|h_1 - h_2|} \text{sign}(h_1 - h_2) \end{aligned}$$

u	débit de la pompe	$\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$
κ	facteur de conversion	$\left[\frac{\text{N s}}{\text{kg} \sqrt{\text{mm}^3}} \right]$
A_2	surface	$[\text{m}^2]$
v	débit de la pluie	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

2.3.2 Moteur électrique

Le circuit électrique comporte une inductance, une résistance électrique et un générateur de tension induite. u désigne la tension électrique aux bornes du moteur, i est le courant qui circule dans le moteur, ω est la vitesse angulaire du moteur, K est la constante de tension induite, R la résistance et L est l'inductance électrique. L'inductance mesure la résistance à imposer un champ et un flux électromagnétique qui se traduit par une inertie au changement de courant dans le moteur.

L'équation électrique s'écrit

$$u = R i + L \frac{di}{dt} + K \omega \quad (2.17)$$

Conjointement avec le circuit électrique, le moteur possède évidemment un comportement mécanique dicté par les lois de Newton en rotation. Soit I l'inertie du moteur. Le courant i impose un couple mécanique donné par

Ki . La constante K est la même que celle de la tension induite de mouvement (seules les unités changent). La variation du moment cinétique est alors égale au couple à la somme du couple électromagnétique Ki , du couple dû à la perturbation v et du couple des forces de frottement $-b\omega$:

$$I\dot{\omega} = Ki - b\omega + v \quad (2.18)$$

u	tension aux bornes du moteur	[V]
i	courant dans le moteur	[A]
ω	vitesse angulaire	$\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
v	couple perturbateur	[N m]
b	coefficient de couple de frottement visqueux	[N m s/ rad]
K	coefficient de tension induite	[V s/rad]
K	coefficient de couple	[N m/A]
I	inertie de la partie rotative	[kg m ²]

Il est souvent d'usage de négliger l'effet de l'inductance et on aboutit à l'équation algébrique électrique suivante

$$u = Ri + K\omega$$

qui ne comporte pas d'état. Le système est du deuxième ordre car la partie mécanique comporte deux dérivées. En combinant les équations mécanique et électrique,

$$I\ddot{\theta} = \frac{k}{R}u - \left(\frac{k^2}{R} + b\right)\dot{\theta} + v \quad (2.19)$$

Un choix possible pour les deux états est

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} = \omega \end{aligned}$$

ce qui donne comme représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{k}{RI}u - \frac{1}{I}\left(\frac{k^2}{R} + b\right)x_2 + v \end{aligned}$$

ce qui peut se mettre en notation matricielle sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_v v \\ y &= Cx \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{I}\left(\frac{k^2}{R} + b\right) \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{RI} \end{bmatrix} & B_v &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3.3 Immeuble

La position horizontale de chaque dalle de l'immeuble est représentée par la variable d_i , où i désigne l'étage. Le mouvement vertical est négligé et on ne considère que l'écart latéral. Chaque étage agit sur les étages supérieurs et inférieurs par l'entremise d'une force de rappel élastique. De plus, on considère qu'il y a un peu d'énergie qui est dissipée lors du déplacement. Une force de frottement cinétique proportionnelle à la vitesse relative est présente. En appliquant les lois de Newton, on arrive de manière assez directe aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
m \ddot{d}_4 &= k(d_3 - d_4) + b(\dot{d}_3 - \dot{d}_4) \\
m \ddot{d}_3 &= k(d_2 - d_3) + k(d_4 - d_3) + b(\dot{d}_2 - \dot{d}_3) + b(\dot{d}_4 - \dot{d}_3) \\
m \ddot{d}_2 &= k(d_1 - d_2) + k(d_3 - d_2) + b(\dot{d}_1 - \dot{d}_2) + b(\dot{d}_3 - \dot{d}_2) + F \\
m \ddot{d}_1 &= k(d_0 - d_1) + k(d_2 - d_1) + b(\dot{d}_0 - \dot{d}_1) + b(\dot{d}_2 - \dot{d}_1) - F
\end{aligned}$$

Chaque équation provient de l'application des lois de Newton en considérant la résultante des forces qui agit sur le centre de masse de la dalle de l'étage correspondant. Seul le mouvement horizontal est considéré. Ainsi, Par exemple, $m\ddot{q}_1$ est égale à la résultante horizontale des forces en présence et on aura la somme de la force élastique $k(d_0 - d_1)$ qui provient du non alignement entre l'étage 0, de la force élastique $k(d_2 - d_1)$ dû au non alignement entre l'étage 2 et l'étage 1, de la force de frottement $b(\dot{q}_0 - \dot{q}_1)$ qui est proportionnelle à la vitesse relative entre l'étage 0 et l'étage 1 et de la force de frottement $b(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$ dû à la vitesse relative entre l'étage 2 et l'étage 1. Un bilan comparable est effectué sur tous les étages et seul l'étage 4 ne subit que l'influence de l'étage précédant.

F	entrée, force anti-sismique	[N]
d_0	perturbation, position de l'étage zéro	[m]
m	masse d'une dalle représentant le plancher d'un étage	[kg]
$d_i, i = 1, 2, 3, 4$	position horizontale de l'étage i	[m]
k	constante de rigidité des parois	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$
b	coefficient de frottement visqueux, perte d'énergie	$\left[\frac{\text{N s}}{\text{m}}\right]$

Le système est d'ordre 8 et un choix pour les variables d'état est $d_1, \dot{d}_1, d_2, \dot{d}_2, d_3, \dot{d}_3, d_4, \dot{d}_4$.

2.3.4 Bille sur roue

La roue a un rayon R et la bille est de rayon r . Désignons par θ l'angle de la roue et par ϕ l'angle de la bille. Nous pouvons considérer le tout comme un système planaire avec la gravité qui agit dans le sens vertical du plan. Le point de contact entre la bille et la roue est repéré par l'angle μ . Comme la bille est supposée rouler sans glisser, il y a une liaison entre les trois angles θ, ϕ et μ donnée par

$$\mu = \frac{r}{R}\phi + \theta \quad (2.20)$$

En résumé, les angles en présence sont

- μ : angle du point de contact [rad]
- θ : angle de la roue [rad]
- ϕ : angle de la bille [rad]

et ils sont liés par (2.20).

On peut exprimer la position x et y du centre de masse de la petite bille par les expressions

$$x = (r + R) \cos(\mu) = (r + R) \cos\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right)$$

$$y = (r + R) \sin(\mu) = (r + R) \sin\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right)$$

Nous constituons le Lagrangien \mathcal{L} qui est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$$\mathcal{L} = E_c - E_p$$

avec

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_R\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_r\dot{\phi}^2 \quad (2.21)$$

— I_R : inertie de la roue [kg m²]

— I_r : inertie de la bille [kg m²]

— m : masse de la bille [kg]

Le système possède deux degrés de liberté. Sa configuration est décrite par les coordonnées généralisées θ et ϕ . Appliquons la formule de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_q$$

avec $q = \theta$ et $q = \phi$. Dans le premier cas $F_\theta = \tau$ et dans le second $F_\phi = 0$. Il faut encore exprimer \dot{x} et \dot{y} en fonction de θ , $\dot{\theta}$, ϕ et $\dot{\phi}$. On a successivement

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(r + R) \sin\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right) \left(\frac{r}{R}\dot{\phi} + \dot{\theta}\right) \\ \dot{y} &= (r + R) \cos\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right) \left(\frac{r}{R}\dot{\phi} + \dot{\theta}\right) \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m(r + R)^2 \left(\frac{r}{R}\dot{\phi} + \dot{\theta}\right)^2 \quad (2.22)$$

étant donné que l'on a $\sin^2 + \cos^2 = 1$. De plus,

$$E_p = mg(r + R) \sin\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right)$$

Ainsi le Lagrangien s'écrit en tenant compte de la modification de l'expression (2.21) en tenant compte de (2.22)

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}m(r + R)^2 \left(\frac{r}{R}\dot{\phi} + \dot{\theta}\right)^2 - mg(r + R) \sin\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right)$$

Puis en effectuant les dérivées

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_R \dot{\theta} + m(r+R)^2 \left(\dot{\theta} + \frac{r}{R} \dot{\phi} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_R \ddot{\theta} + m(r+R)^2 \left(\ddot{\theta} + \frac{r}{R} \ddot{\phi} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg(r+R) \cos \left(\frac{r}{R} \phi + \theta \right)$$

ce qui donne la première équation différentielle du deuxième ordre couplée

$$(I_R + m(r+R)^2) \ddot{\theta} + \frac{r}{R} m(r+R)^2 \ddot{\phi} + mg(r+R) \cos \left(\frac{r}{R} \phi + \theta \right) = \tau \quad (2.23)$$

En ce qui concerne l'équation avec $q = \phi$, on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{r}{R} m(r+R)^2 \left(\frac{r}{R} \dot{\phi} + \dot{\theta} \right) + I_r \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{r}{R} m(r+R)^2 \left(\frac{r}{R} \ddot{\phi} + \ddot{\theta} \right) + I_r \ddot{\phi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -mg(r+R) \frac{r}{R} \cos \left(\frac{r}{R} \phi + \theta \right) \end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième équation différentielle du deuxième ordre couplée

$$\frac{r}{R} m(r+R)^2 \ddot{\theta} + \left(I_r + \frac{r^2}{R^2} m(r+R)^2 \right) \ddot{\phi} + mg(r+R) \frac{r}{R} \cos \left(\frac{r}{R} \phi + \theta \right) = 0 \quad (2.24)$$

Les deux équations (2.23) et (2.24) donnent deux équations différentielles du deuxième ordre couplées qui déterminent $\ddot{\phi}$ et $\ddot{\theta}$. Pour rendre cette dépendance explicite, on peut écrire ces deux équations sous forme d'une seule équation matricielle

$$\begin{bmatrix} I_R + m(r+R)^2 & \frac{r}{R} m(r+R)^2 \\ \frac{r}{R} m(r+R)^2 & I_r + \frac{r^2}{R^2} m(r+R)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg(r+R) \cos \left(\frac{r}{R} \phi + \theta \right) + \tau \\ -mg(r+R) \frac{r}{R} \cos \left(\frac{r}{R} \phi + \theta \right) \end{bmatrix}$$

La modélisation de la bille sur la roue est ainsi achevée. L'entrée est la couple τ qui est appliqué à la roue. Un choix possible pour les états est $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = \phi$ et $x_4 = \dot{\phi}$.

2.4 Simulation d'un modèle d'état

Nous avons introduit à la section précédente la représentation d'état de systèmes dynamiques. Cette modélisation par un système d'équations différentielles du premier ordre se prête bien à la simulation du système dynamique par intégration numérique.

La **simulation** d'un système consiste à déterminer l'état $x(t)$ et la sortie $y(t)$ pour $t \geq t_0$ spécifiés. De façon générale, il n'existe pas de solution *analytique* pour un système d'équations différentielles non linéaires. On doit avoir recours à des méthodes d'**intégration numérique** pour calculer l'état du système. Ces méthodes ne fournissent pas une solution continue dans le temps mais la valeur de la solution pour des points discrets, souvent uniformément espacés. L'intervalle de temps qui sépare deux points successifs, appelé **pas d'intégration**, est noté h . Une solution est obtenue aux instants :

$$kh, k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots \in N \quad (2.25)$$

où k_0 est le compteur tel que $k_0 h = t_0$.

La méthode d'intégration la plus intuitive, proposée par Euler, consiste à écrire le modèle d'état à l'instant kh (exprimé ici pour un modèle d'état non linéaire stationnaire) :

$$\dot{x}(kh) = f[x(kh), u(kh)] \quad x(k_0 h) = x_0 \quad (2.26)$$

$$y(kh) = g[x(kh), u(kh)] \quad (2.27)$$

puis d'utiliser comme approximation de la dérivée l'expression issue des premiers termes du développement en série de l'état. A partir de l'approximation :

$x(kh + h) \approx x(kh) + \dot{x}(kh)h$ on calcule :

$$\dot{x}(kh) \approx \frac{x(kh + h) - x(kh)}{h} \quad (2.28)$$

ce qui, avec (2.26), donne la relation constructive suivante :

$$x(kh + h) = x(kh) + hf[x(kh), u(kh)] \quad (2.29)$$

L'allure de la solution recherchée, la dérivée à l'instant kh ainsi que son approximation utilisée pour construire

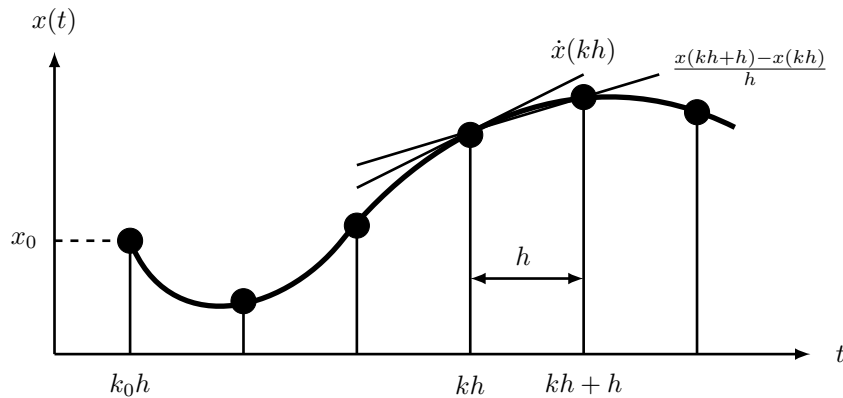


Figure 2.7. Etat calculé par intégration numérique avec la méthode d'Euler.

le point $x(kh + h)$ sont représentées à la figure 2.7.

Après avoir soigneusement sélectionné le pas d'intégration h , la simulation est menée en exploitant successivement, à partir de $k_0 h$, les équations (2.29) et (2.27) :

$$\begin{aligned}
x(k_0h + h) &= x(k_0h) + hf[x(k_0h), u(k_0h)] \\
y(k_0h + h) &= g[x(k_0h + h), u(k_0h + h)] \\
x(k_0h + 2h) &= x(k_0h + h) + hf[x(k_0h + h), u(k_0h + h)] \\
y(k_0h + 2h) &= g[x(k_0h + 2h), u(k_0h + 2h)] \\
&\vdots \\
x(kh + h) &= x(kh) + hf[x(kh), u(kh)] \\
y(kh + h) &= g[x(kh + h), u(kh + h)]
\end{aligned}$$

Cette méthode permet une évaluation rapide de la solution du modèle d'état mais elle est peu précise. Une méthode plus précise couramment utilisée est celle de Runge-Kutta.

Méthode de Runge-Kutta classique

La méthode de Runge-Kutta classique consiste à effectuer quatre évaluations de la fonction à intégrer : un fois au point courant $f[x(kh), u(kh)]$, deux fois à des points courants estimés à une demi-période d'intégration plus tard $f[x(kh) + \frac{h}{2}k_1, u(kh + \frac{h}{2})]$ et $f[x(kh) + \frac{h}{2}k_2, u(kh + \frac{h}{2})]$ et finalement une dernière évaluation à un point estimé une période d'intégration complète plus tard $f[x(kh) + k_3h, u(kh + h)]$. Les quatre quantités k_1, k_2, k_3 et k_4 sont les estimées successives de \dot{x} et données par :

$$\begin{aligned}
k_1 &= f[x(kh), u(kh)] \\
k_2 &= f[x(kh) + \frac{h}{2}k_1, u(kh + \frac{h}{2})] \\
k_3 &= f[x(kh) + \frac{h}{2}k_2, u(kh + \frac{h}{2})] \\
k_4 &= f[x(kh) + hk_3, u(kh + h)]
\end{aligned}$$

La valeur de l'état un pas d'échantillonnage plus loin est donné en pondérant deux fois les estimées de \dot{x} données obtenues un demi pas d'intégration plus loin par rapport à celles du début et de la fin du pas d'intégration :

$$x(kh + h) = x(kh) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) .$$

En itérant la relation ci-dessus, toutes les valeurs de $x(kh)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ sont obtenues à partir de la condition initiale x_0 .

Remarques

La simulation numérique (sur ordinateur) d'un système dynamique offre de nombreux avantages. Pour commencer, les algorithmes mis en oeuvre sont parfaitement connus, ce qui permet d'évaluer la précision des résultats. Le traitement de systèmes multivariables ne pose pas de difficultés particulières et les fonctions non linéaires f et g peuvent être évaluées facilement.

Il ne faut toutefois pas perdre de vue que le calcul numérique est approximatif. En particulier, la représentation des valeurs numériques par un nombre limité de chiffres provoque des **erreurs d'arrondi**. Les **erreurs de troncature** sont quant à elles provoquées par l'approximation de fonctions mathématiques au moyen de séries dont on ne considère qu'un nombre limité de termes.

La stabilité numérique d'un algorithme est garantie lorsque l'erreur d'intégration décroît à chaque pas de calcul. Cette stabilité est facilement perdue lorsque les ordres de grandeur des nombres intervenant dans les opérations sont très différents. Il est donc recommandé d'effectuer des mises à l'échelle pour éviter ce problème. Il convient également de préciser que le choix de la méthode et du pas d'intégration qui assurent à la fois, la stabilité de l'algorithme, une bonne précision des résultats, et un temps de calcul non excessif, n'est pas toujours aisé.

2.5 Exemple d'intégration numérique

Soit à intégrer

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \arctan(30x_1) - 1.08x_1 - x_2 - x_3\end{aligned}$$

à partir des conditions initiales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0.5$ et $x_3(0) = 0.9$.

Code de simulation à pas fixe

Runge-Kutta classique (code 'Maison' en Matlab) :

Il faut créer le fichier 'StepRK.m' :

```
function [xkplus]=StepRK(fct, xk, h)
k1 = fct(xk);
k2 = fct(xk + k1*h/2);
k3 = fct(xk + k2*h/2);
k4 = fct(xk + k3*h);
xkplus=xk + h/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
return
```

Exemple d'utilisation :

Il faut créer un autre fichier 'Exemple1.m' :

```
function [xd]=Exemple1(x)
xd = zeros(3,1);
xd(1) = x(2);
xd(2) = x(3);
xd(3) = atan(30*x(1)) - 1.08*x(1) - x(2) - x(3);
return
```

et un autre fichier 'IntegrerExemple.m' :

```
function [xTraj] = IntegrerExemple(x0,N)
xTraj = zeros(length(x0),N);
xTraj(:,1) = x0;
for i = 2:N
    xTraj(:,i) = StepRK(@Exemple1, xTraj(:,i-1), 20/70);
end
return
```

et finalement le dernier fichier 'runExemple.m' :

```
function runExemple
x0 = [1; 0.5; 0.9];
plot(IntegrerExemple(x0,70)');
return
```

Pour finalement, en tapant dans la fenêtre de commande 'runExemple', voir la figure qui représente les trajectoires des trois états du système représentées en Figure 1.

Pour obtenir la solution par l'algorithme Runge-Kutta incorporé dans Matlab :

```
function [xd]=Exemple10de(t,x)
xd = Exemple1(x);
return

function runExempleODE45
x0 = [1, 0.5, 0.9];
[t,x] = ode45(@Exemple10de, [0,20], x0);
plot(t,x)
```

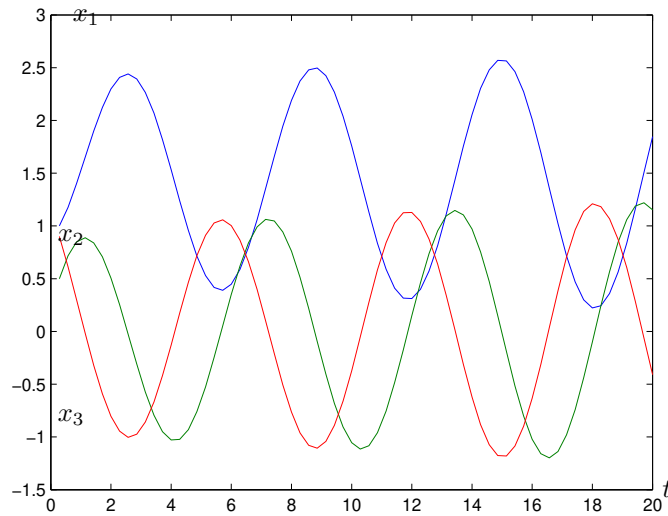



Figure 2.8. En bleu est représentée la trajectoire de x_1 , en vert celle de x_2 et finalement celle de x_3 en rouge.

Runge-Kutta classique (code 'Maison' en Mathematica) :

```
StepRK[fct_, xk_, h_] := Module[{k1, k2, k3, k4},
  k1 = fct[xk];
  k2 = fct[xk + k1 h/2];
  k3 = fct[xk + k2 h/2];
  k4 = fct[xk + k3 h];
  Return[xk + h/6 (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)]]
```

Exemple d'utilisation :

```
EquDyn = {x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t], x3'[t] == ArcTan[30 x1[t]]
  - 1.08 x1[t] - x2[t] - x3[t]};

fctTest = ((Part[#, 2] & /@ EquDyn) /. {x1[t] -> Part[#, 1],
  x2[t] -> Part[#, 2], x3[t] -> Part[#, 3]}) &
pts = 70;
tsol = Table[20 i /pts, {i, 0, pts}];
x1sol = Part[#, 1] & /@ NestList[StepRK[fctTest, #, 20/pts] & ,
  {1, 0.5, 0.9}, pts];

p2 = ListPlot[Transpose[List[tsol, x1solB]]];
```

Comparaison avec l'intégrateur incorporé dans Mathematica :

```
xx = {x1[t], x2[t], x3[t]};
solRK = NDSolve[Join[EquDyn, {x1[0] == 1, x2[0] == 0.5,
  x3[0] == 0.9}], xx, {t, 0, 20}];
p1 = Plot[x1[t] /. solRK, {t, 0, 20}];

Show[p1, p2]
```

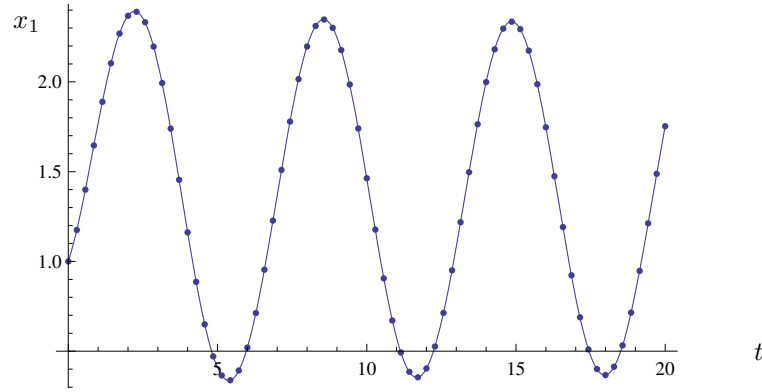


Figure 2.9. En trait plein est représentée la solution de l'intégrateur Runge-Kutta de Mathematica et les points représentent les itérations successives de l'intégrateur Runge-Kutta classique 'fait Maison'. On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un pas d'intégration petit pour déjà avoir un bon résultat.

2.6 Approximation linéaire d'un modèle non linéaire

2.6.1 Introduction

L'intérêt des modèles linéaires réside dans

- la propriété importante liée au principe de superposition
- l'aisance mathématique qui en découle permettant, par exemple, de résoudre analytiquement un système d'équations différentielles linéaires.

Malheureusement, la plupart des systèmes physiques réels sont intrinsèquement non linéaires. Afin de tirer parti de la propriété de linéarité, on peut **linéariser** un modèle non linéaire pour un point de fonctionnement choisi. Il en résultera une approximation linéaire qui sera valable pour de petites déviations autour de ce point de fonctionnement.

Considérons à titre d'exemple le cas de la fonction non linéaire $f(x)$ représentée à la figure 2.10. Cette fonction est approchée autour du point \bar{x} par une droite tangente à la fonction. Cette droite est utilisée pour déterminer la valeur de la fonction à proximité de \bar{x} , en particulier en $\bar{x} + \delta x$.

En considérant la partie linéaire d'un développement en série de Taylor de $f(x)$ au point \bar{x} , on obtient l'approximation suivante :

$$f(\bar{x} + \delta x) \simeq f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})\delta x$$

La relation entre une variation δx de x et la variation correspondante δf de f s'écrit donc en première approximation :

$$\delta f = \frac{df}{dx}(\bar{x})\delta x$$

Cette relation n'est évidemment valable que pour de faibles écarts δx autour de \bar{x} .

Quelques définitions préalables sont nécessaires pour traiter de façon rigoureuse le problème de linéarisation. La collection (infinie) de vecteurs d'états $x(t)$ ainsi que la collection des vecteurs de sortie $y(t)$ constituent une **trajectoire nominale** du système dynamique si ces collections satisfont aux équations différentielles correspondantes et aux équations définissant les sorties. Ainsi, pour le système non linéaire et non stationnaire (2.6)-(2.7) et l'entrée $\bar{u}(t)$, et avec $t_0 = 0$, les trajectoires nominales $\bar{x}(t)$ et $\bar{y}(t)$ vérifient :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f[\bar{x}(t), \bar{u}(t), t] \quad \bar{x}(0) = x_0 \quad (2.30)$$

$$\bar{y}(t) = g[\bar{x}(t), \bar{u}(t), t] \quad (2.31)$$

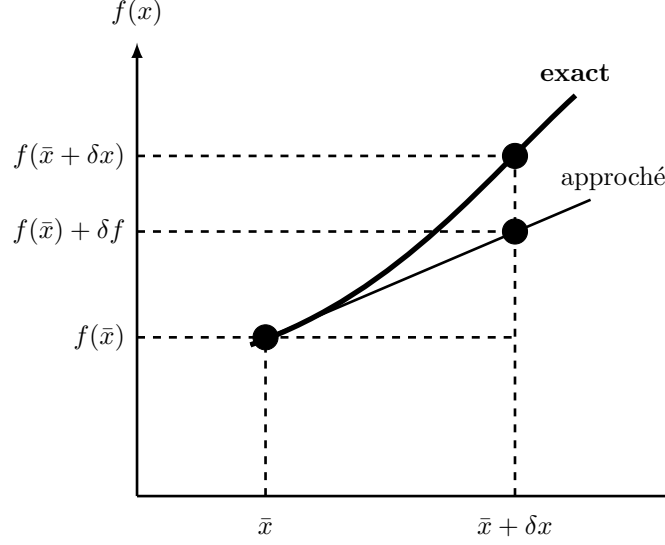


Figure 2.10. Fonction non linéaire et son approximation linéaire autour de \bar{x} .

Pour un système *stationnaire*, les trajectoires nominales sont souvent choisies constantes, $\dot{\bar{x}}(t) = 0$, formant ainsi un **point de fonctionnement stationnaire** ou un **point d'équilibre**. Dans ce cas, les relations (2.30) et (2.31) s'écrivent :

$$0 = f[\bar{x}, \bar{u}] \quad (2.32)$$

$$\bar{y} = g[\bar{x}, \bar{u}] \quad (2.33)$$

2.6.2 Procédure de linéarisation

Soit le modèle d'état non linéaire stationnaire :

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] \quad x(0) = x_0 \quad (2.34)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t)] \quad (2.35)$$

Pour le point d'équilibre (point de fonctionnement stationnaire) correspondant à \bar{u} , les variables \bar{x} et \bar{y} satisfont les relations (2.32) et (2.33) :

Les équations (2.34) et (2.35) peuvent être développées en série de Taylor pour le point d'équilibre \bar{u} , \bar{x} et \bar{y} (afin de simplifier l'écriture, la dépendance temporelle des variables $u(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ ne sera plus indiquée dans le développements qui suivent) :

$$\dot{x} = f[\bar{x}, \bar{u}] + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} (u - \bar{u}) + \text{t.o.s.} \quad (2.36)$$

$$y = g[\bar{x}, \bar{u}] + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} (u - \bar{u}) + \text{t.o.s.} \quad (2.37)$$

où t.o.s. indique des termes d'ordre supérieur.

Introduisons les variables écart suivantes :

$$\delta x(t) := x(t) - \bar{x}$$

$$\delta u(t) := u(t) - \bar{u}$$

$$\delta y(t) := y(t) - \bar{y}$$

et notons que $\delta \dot{x} = \dot{\delta x}$.

En soustrayant les équations (2.32) et (2.33) des parties *linéaires* des équations (2.36) et (2.37), et avec la

définition des variables écart, on obtient :

$$\delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} \delta u \quad \delta x(0) = x_0 - \bar{x} \quad (2.38)$$

$$\delta y = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} \delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} \delta u \quad (2.39)$$

Cette approximation linéaire s'écrit sous la forme du modèle d'état suivant :

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u \quad \delta x(0) = x_0 - \bar{x} \quad (2.40)$$

$$\delta y = C \delta x + D \delta u \quad (2.41)$$

$$\text{avec} \quad A := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} \quad \text{et} \quad B := \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{u}, \bar{x}}$$

$$C := \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} \quad \text{et} \quad D := \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{u}, \bar{x}}$$

Remarques

- Le modèle d'état (2.34)-(2.35) possède des variables indépendantes (le vecteur d'entrée $u(t)$ et des variables dépendantes (le vecteur d'état $x(t)$ et le vecteur de sortie $y(t)$). Pour déterminer le point d'équilibre \bar{u} , \bar{x} et \bar{y} , il convient donc de spécifier les variables indépendantes \bar{u} et de calculer les variables dépendantes \bar{x} et \bar{y} à partir de (2.32) et (2.33).
- Les équations (2.40) et (2.41) représentent des approximations, lesquelles ne sont valables que pour de petites déviations autour du point d'équilibre (\bar{u}, \bar{x}) .
- Il est important de noter que u , x et y dans les équations (2.40) et (2.41) représentent en fait les variables écart δu , δx et δy .
- Pour le cas multivariable, c'est à dire où u , x et y sont des vecteurs, A , B , C et D représentent les matrices jacobiniennes de f et g par rapport à x et u :

$$A := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\bar{u}, \bar{x}}$$

$$B := \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{array} \right]_{\bar{u}, \bar{x}}$$

$$C := \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{u}, \bar{x}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\bar{u}, \bar{x}}$$

$$D := \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \frac{\partial g_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_p} \end{bmatrix} \Big|_{\bar{u}, \bar{x}}$$

2.7 Exemples

2.7.1 Oscillateur de Van der Pol

En partant de l'équation différentielle du second ordre décrivant l'oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

il est possible de représenter une trajectoire solution de l'équation différentielle *pour une condition initiale donnée* en utilisant un algorithme d'intégration de type Runge-Kutta. Par exemple, pour la valeur du paramètre $\epsilon = 0,5$ et pour la condition initiale $x_0 = \dot{x}_0 = 1$, la solution est représentée à la figure 2.11.

Cependant, lorsqu'une représentation pour un grand nombre de condition initiales est désirée, il est avantageux de représenter également le graphe des éléments de pente (fig. 2.11).

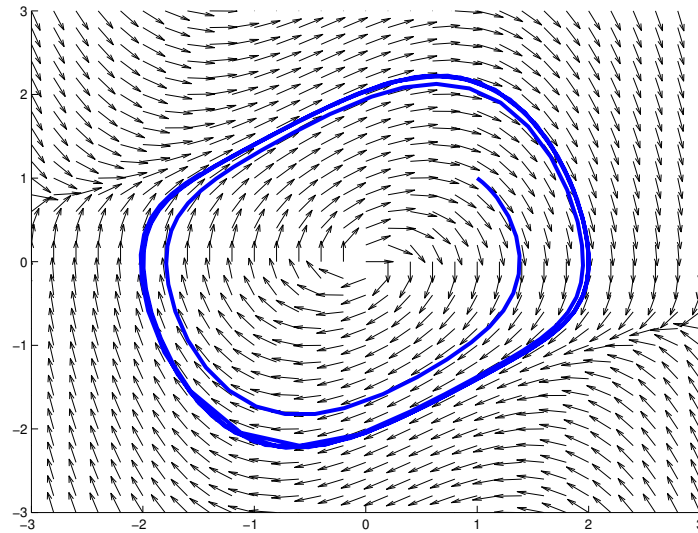


Figure 2.11. Superposition du graphe des pentes et d'une trajectoire dans le cas de l'oscillateur de Van der Pol ($\epsilon = 0,5, x_{10} = 1, x_{20} = 1$).

2.7.2 Dynamique de population

Pour illustrer les concepts introduits dans ce chapitre, nous présentons deux exemples très simplifiés de dynamique de population. Nous envisageons à la fois les modèles mathématiques de deux espèces en compétition pour une même ressource unique, ainsi que la dynamique prédateur-proie, où deux espèces distinctes s'affrontent, l'une jouant le rôle de proie et l'autre celui de prédateur.

Les hypothèses simplificatrices suivantes sont adoptées :

- La densité de l'espèce, c'est-à-dire le nombre d'individus par unité d'aire, est représentée par une variable unique, la différence d'âge de sexe et de génotype sont ignorés.

- L'effet de surpeuplement affecte le groupe dans son entier. Tous les membres de la population sont touchés de manière similaire. Bien que ceci soit peu probable lorsque les membres se répartissent en sous-groupes, de telle sorte qu'ils ne soient pas uniformément distribués dans tout l'ensemble du territoire considéré, nous faisons néanmoins cette hypothèse.
- Les effets des interactions au sein de la même espèce et avec des espèces différentes sont instantanés. Il n'y a pas de délai lors d'actions entreprises par un individu.
- Les facteurs abiotiques environnementaux (c-à-d. l'influence du non-vivant sur le vivant) sont suffisamment constants.
- La croissance du taux de la population est dépendante de la densité, même lors de très faibles densités.
- Les femelles trouvent toujours à s'accoupler, même lorsque la densité est basse.

Ces hypothèses, très simplificatrices, se justifient essentiellement par le fait qu'il y aura nécessairement un effet limitant par le manque de ressources.

2.7.3 Compétition

Deux population distinctes sont en compétition pour une même ressource qui se trouve en quantité limitée. x_1 désigne la population de la première espèce et x_2 celle de la seconde. Un modèle d'évolution différentielle est obtenu en considérant une croissance exponentielle en l'absence d'effet inhibitifs. Deux coefficients positifs a_1 et a_2 sont introduits pour représenter les taux de croissances instantanés. Les populations agissent alors de manière indépendante.

Cependant, les ressources ne sont pas infinies et la présence d'une densité croissante aura tendance à diminuer la croissance des populations respectives. Ainsi, nous distinguons les coefficients d'auto-inhibition b_{11} et b_{22} (deux quantités positives, créées par la présence d'un compétiteur de même espèce), de ceux des coefficients d'inhibition croisée b_{12} et b_{21} (également deux nombres réels positifs mais dus cette fois-ci à la présence d'un compétiteur de l'autre espèce). En conséquences, nous posons comme modèle d'évolution

$$\dot{x}_1 = x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(a_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2)$$

Notons, en résolvant $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, la présence de plusieurs points d'équilibre. Lorsque $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$, il y a quatre points d'équilibre isolés distincts :

a) $\bar{x}_1 = 0$	$\bar{x}_2 = 0$
b) $\bar{x}_1 = \frac{a_1}{b_{11}}$	$\bar{x}_2 = 0$
c) $\bar{x}_1 = \frac{a_2b_{12} - a_1b_{22}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}$	$\bar{x}_2 = \frac{a_1b_{21} - a_2b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}$
d) $\bar{x}_1 = 0$	$\bar{x}_2 = \frac{a_2}{b_{22}}$

Ils correspondent respectivement à :

- l'extinction des deux espèces ;
- l'extinction de la seconde espèce au profit de la première ;
- la survie des deux espèces en équilibre ;
- l'extinction de la première au profit de la seconde.

Lorsque $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$, outre le point d'équilibre à l'origine, la présence d'une droite continue de points d'équilibre est constatée. En effet, en prenant pour valeur numérique $a_1 = a_2 = 2$ et $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 1$, on obtient les deux équations définissant les points d'équilibres

$$2x_1 - x_1x_2 - x_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 - x_1x_2 - x_2^2 = 0$$

En soustrayant ces deux équations, l'expression $(x_2 - x_1)(x_1 + x_1 - 2) = 0$ est obtenue faisant apparaître la droite $x_2 = 2 - x_1$ comme un lieu continu de points d'équilibre.

Le système non linéaire $\dot{x} = f(x)$ peut être estimé par le premier terme du développement en série de Taylor. Ceci donne $\dot{x} = A(\bar{x})(x - \bar{x})$ où \bar{x} désigne le point d'équilibre où l'on développe $f(x)$. La matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - 2b_{11}\bar{x}_1 - b_{12}\bar{x}_2 & -b_{12}\bar{x}_1 \\ -b_{21}\bar{x}_2 & a_2 - b_{21}\bar{x}_1 - 2b_{22}\bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

et dépend des valeurs \bar{x}_1 et \bar{x}_2 du point d'équilibre.

Le plan de phase est représenté dans les figures 2.12, 2.13 et 2.14 pour trois choix de valeurs numériques. Les facteurs de croissance sont fixés à $a_1 = a_2 = 2$. Dans le premier cas, fig. 2.12, les facteurs inhibitifs croisés sont

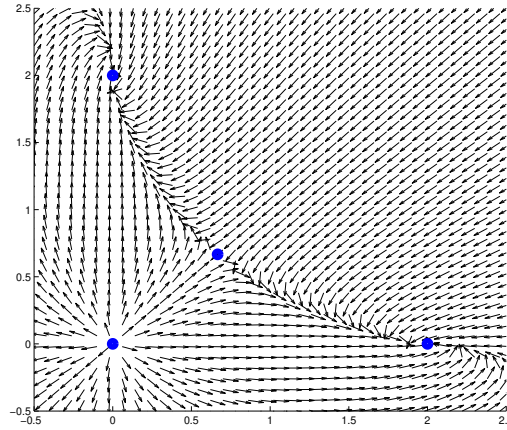


Figure 2.12. Plan de phase et points d'équilibre pour deux populations en compétition pour une ressource unique. $a_1 = a_2 = 2$ et $b_{11} = b_{22} = 1$. $b_{12} = b_{21} = 2$, l'inhibition croisée est plus grande que l'auto-inhibition et cela produit une population à survivre au détriment de l'autre.

plus importants que les facteurs auto-inhibitifs ($b_{11} = b_{22} = 1$ et $b_{12} = b_{21} = 2$). Le point d'équilibre $(0, 0)^T$ est localement instable. Les points d'équilibre $(2, 0)^T$ et $(0, 2)^T$ sont des points stables. Le point d'équilibre $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ est un point selle.

Dans le deuxième cas, fig. 2.13, lorsque l'auto-inhibition est identique à l'inhibition croisée, on constate une vie mutuelle des deux espèces et une convergence vers des points d'équilibre qui dépend des conditions initiales.

Dans le troisième cas, fig. 2.14, c'est-à-dire lorsque l'inhibition croisée est moins forte que l'auto-inhibition, il y a également une survie mutuelle des deux espèces, mais toujours avec la même densité. Le point d'équilibre $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})^T$ est stable. Le point d'équilibre $(0, 0)^T$ est instable. Les deux points d'équilibre restants $(0, 2)^T$ et $(2, 0)^T$ sont des points selles.

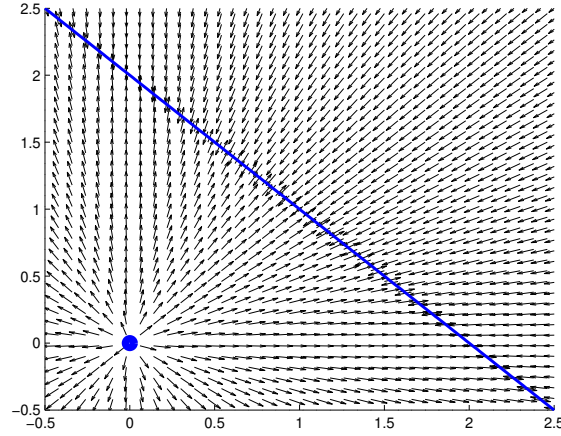


Figure 2.13. Plan de phase et points d'équilibre pour deux populations en compétitions pour une ressource unique. $a_1 = a_2 = 2$ et $b_{11} = b_{22} = 1$. $b_{12} = b_{21} = 1$, l'inhibition croisée est identique à l'auto-inhibition, ce qui conduit les deux populations à vivre avec des rapports qui dépendent des conditions initiales.

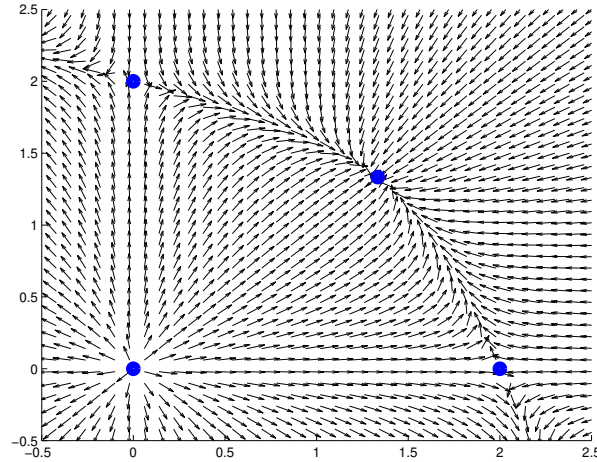


Figure 2.14. Plan de phase et points d'équilibre pour deux populations en compétitions pour une ressource unique. $a_1 = a_2 = 2$ et $b_{11} = b_{22} = 1$. $b_{12} = b_{21} = 0,5$, l'auto-inhibition est plus grande que l'inhibition croisée et les deux populations finissent au même point d'équilibre, pour presque toutes les conditions initiales.

2.7.4 Prédateur-proie

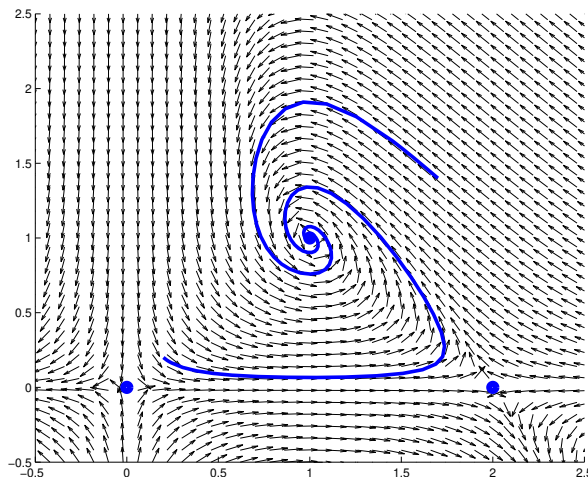


Figure 2.15. Plan de phase et points d'équilibre pour le modèle prédateur-proie. La variable x_1 représente la densité des proies (axe horizontale) et la variable x_2 représente la densité des prédateurs (axe vertical). Les valeurs numériques choisies sont $a_1 = a_2 = b_{21} = 2$ et $b_{11} = b_{12} = 1$. Deux trajectoires sont également représentées pour $x_1(0) = x_2(0) = 0,2$ et pour $x_1(0) = 1,7$, $x_2(0) = 1,4$. Les trois points d'équilibre sont constatés : a) l'origine $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ (en bas à gauche), b) la survie des proies et l'extinction des prédateurs $\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = 0$ (en bas à droite), et finalement c) la survie mutuelle $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$ (en haut à gauche).

Dans ce modèle, x_1 représente la densité de population des proies et x_2 celle des prédateurs.

L'équation de l'évolution de x_1 est identique au cas des populations en compétition de la section précédente. En effet, les proies croissent de manière exponentielle en l'absence de prédateur (coefficient a_1 positif). Leur croissance est limitée par les ressources (effet auto-inhibitif, b_{11}) et par la présence de prédateur (effet d'inhibition croisé, b_{12}).

Par contre, l'évolution des prédateurs x_2 est foncièrement différente. En l'absence de proie, les prédateurs disparaissent progressivement de manière exponentielle, et le signe devant le coefficient a_2 est cette fois-ci négatif. De plus, la présence des proies n'a pas un effet inhibitif, mais bien au contraire, un effet de croissance : le signe devant le facteur b_{21} est positif. Il n'y a pas d'effet auto-inhibitif, ce qui implique l'annulation du coefficient $b_{22} = 0$.

Sous ses hypothèse, les deux équations différentielles qui gouvernent l'évolution des populations sont

$$\dot{x}_1 = x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-a_2 + b_{21}x_1)$$

Ce système comporte trois points d'équilibre :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \bar{x}_1 = 0 & \bar{x}_2 = 0 \\ \text{b) } \bar{x}_1 = \frac{a_1}{b_{11}} & \bar{x}_2 = 0 \\ \text{c) } \bar{x}_1 = \frac{a_2}{b_{21}} & \bar{x}_2 = \frac{a_1 b_{21} - a_2 b_{11}}{b_{12} b_{21}} \end{array}$$

Le premier point d'équilibre est l'extinction mutuelle des deux espèces. Le deuxième correspond uniquement à la survie des proies ; il y a absence de prédateurs. Le troisième correspond à une survie mutuelle.

Lorsque $a_1 b_{21} < a_2 b_{11}$, les prédateurs meurent par manque de facteur de reproduction des proies (coefficient a_1). La condition de survie mutuelle pondère les deux facteurs a_1 et a_2 par la qualité de satisfaction énergétique de la proie pour un prédateur b_{21} et du taux d'auto-inhibition des proies b_{11} . En effet, l'auto-inhibition des proies rend la reproduction et la survie des prédateurs difficiles.

La figure 2.12 représente la plan de phase pour les valeurs numériques

$$a_1 = a_2 = b_{21} = 2 \quad b_{11} = b_{12} = 1$$

Deux courbes, solutions de l'équation différentielle, sont également représentées, une pour la condition initiale $x_1(0) = x_2(0) = 0,2$ et une autre pour la condition initiale $x_1(0) = 1,7$ et $x_2(0) = 1,4$. On constate que dans les deux cas, la solution correspondante converge vers le point d'équilibre de survie mutuelle $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$.

Pour la première courbe, la densité des prédateurs commence légèrement à diminuer puis demeure relativement modeste à cause du faible nombre de proies disponibles. Toutefois, ces dernières se reproduisent en présence de la faible densité des prédateurs. Lorsqu'une taille critique est atteinte, à partir de laquelle les prédateurs peuvent mieux se développer, la tendance s'inverse et les prédateurs augmentent au détriment des proies.

De manière générale, le taux de prédateurs par rapport à celui des proies oscille jusqu'à atteindre l'équilibre de survie mutuelle (fig. 2.15).

Représentation entrée-sortie

3.1 Introduction et objectifs

Ce chapitre introduit la représentation entrée-sortie et les opérateurs de convolution dans le cadre des systèmes linéaires stationnaires. La notion de système linéaire permet, à l'aide du principe de superposition, de construire des réponses à des signaux élémentaires. Il s'agit des réponses indicielles et impulsionnelles. Un signal arbitraire est ainsi la superposition d'une succession de sauts indiciels séparés les uns des autres de manière infinitésimale. La réponse à un tel signal est alors une succession de réponses indicielles séparées les unes des autres de manières infinitésimales. Nous aboutissons alors au produit de convolution. La réponse d'un système est la convolution de son entrée avec la réponse impulsionnelle du système. Le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition et commutatif. Il n'a pas de diviseur de zéro. Nous pouvons donc constituer son anneau de fraction. Nous obtenons une algèbre de convolution isomorphe aux fractions de polynômes. Cet isomorphisme sera étudié par l'entremise de la transformée de Laplace au chapitre suivant. Nous constaterons que tout système linéaire est représentable comme une fraction de deux polynômes dont la variable est un opérateur élémentaire \mathfrak{D} .

3.2 Fonctions du temps

Les signaux seront considérés comme nul pour tout instant du temps $t < 0$ et non nécessairement nul pour $t \geq 0$. Un tel signal sera noté

$$\{f(t)\}$$

au lieu de $f(t)$. Lorsque les accolades sont absentes, $f(t)$ désigne la valeur de la fonction f à l'instant t . C'est un nombre réel. Lorsque les accolades sont présentes, $\{f(t)\}$ désigne toute la fonction vu comme une entité à part entière.

3.3 Principe de superposition

3.3.1 Système

Soit un système avec une entrée u et une sortie y . Il est représenté à la figure 3.2. L'intérieur de la boîte est vide pour l'instant. Evidemment, il y a des équations différentielles avec un certain nombre de conditions initiales qui permet de décrire la boîte. Nous verrons comment représenter la boîte du point de vue entrée-sortie. On pourra alors inscrire quelque chose dans la boîte qui traduira fidèlement celle-ci sans nécessairement avoir besoin d'écrire toutes les équations différentielles.

3.3.2 Principe de superposition et système linéaire

Un système linéaire est un système qui obéit au principe de superposition. L'idée est assez directe. Lorsque deux signaux arbitraires $\{u_1(t)\}$ et $\{u_2(t)\}$ excitent (à mêmes conditions initiales) un système donné, nous récoltons

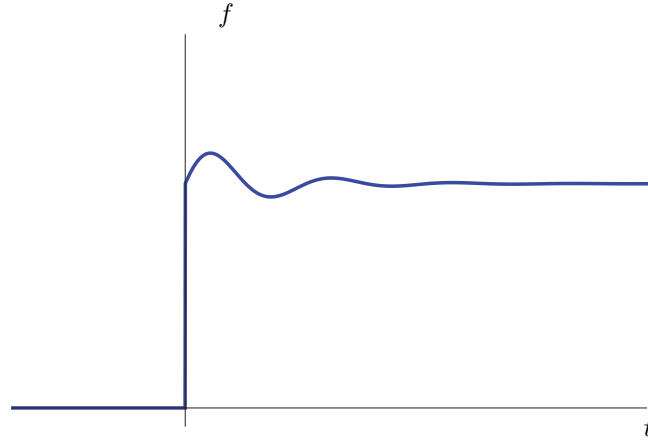


Figure 3.1. Les signaux $\{f(t)\}$ sont nuls pour $t < 0$ et non nécessairement nul pour $t \geq 0$. La condition initiale $f(0)$ jouera un rôle très important.



Figure 3.2. Un système avec une entrée u et une sortie y .

deux signaux $\{y_1(t)\}$ et $\{y_2(t)\}$ correspondants aux réponses individuelles. Si nous effectuons une troisième expérience avec la somme des deux signaux $\{u_1(t) + u_2(t)\}$, un nouveau signal de sortie $\{y(t)\}$ est obtenu qui est la réponse à la somme. Si cette réponse est la somme des deux réponses individuelles

$$\{y(t)\} = \{y_1(t)\} + \{y_2(t)\} = \{y_1(t) + y_2(t)\},$$

quels que soient les choix des signaux individuels $\{u_1(t)\}$ et $\{u_2(t)\}$, alors le système obéit au principe de superposition et le système est qualifié de linéaire.

En résumé, lorsque

$$— \{u_1(t)\} \rightarrow \{y_1(t)\}$$

$$— \{u_2(t)\} \rightarrow \{y_2(t)\}$$

il est vrai que

$$— \{u(t)\} := \{u_1(t) + u_2(t)\} \rightarrow \{y(t)\} = \{y_1(t)\} + \{y_2(t)\}$$

alors le système obéit au principe de superposition.

3.4 Réponse indicielle

Grâce au principe de superposition, on peut construire tous les signaux de sortie connaissant la réponse à un signal élémentaire. Considérons le signal élémentaire 'saut unité', ou 'saut indiciel' que l'on note $\{\epsilon(t)\}$ et représenté à la figure 3.3.

3.4.1 Réponse indicielle

La réponse indicielle, notée $\{r(t)\}$, est la sortie $\{y(t)\}$ lorsque l'entrée est un saut indiciel, c.-à-d. lorsque $\{u(t)\} = \{\epsilon(t)\}$.

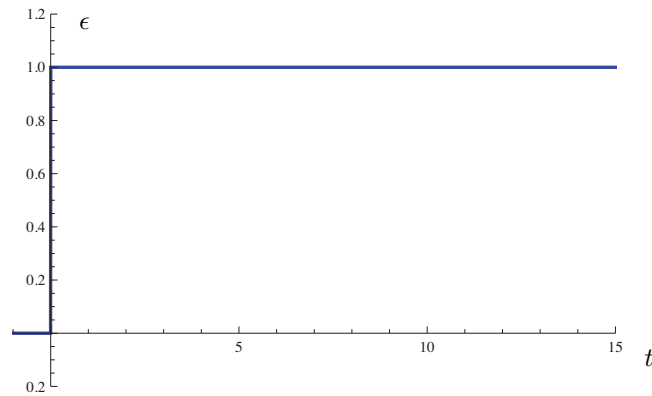


Figure 3.3. Un saut indiciel, également appelé saut unité ou saut de Heaviside, est un signal qui est nul pour $t < 0$ et égal à 1 pour $t \geq 0$.



Figure 3.4. Représentation du saut indiciel à l'entrée d'un système qui produit une certaine sortie que l'on appelle la réponse indicielle et notée $\{r(t)\}$.

Une réponse indicielle est représentée à la figure 3.5. Les réponses indicielles varient grandement d'un système à un autre et on classifera un certain nombre de celles-ci par la suite à l'aide de la décomposition en éléments simples.

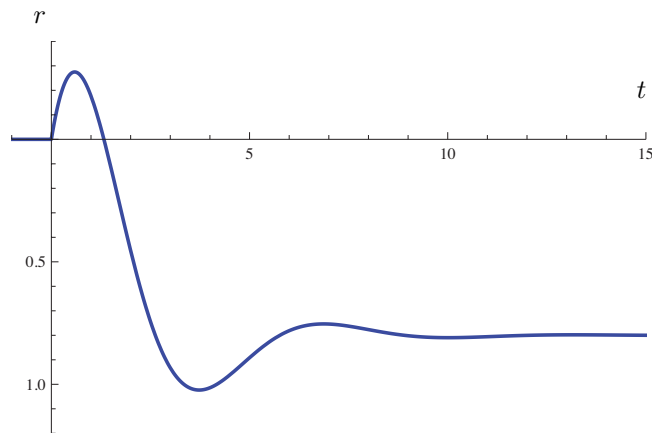


Figure 3.5. Réponse indicielle $\{r(t)\}$.

3.5 Fonction constante par morceaux

3.5.1 Élément de base

Comme élément superposable de base, plusieurs exemples viennent à l'esprit. Signal constant, fonction sinusoïdale, etc. Souvenons-nous que les signaux $\{f(t)\}$ sont nuls pour $t < 0$ et non nuls ensuite. Ainsi, les

fonctions sinus et cosinus sont assez mal adaptées comme fonctions de base à cause de leur nature non nulle pour $t < 0$. On pourrait les tronquer, mais cela conduit à des problèmes de convergences assez sévères. Le plus simple est de choisir des fonctions de base qui soient nulles pour $t < 0$ et qui se superposent facilement. Le choix que l'on effectue est de considérer deux sauts indiciaux décalés l'un par rapport à l'autre et dont le deuxième est changé de signe.

$$\{u(t)\} = \{\epsilon(t) - \epsilon(t - h)\}$$

On obtient ainsi une impulsion carrée unique qui sera notre élément de base représenté à la figure 3.6.

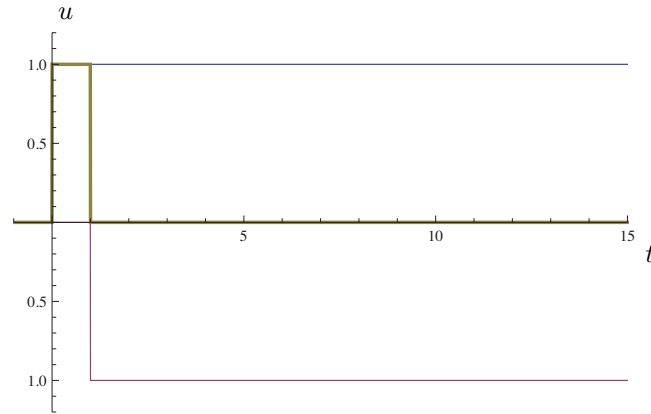


Figure 3.6. L'élément de base retenu est la différence de deux sauts indiciaux dont le second est légèrement décalé par rapport au premier $\{\epsilon(t) - \epsilon(t - h)\}$. La largeur de l'impulsion résultante est h .

La réponse à un tel signal de base est

$$\{y(t)\} = \{r(t) - r(t - h)\}$$

et elle est représentée à la figure 3.7.

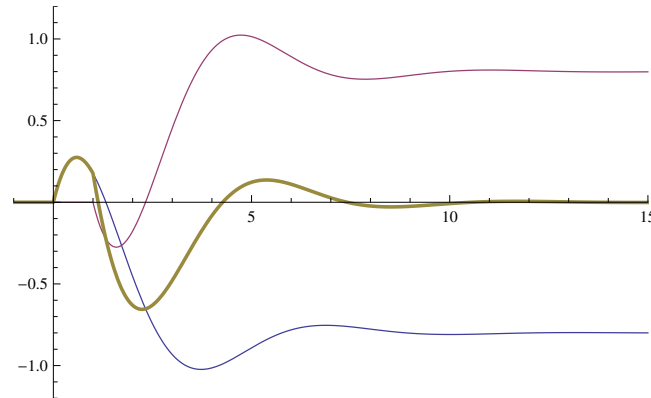


Figure 3.7. Réponse au signal élémentaire. Les réponses indicielles sont en trait fin. La deuxième est changée de signe et décalée. La somme des deux signaux en trait fin donne la réponse élémentaire en trait épais.

Ce signal élémentaire $\{\epsilon(t) - \epsilon(t - h)\}$ se superpose très bien si on considère les fonctions constantes par morceaux. En effet, il permet d'obtenir la réponse à un tel signal de manière exacte à l'aide du principe de superposition. Evidemment, ceci n'est valable que pour les systèmes linéaires stationnaires. A partir de la décomposition d'un signal constant par morceau donné par

$$\{u(t)\} = \left\{ \sum_{i=0}^3 u_i (\epsilon(t - ih) - \epsilon(t - (i+1)h)) \right\} \quad (h = 1)$$

et représenté à la figure 3.8,

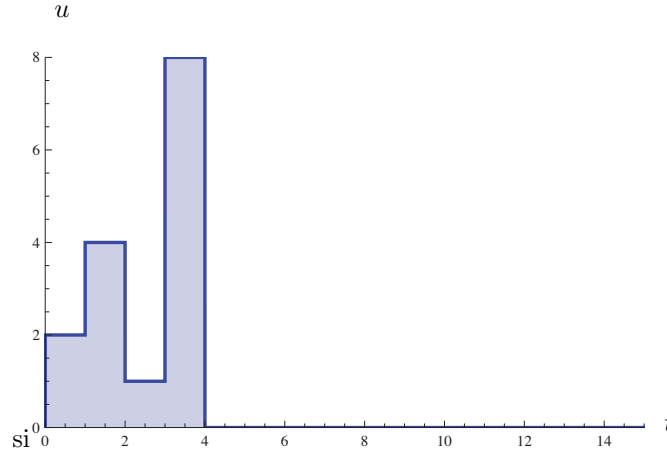


Figure 3.8. Un signal constant par morceaux est la superposition direct de signaux élémentaires, c.-à-d. des sauts indiciels décalés de manière appropriée. .

on obtient sa réponse, simplement en remplaçant les ϵ par les réponses indicielles r , et en conservant les mêmes pondérations u_i , par simple application du principe de superposition. Ceci donne le signal de sortie

$$\{y(t)\} = \left\{ \sum_{i=0}^3 u_i (r(t - ih) - r(t - (i+1)h)) \right\}$$

qui est représenté à la figure 3.9.

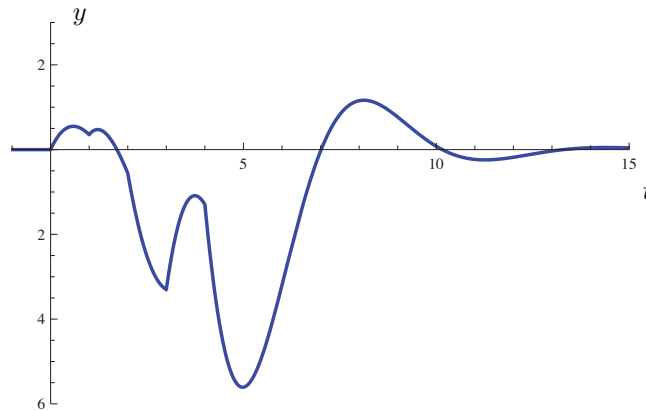


Figure 3.9. La réponse à un signal constant par morceaux s'obtient par le principe de superposition à partir des réponses indicielles décalées et pondérées de manière identique à la décomposition du signal constant par morceaux en sauts indiciels décalés.

3.6 Identité Neutre

Faisons une somme jusqu'à la partie entière de t/h (notée $[t/h]$)

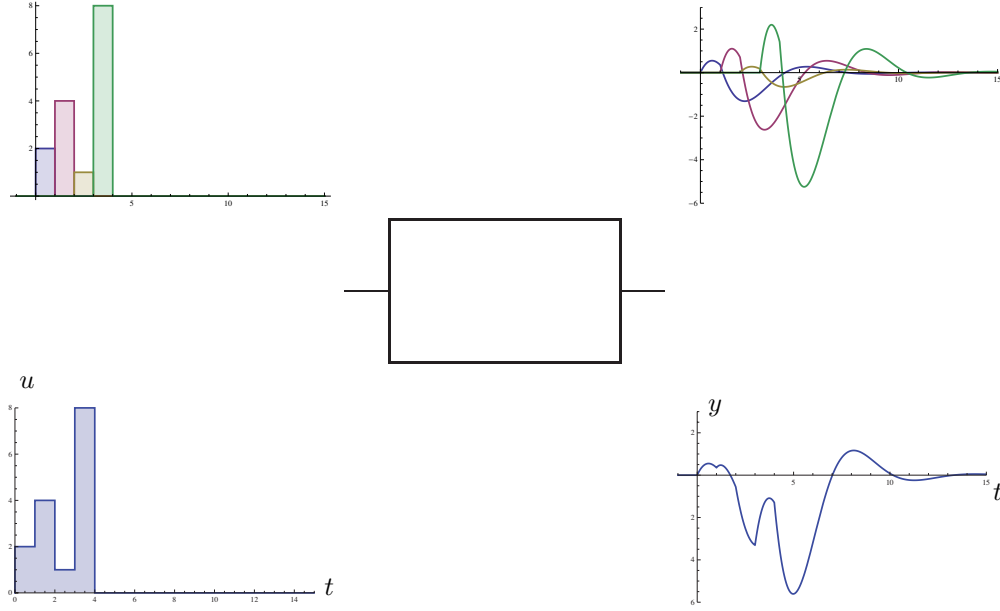


Figure 3.10. Illustration de la construction lors de fonctions constantes par morceaux. Le principe de superposition permet d'obtenir la réponse de manière immédiate. En haut à gauche, le signal constant par morceaux est décomposé en signaux élémentaires. Chacun est associé à une couleur différente. En haut à droite, les réponses aux signaux élémentaires sont représentées. On constatera que c'est toujours la même réponse mais décalée et pondérée de manière appropriée. En bas, les signaux d'entrée et de sortie associés sont représentés. Le signal de sortie est la somme des signaux représentés en haut à droite grâce au principe de superposition.

$$\{u(t)\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\lfloor t/h \rfloor} u_i (\epsilon(t - ih) - \epsilon(t - (i+1)h)) \right\}$$

Divisons et multiplions par h ($\frac{h}{h} = 1$, cela ne change rien...)

$$\{u(t)\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\lfloor t/h \rfloor} u_i \frac{\epsilon(t - ih) - \epsilon(t - (i+1)h)}{h} h \right\}$$

Passons à la limite $\lim_{h \rightarrow 0}$, ce qui induit $\sum \rightarrow \int$, $ih \rightarrow \tau$, $u_i \rightarrow u(\tau)$ et h (à droite) devient $d\tau$

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon(t - \tau) - \epsilon(t - \tau + h)}{h} \right) d\tau \right\}$$

3.6.1 Impulsion de Dirac

La figure 3.11 représente $\frac{\epsilon(t) - \epsilon(t-h)}{h}$ lorsque $h \rightarrow 0.1$. A la limite, l'impulsion de Dirac est obtenue.

$$\forall h > 0, \forall t > 0, \int_0^t \frac{\epsilon(\tau) - \epsilon(\tau - h)}{h} d\tau = 1 \rightarrow \int_0^t \delta(\tau) d\tau = 1$$

Définition 1. (IMPULSION DE DIRAC) *L'impulsion de Dirac est définie par le passage à la limite*

$$\{\delta(t)\} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{\epsilon(t)\} - \{\epsilon(t-h)\}}{h}$$

REMARQUE : Pour définir correctement l'impulsion de Dirac, il est nécessaire d'introduire la théorie de la mesure et la théorie des distribution au sens de Schwartz. Dans notre contexte, l'impulsion de Dirac pourrait se

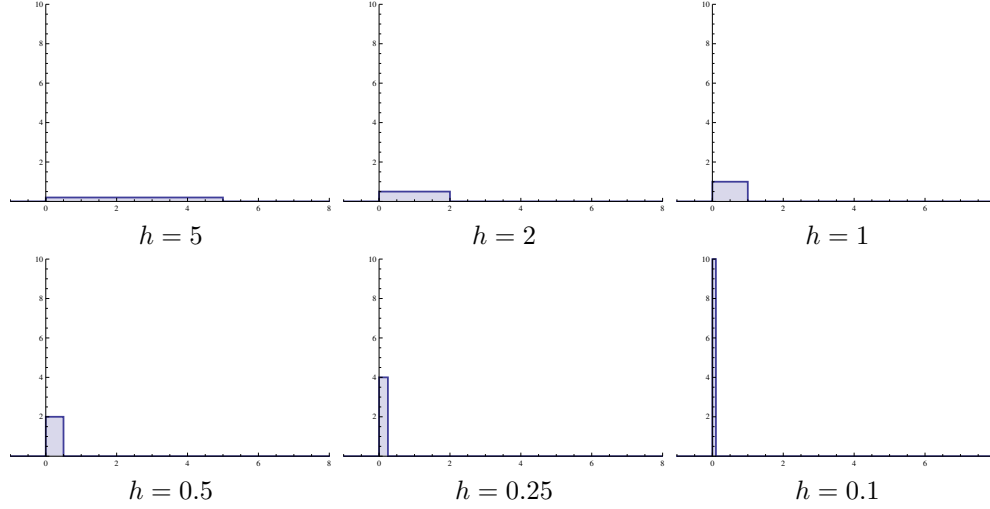


Figure 3.11. Illustration de la construction de l'impulsion de Dirac $\{\delta(t)\}$. Lorsque $h \neq 0$, il s'agit de fonctions. Cependant l'objet limite lorsque $h = 0$ n'est plus une fonction. Tout au long du processus, l'intégrale vaut toujours 1, La hauteur $\frac{1}{h}$ s'ajuste de telle sorte que $h \frac{1}{h} = 1$.

définir comme l'opérateur neutre pour la convolution. Cependant, nous voulons une interprétation en tant que signal bien spécifique, raison pour laquelle la définition ci-dessus est adoptée bien que pas très rigoureuse au sens mathématique étant donné que l'on n'aboutit pas à une fonction à proprement parlé. Une discussion entre la correspondance entre théorie des distributions au sens de Schwartz (fonctionnelles au lieu de fonction) et la théorie des distributions données comme des quotients de convolution (c'est notre présentation) est discutée dans le très joli ouvrage (court) de J.P. Marchand "Distributions : an outline", North Holland, Amsterdam & NY, 1962. Se référer également aux deux ouvrages mentionnés dans la conclusion de ce chapitre.

3.6.2 Construction de l'identité neutre

En partant de la dernière identité

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon(t - \tau) - \epsilon(t - \tau + h)}{h} \right) d\tau \right\}$$

on aboutit à l'identité neutre

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\} \quad (3.1)$$

On appelle ceci une identité neutre étant donné que de part et d'autre du signal égalité il apparaît le signal $\{u(t)\}$. En effet (3.1) s'écrit à l'aide du produit de convolution $*$ sous la forme

$$\{u(t)\} = \{u(t)\} * \{\delta(t)\}$$

ce qui signifie que $\{\delta(t)\}$ est bien l'opération élément neutre pour le produit $*$, un peu comme 1 est l'élément neutre pour le produit de deux polynômes.

3.7 Réponse impulsionnelle

Définition 2. (RÉPONSE IMPULSIONNELLE) Lorsque $\{u(t)\} = \{\delta(t)\}$, la réponse impulsionnelle $\{g(t)\}$ est la sortie

$$\{g(t)\} := \{y(t)\}$$

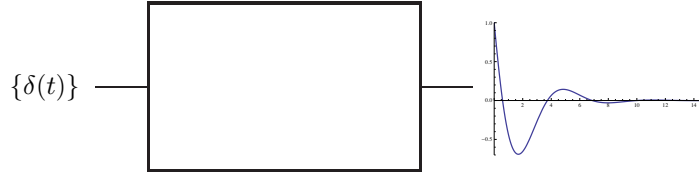


Figure 3.12. La réponse impulsionnelle est la sortie du système lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac

3.7.1 Construction progressive de la réponse impulsionnelle

La figure 3.13 représente la construction progressive de l'impulsion de Dirac. La fonction $\frac{r(t)-r(t-h)}{h}$ est représentée lorsque $h \rightarrow 0.1$.

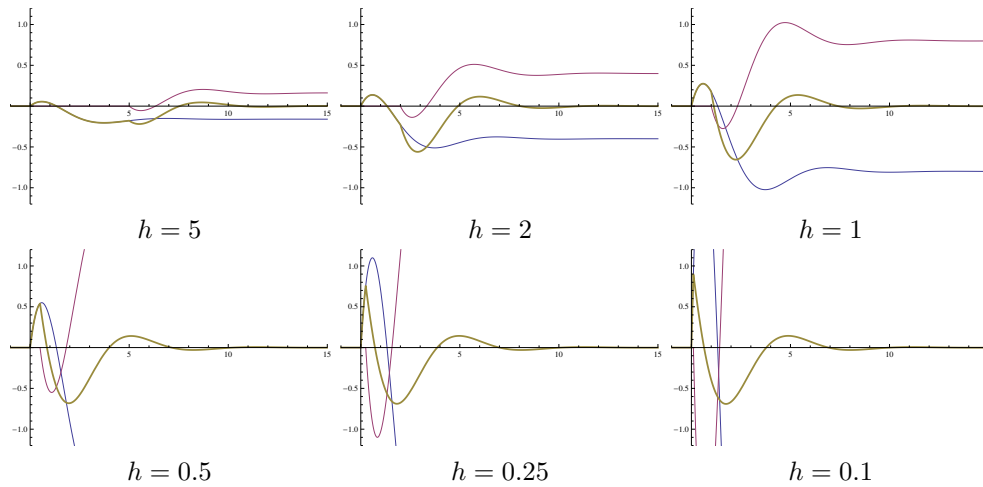


Figure 3.13. Construction progressive de l'impulsion de Dirac. La figure représente la sortie du système lorsque l'entrée correspond à un des cas de la figure 3.11.

3.8 Produit de convolution

On reprend l'identité neutre

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\}$$

et on applique le principe de superposition

$$\{y(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\}$$

Définition 3. (PRODUIT DE CONVOLUTION)

$$\{y(t)\} = \{u(t)\} * \{g(t)\} := \left\{ \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\}$$

3.8.1 Propriétés du produit de convolution

1. Commutatif

$$\{a(t)\} * \{b(t)\} = \{b(t)\} * \{a(t)\}$$

2. Associatif

$$\{a(t)\} * (\{b(t)\} * \{c(t)\}) = (\{a(t)\} * \{b(t)\}) * \{c(t)\}$$

3. Distributif par rapport à l'addition

$$\{a(t)\} * (\{b(t)\} + \{c(t)\}) = \{a(t)\} * \{b(t)\} + \{a(t)\} * \{c(t)\}$$

3.9 Calcul opérationnel

3.9.1 Opérateur neutre $\mathbf{1}$

Il représente un système qui ne modifie pas le signal d'entrée $\{u(t)\}$.

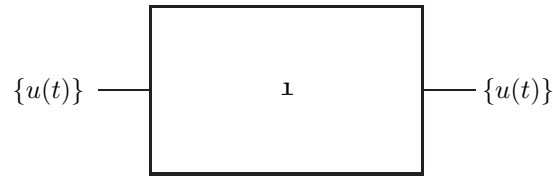


Figure 3.14. L'opérateur neutre restitue l'entrée $\{u(t)\}$ à la sortie.

En comparant la formule générale

$$\{y(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \{u(t)\} * \{g(t)\}$$

à l'identité neutre

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\} = \{u(t)\} * \{\delta(t)\}$$

on obtient l'expression

$$\mathbf{1} = \{g(t)\} = \{\delta(t)\}$$

3.9.2 Opérateur intégral \mathbf{i}

Il représente l'intégrale du signal d'entrée $\{u(t)\}$.

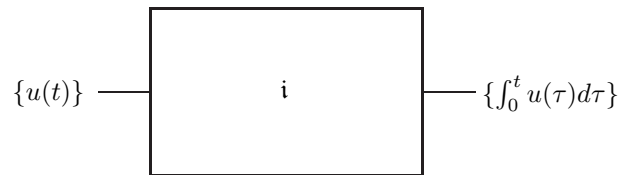


Figure 3.15. L'opérateur intégral \mathbf{i} calcule l'intégrale du signal d'entrée.

En comparant la formule générale

$$\{y(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \{u(t)\} * \{g(t)\}$$

à la sortie intégrale du signal d'entrée

$$\{y(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) d\tau \right\} = \{u(t)\} * \{\epsilon(t)\}$$

on obtient l'expression

$$\mathbf{i} = \{g(t)\} = \{\epsilon(t)\}$$

3.9.3 Opérateur \mathfrak{d} (inverse de \mathbf{i})

Definition 4. (OPÉRATEUR δ) *L'opérateur \mathfrak{d} est défini comme l'inverse de \mathbf{i} pour la convolution $*$. Autrement dit,*

$$\mathfrak{d} * \mathbf{i} = \mathbf{i} * \mathfrak{d} = \mathbf{1}$$

3.9.4 Théorème fondamental

Theorem 1.

$$\mathfrak{d} * \{f(t)\} := \{f'(t)\} + f(0)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \{f(t)\} - \{f(0)\} &= \left\{ \int_0^t f'(\tau) d\tau \right\} \\ \{f(t)\} - \mathbf{i} * f(0) &= \mathbf{i} * \{f'(t)\} \\ \{f(t)\} &= \mathbf{i} * \{f'(t)\} + \mathbf{i} * f(0) \\ \mathfrak{d} * \{f(t)\} &= \{f'(t)\} + f(0) \end{aligned}$$

(on a utilisé $\{f(0)\} = \mathbf{i} * f(0)$ et $\mathfrak{d} * \mathbf{i} = \mathbf{1}$)

C.Q.F.D.

3.9.5 Notation abrégée

Attention! On a plongé les nombres dans l'espace des opérateurs. Ainsi on ne distingue pas 1 de $1\{\delta(t)\} = \mathbf{1}$.

$$1 := 1\{\delta(t)\} = \{\delta(t)\} = \mathbf{1}$$

De même, on ne distingue pas le nombre 3 de $3\{\delta(t)\}$

$$3 := 3\{\delta(t)\}$$

A ne pas confondre...

$$3 = 3\{\delta(t)\} \neq \{3\} = \{3\epsilon(t)\} = 3\{\epsilon(t)\}$$

3.9.6 Discontinuité due à la condition initiale

\int n'est pas l'inverse de $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{10} \sin(t) + 2 \right) = \frac{1}{10} \cos(t)$$

car

$$\int \frac{1}{10} \cos(\tau) d\tau = \frac{1}{10} \sin(t) \neq \frac{1}{10} \sin(t) + 2$$

Par contre, \mathfrak{d} est l'inverse de \mathbf{i} pour $*$

$$\mathfrak{d} * \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) + 2 \right\} = \left\{ \frac{1}{10} \cos(t) \right\} + 2 = \left\{ \frac{1}{10} \cos(t) \right\} + 2\{\delta(t)\}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{i} * \left(\left\{ \frac{1}{10} \cos(t) \right\} + 2\{\delta(t)\} \right) \\
&= \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) \right\} + 2 * \mathbf{i} \\
&= \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) \right\} + 2\{\epsilon(t)\} \\
&= \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) + 2 \right\}
\end{aligned}$$

On retrouve la condition initiale de manière correcte !

3.9.7 Pas de diviseur de zéro (anneau intègre)

Theorem 2. (TITCHMARSH) *Si*

$$\{a(t)\} * \{b(t)\} = \{0\}$$

alors nécessairement

$$\{a(t)\} = \{0\} \text{ ou/et } \{b(t)\} = \{0\}$$

Ce théorème indique que si on a une fonction nulle comme résultat du produit de convolution alors nécessairement un des deux arguments (ou les deux à la fois) sont nuls. C'est le cas d'une équation avec les entiers naturels. Si $ab = 0$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ alors nécessairement $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = b = 0$.

Ce théorème est important pour construire ce que l'on appelle les fractions. Souvenez-vous de la construction de \mathbb{Q} à partir de \mathbb{Z} , par exemple $-3/4$ est construit comme l'entité abstraite qui est telle que lorsque elle est multipliée par 4 le résultat est -3 . Une telle construction n'est pas possible s'il y avait des diviseurs de zéros. Nous allons construire des fractions de tels opérateurs dans le prochain paragraphe.

3.9.8 Construction du corps de fraction

S'il n'y a pas de diviseur de zéro (anneau intègre), on peut construire un corps de fraction associé. Il suffit d'écrire par convention une barre de fraction et de s'accorder sur les règles suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} + \frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}} &:= \frac{\{a(t)\} * \{d(t)\} + \{c(t)\} * \{b(t)\}}{\{b(t)\} * \{d(t)\}} \\
\frac{\{a(t)\}}{\mathbf{1}} &:= \{a(t)\}
\end{aligned}$$

C'est exactement le même cheminement formel que celui utilisé pour construire \mathbb{Q} à partir de \mathbb{Z} .

3.9.9 Utilité pour la résolution des équations différentielles

La construction de fraction couplée avec la théorème fondamental produit une technique pour résoudre les équations différentielles. La résolution des équations différentielles linéaires est la motivation principale du calcul opérationnel.

3.9.10 Equivalence entre fonction et fraction de polynômes en \mathfrak{D}

En appliquant l'opérateur \mathfrak{D} à la fonction exponentielle, le théorème fondamental donne une relation avec la condition initiale de la fonction, à savoir $e^0 = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} * \{e^{\alpha t}\} &= \{\alpha e^{\alpha t}\} + 1 \\
&= \alpha \{e^{\alpha t}\} + 1
\end{aligned}$$

Il suffit alors de factoriser la fonction $\{e^{\alpha t}\}$ et de diviser car les fractions d'opérateurs sont maintenant possibles.

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{\mathfrak{d} - \alpha}$$

On obtient ainsi une correspondance entre la fonction

$$\{e^{\alpha t}\}$$

et l'opérateur

$$\frac{1}{\mathfrak{d} - \alpha}$$

3.9.11 Equations différentielle et opérateur associé

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = ax \tag{3.2}$$

à résoudre. On utilise le théorème fondamental qui donne

$$\{\dot{x}\} = \mathfrak{d} * \{x(t)\} - x(0) \tag{3.3}$$

et fait apparaître la condition initiale $x(0)$ de manière explicite. La relation (3.3) est utilisée dans l'équation différentielle (3.2) pour remplacer $\{\dot{x}\}$ ce qui donne

$$\mathfrak{d} * \{x(t)\} - x(0) = a\{x(t)\} \tag{3.4}$$

En factorisant $\{x(t)\}$ et en utilisant les fractions, on exprime $\{x(t)\}$ par une fraction de \mathfrak{d} ce qui permet de déterminer la solution en appliquant la correspondance entre la fraction et la fonction obtenue au paragraphe précédent. En effet (3.4) devient

$$\{x(t)\} = x(0) \frac{1}{\mathfrak{d} - a} \tag{3.5}$$

ce qui donne, en utilisant l'égalité $\frac{1}{\mathfrak{d} - a} = \{e^{at}\}$ du dernier paragraphe,

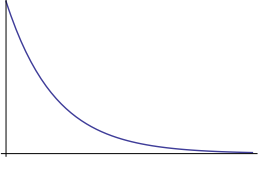
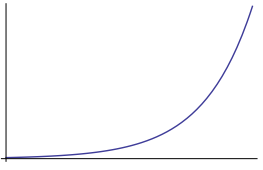
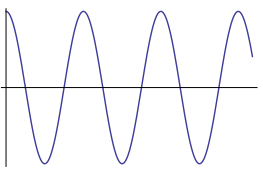
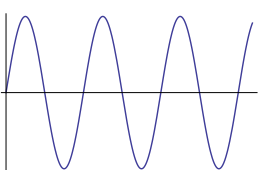
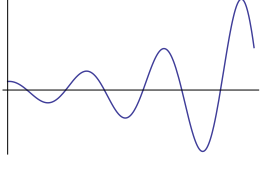
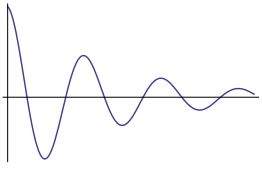
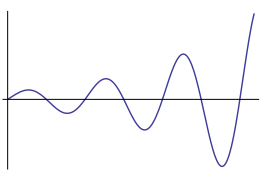
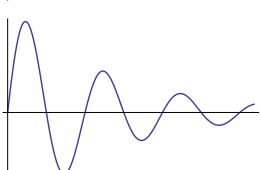
$$\{x(t)\} = x(0)\{e^{at}\}$$

La solution de l'équation différentielle (3.2) est ainsi déterminée.

La technique de résolution consistera donc en la factorisation des fractions de polynômes en \mathfrak{d} et la construction d'éléments simples. Les éléments simples sont des fractions élémentaires pour lesquelles on associe des fonctions bien connue (exactement comme $\{e^{at}\}$ est associée à $\frac{1}{\mathfrak{d} - a}$). On pourra alors consulter les correspondances donnés dans des tables et on obtiendra alors la solution de l'équation différentielle.

Le paragraphe suivant présente certaines de ces fonctions. Le chapitre suivant étudiera la même question en introduisant une correspondance plus directe avec les fraction de polynômes en une variable complexe s . La présence du corps des nombres complexes \mathbb{C} rend les calculs plus directs.

3.9.12 Table de correspondances (égalité)

opérateur	fonction	graphique
$\frac{a}{\mathfrak{d}-\alpha}$ $\alpha < 0$	$\{ae^{\alpha t}\}$	
$\frac{a}{\mathfrak{d}-\alpha}$ $\alpha > 0$	$\{ae^{\alpha t}\}$	
$\frac{a\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}^2+\omega^2}$	$\{a \cos(\omega t)\}$	
$\frac{a\omega}{\mathfrak{d}^2+\omega^2}$	$\{a \sin(\omega t)\}$	
opérateur	fonction	graphique
$\frac{a(\mathfrak{d}-\alpha)}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$ $\alpha > 0$	$\{ae^{\alpha t} \cos(\omega t)\}$	
$\frac{a(\mathfrak{d}-\alpha)}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$ $\alpha < 0$	$\{ae^{\alpha t} \cos(\omega t)\}$	
$\frac{a\omega}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$ $\alpha > 0$	$\{ae^{\alpha t} \sin(\omega t)\}$	
$\frac{a\omega}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$ $\alpha < 0$	$\{ae^{\alpha t} \sin(\omega t)\}$	

3.10 Exemple

3.10.1 Structure anti-sismique

Immeuble : réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle de l'immeuble à quatre étage mentionné au chapitre 1 et modélisé au chapitre 2 est donnée à la figure 3.16.

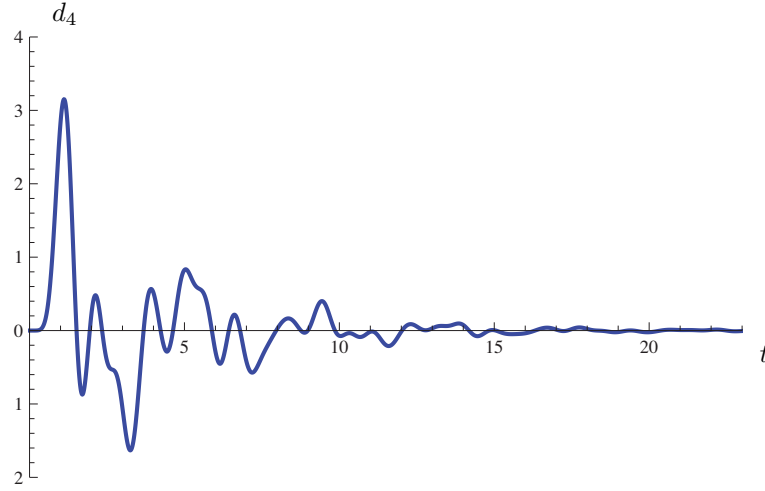


Figure 3.16. Réponse impulsionnelle pour l'immeuble à quatre étages dont la sortie est la position de la dalle du quatrième étage d_4 .

Nous allons présenter à l'aide du quotient de polynômes en \mathfrak{D} comment construire cette réponse impulsionnelle de manière exacte pour le choix de modèle simplifié que l'on a retenu.

Modèle (rappel)

Le modèle de l'immeuble est donné par quatre équations différentielles linéaires du second ordre couplées les unes aux autres. La perte d'énergie est cette fois fonction uniquement de la vitesse de l'étage et non de la vitesse relative. Le système suivant est obtenu lorsqu'on procède à cette modification des hypothèses de modélisation par rapport à celles du modèle obtenu au chapitre précédent :

$$\begin{aligned} m\ddot{d}_1 &= k(d_0 - d_1) + k(d_2 - d_1) - b\dot{d}_1 \\ m\ddot{d}_2 &= k(d_1 - d_2) + k(d_3 - d_2) - b\dot{d}_2 \\ m\ddot{d}_3 &= k(d_2 - d_3) + k(d_4 - d_3) - b\dot{d}_3 \\ m\ddot{d}_4 &= k(d_3 - d_4) - b\dot{d}_4 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Valeurs numériques

$$\{d_0(t)\} = \{\delta(t)\}, k = 10, b = 2, m = 1$$

Réponse impulsionnelle

L'idée pour obtenir la réponse impulsionnelle est d'appliquer le théorème fondamental plusieurs fois de suite pour transformer les dérivées (par exemple \dot{d}_1) et les remplacer par l'effet de l'opérateur \mathfrak{D} .

En effectuant ceci sur tout le système et en éliminant toutes les variables d_1, d_2, d_3 pour ne retenir que d_0 et d_4 , puis en remplaçant $\{d_0(t)\}$ par l'impulsion de Dirac $\{\delta(t)\}$, on trouve pour la réponse impulsionnelle

$$\{d_4(t)\} = \frac{160000}{\mathfrak{d}^8 + 2\mathfrak{d}^7 + 141.5\mathfrak{d}^6 + 210.5\mathfrak{d}^5 + 6105.06\mathfrak{d}^4 + 6017.5\mathfrak{d}^3 + 81500\mathfrak{d}^2 + 40000\mathfrak{d} + 160000} \quad (3.7)$$

Pour donner un peu plus de détails sur la marche à suivre, prenons la première équation différentielle du second ordre (3.6) et appliquons le théorème fondamental.

$$m\mathfrak{d} * \{\dot{d}_1(t)\} - m\dot{d}_1(0)\{\delta(t)\} = k(\{d_0(t)\} - \{d_1(t)\}) + k(\{d_2(t)\} - \{d_1(t)\}) - b\mathfrak{d} * \{d_1(t)\} + bd_1(0)\{\delta(t)\}$$

et après une seconde application du th. fondamental,

$$m\mathfrak{d} * \mathfrak{d} * \{d_1(t)\} - m d_1(0)\{\delta(t)\} - m\dot{d}_1(0)\{\delta(t)\} = k(\{d_0(t)\} - \{d_1(t)\}) + k(\{d_2(t)\} - \{d_1(t)\}) - b\mathfrak{d} * \{d_1(t)\} + bd_1(0)\{\delta(t)\}$$

Comme nous voulons la réponse impulsionnelle du système et que nous savons que le système est au repos avant son excitation par l'impulsion de Dirac, les conditions initiales sont nulles. En conséquence, nous avons plus que l'équation algébrique suivante

$$m\mathfrak{d} * \mathfrak{d} * \{d_1(t)\} = k(\{d_0(t)\} - \{d_1(t)\}) + k(\{d_2(t)\} - \{d_1(t)\}) - b\mathfrak{d} * \{d_1(t)\} \quad (3.8)$$

en procédant de même pour les équations différentielles restantes (3.6-3.6) du modèle, nous trouvons sans trop de difficulté

$$\begin{aligned} m\mathfrak{d} * \mathfrak{d} * \{d_2(t)\} &= k(\{d_1(t)\} - \{d_2(t)\}) + k(\{d_3(t)\} - \{d_2(t)\}) - b\mathfrak{d} * \{d_2(t)\} \\ m\mathfrak{d} * \mathfrak{d} * \{d_3(t)\} &= k(\{d_2(t)\} - \{d_3(t)\}) + k(\{d_4(t)\} - \{d_3(t)\}) - b\mathfrak{d} * \{d_3(t)\} \\ m\mathfrak{d} * \mathfrak{d} * \{d_4(t)\} &= k(\{d_3(t)\} - \{d_4(t)\}) - b\mathfrak{d} * \{d_4(t)\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

En éliminant $\{d_1(t)\}$, $\{d_2(t)\}$, $\{d_3(t)\}$ en ne retenant qu'une seule équation algébrique parmi (3.8-3.9), on aboutit à (3.7). Dans cette dernière étape, il est possible de diviser par un polynôme en \mathfrak{d} et on utilise toutes les propriétés de l'algèbre du produit de convolution présentées auparavant (distributivité, commutativité, associativité). En somme, la convolution se comporte comme un produit "classique".

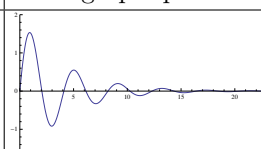
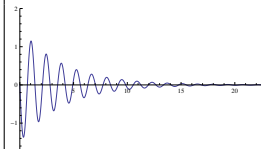
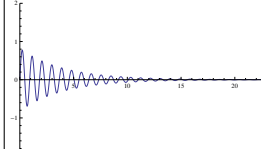
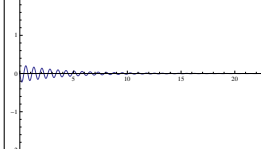
Immeuble : 4 composantes (modes)

Il est intéressant de considérer la fraction (3.7) comme constituée de fractions élémentaires. Nous pouvons alors consulter les tables de fractions élémentaires pour déterminer les contributions associées. La réponse impulsionnelle est alors la somme des réponses élémentaires. Les factorisations sont rendues plus faciles par l'introduction d'une correspondance (isomorphisme) entre la variable \mathfrak{d} et la variable complexe s par la transformée de Laplace, que nous verrons au chapitre suivant. Pour l'instant, il suffit de vérifier la correspondance en procédant en sens contraire et utiliser le corps de fraction de polynômes que nous avons introduit et de vérifier que la somme des éléments simples donne bien (3.7). Les éléments simples sont

$$\begin{aligned} \{d_4(t)\} &= -\frac{6.66667}{(\mathfrak{d} + 0.25)^2 + 19.9375} + \frac{5.62686}{(\mathfrak{d} + 0.25)^2 + 46.8834} \\ &\quad - \frac{1.95419}{(\mathfrak{d} + 0.25)^2 + 70.5793} + \frac{2.99399}{(\mathfrak{d} + 0.25)^2 + 2.3498} \end{aligned}$$

et les signaux élémentaires associés sont représentés à la figure 3.17.

Les éléments simples sont détaillés dans la table ci-dessous.

opérateur	fonction	graphique
$\frac{2.99399}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+2.3498}$	$\{1.953e^{-0.25t} \sin(1.523t)\}$	
$-\frac{6.66667}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+19.9375}$	$\{-1.493e^{-0.25t} \sin(4.465t)\}$	
$\frac{5.62686}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+46.8834}$	$\{0.822e^{-0.25t} \sin(6.847t)\}$	
$-\frac{1.95419}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+70.5793}$	$\{-0.233e^{-0.25t} \sin(8.401t)\}$	

3.11 Conclusion

Ce chapitre a mis l'accent sur la réponse impulsionnelle et la convolution. La réponse impulsionnelle représente tout ce qui est nécessaire de connaître pour décrire le comportement entrée-sortie du système pour des conditions initiales nulles. Il est d'usage de remplir la boîte de la figure 3.2 en utilisant la réponse impulsionnelle. Celle-ci peut-être décrite par une fraction de deux polynômes en \mathfrak{d} ou de manière explicite en spécifiant la fonction $\{g(t)\}$. C'est le principe de superposition qui rend cette universalité possible. Le système est ainsi caractérisé entièrement par sa réponse impulsionnelle et la sortie de ce système est le produit de convolution de l'entrée par sa réponse impulsionnelle (il faut toutefois veiller à considérer des conditions initiales nulles pour les variables internes).

L'algèbre de convolution n'est pas nécessairement facile à manipuler et c'est la raison pour laquelle on utilise la transformée de Laplace en fabriquant un isomorphisme entre fraction de polynômes en \mathfrak{d} et entre fraction de polynômes dans la variable complexe s . Il y a des subtilités entre cette correspondance que nous n'envisagerons pas. Il est par exemple possible d'étendre la théorie des opérateurs au delà de la validité de la transformée de Laplace, ceci en particulier en relation avec les équations aux dérivées partielles et les systèmes dynamiques gouvernés par de telles équations. Comme nous nous limitons aux systèmes linéaires stationnaires de dimension finie, nous ne verrons pas grande différence entre les opérateurs de ce chapitre et les fonctions de transfert du chapitre suivant. Le lecteur désireux d'approfondir la théorie de ce chapitre peut se référer aux ouvrages de J. Mikusinski "Operational Calculus", Pergamon Press, 1959 et de A. Erdélyi "Operational Calculus and Generalized Functions", HRW, NY, 1962.

Fonction de transfert

4.1 Introduction

La représentation entrée-sortie a mis en évidence l'importance de la réponse impulsionnelle pour caractériser la relation entre l'entrée et la sortie. Les opérateurs et le produit de convolution décrivent cette relation entrée-sortie. Dans le présent chapitre la relation entrée-sortie est approfondie en utilisant l'algèbre des polynômes en une variable complexe s . A cette fin, une relation *algébrique* liant l'entrée et la sortie d'un système dynamique. Ceci est possible grâce à la transformation de Laplace et au concept de fonction de transfert.

La transformation de Laplace, tout comme l'introduction de fractions de polynômes en l'opérateur \mathfrak{D} , permet de transformer des équations différentielles et intégrales, linéaires et à coefficients constants, en équations algébriques beaucoup plus simples à manipuler. Il deviendra ainsi aisé de les résoudre ou d'étudier certaines propriétés structurelles des systèmes dynamiques correspondantes. C'est une version "miroir" de ce que nous avons présenté au chapitre précédant où le produit de convolution et l'opérateur \mathfrak{D} intervenaient. Dans le présent chapitre, le produit sera le produit classique et la variable \mathfrak{D} est remplacée par la variable complexe s .

4.2 Transformation de Laplace

4.2.1 Définition

Soient le signal temporel $f(t)$, avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$, et la variable complexe s .

La transformation de Laplace de $f(t)$ pour l'intervalle temporel $[0, \infty)$ s'écrit $F(s)$ et est définie comme suit :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.1)$$

La transformée de Laplace transforme donc un signal temporel en un signal dépendant de la variable complexe s :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

4.2.2 Existence

La transformée de Laplace $F(s)$ du signal $f(t)$ existe si l'intégrale (4.1) converge.

Considérons à titre d'exemple la transformée de Laplace du signal $f(t) = Ae^{\alpha t}$ où A et α sont des constantes réelles $s = a + jb$ une variables complexe :

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty A e^{\alpha t} e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{A}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^\infty \\
&= -\frac{A}{s-\alpha} e^{-(a-\alpha)t} [\cos(bt) - j \sin(bt)] \Big|_0^\infty \\
&= \begin{cases} \frac{A}{s-\alpha} & \text{si } (a-\alpha) > 0 & a > \alpha \\ \text{no converge pas} & \text{si } (a-\alpha) \leq 0 & a \leq \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

La partie du plan complexe pour laquelle $a = \Re(s) > \alpha$ représente le domaine de convergence de $F(s)$. Ce domaine est illustré à la figure 4.1 ; α est appelé *l'abscisse de convergence* de $F(s)$.

Les fonctions temporelles de type exponentielle ou celles qui croissent moins rapidement qu'une exponentielle

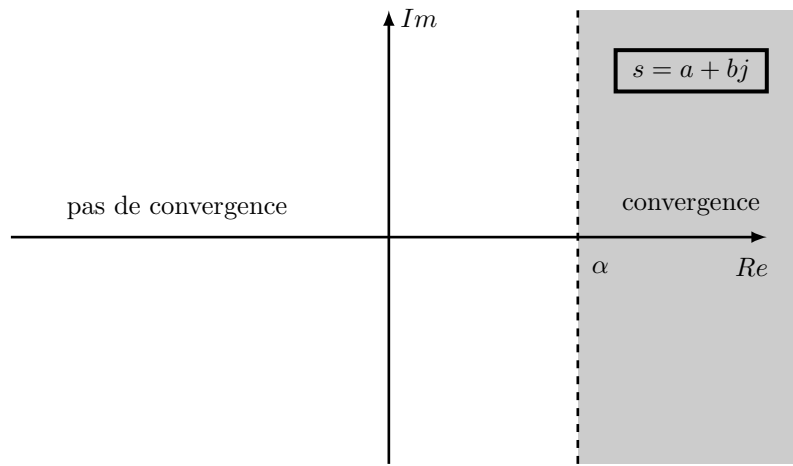


Figure 4.1. Domaine de convergence de $F(s)$ pour $f(t) = Ae^{\alpha t}$.

possèdent un domaine de convergence non nul. Par exemple $t, \sin(\omega t)$ et $t \sin(\omega t)$ possèdent l'abscisse de convergence 0 alors que $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}$ et $e^{\alpha t} \sin(\omega t)$ possèdent toutes l'abscisse de convergence α . Par contre, les fonctions e^{t^2} et te^{t^2} croissent plus rapidement qu'une fonction exponentielle et ne possèdent pas de domaine de convergence, et donc pas de transformée de Laplace.

Notons cependant que

$$f(t) = \begin{cases} e^{t^2} & 0 \leq t \leq t^* < \infty \\ 0 & t \geq t^* \end{cases}$$

possède bien une transformée de Laplace $F(s)$.

On démontre que l'intégrale (4.1) converge si $f(t)$ est continue par morceaux pour $t \geq 0$ et si une constante positive β existe telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} |f(t)| = 0$$

La plupart des signaux d'intérêt dans l'étude des systèmes dynamiques possèdent une transformée de Laplace. Il serait fort utile de pouvoir utiliser dans tout le plan complexe l'expression analytique calculée à partir de la définition (4.1) et valable uniquement dans le domaine de convergence. A cette fin, on peut utiliser le *théorème*

*du prolongement analytique*¹ : si deux fonctions complexes, analytiques dans un domaine², sont égales pour un quelconque intervalle non nul de ce domaine, elles sont alors égales partout dans ce domaine. Dans notre cas particulier, ces deux fonctions sont d'une part l'intégrale de la définition (4.1) et d'autre part l'expression analytique pour $F(s)$; le domaine est le plan complexe à l'exception des points de singularité où $F(s)$ est infini ; l'intervalle est un intervalle fini quelconque dans la région de convergence de l'intégrale (4.1). Le théorème indique alors que l'expression analytique $F(s)$ est valable pour tout le plan complexe à l'exception des valeurs de s qui rendent $F(s)$ infini (les pôles de $F(s)$).

Nous dirons donc que la transformée de Laplace de $f(t)$ est la fonction analytique $F(s)$ qui, pour $\Re(s) > \alpha$, est définie par son intégrale de Laplace (4.1).

4.3 Transformée de Laplace de signaux choisis

4.3.1 Saut unité

Le saut unité $\epsilon(t)$ est un signal défini de la façon suivante :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

On l'appelle également échelon unité en raison de sa forme. Sa représentation graphique est donnée à la figure 4.2

A partir de la définition de la transformation de Laplace (4.1), on obtient pour la saut unité :

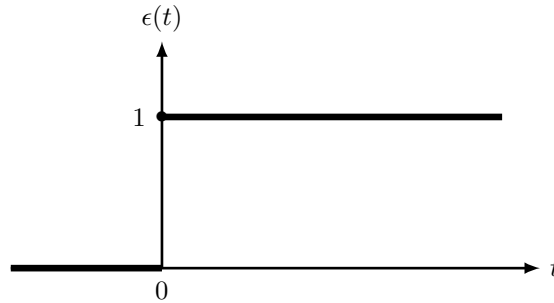


Figure 4.2. Saut unité.

$$\mathcal{L}[\epsilon(t)] = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (4.2)$$

Dans le cas d'un saut unité d'amplitude A , soit $u(t) = A\epsilon(t)$:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad (4.3)$$

La réponse d'un système au repos à un échelon unité est appelée **réponse indicielle**.

1. Prolongement analytique. Soient deux domaines D et D_1 tels que $D \subset D_1$. Si deux fonctions F et F_1 sont holomorphes sur D et D_1 et si $F(s) = F_1(s)$ pour tout $s \in D$, on dit que F_1 est un prolongement analytique de F sur D_1 .

2. Une fonction $F(s)$ est holomorphe ou analytique en D si elle admet une dérivée $F'(s)$ en tout point de D .

4.3.2 Rampe

Une rampe est un signal à croissance linéaire dont l'équation est $u(t) = At$, pour $t \geq 0$. Sa représentation est donnée à la figure 4.3. A partir de (4.3), et en utilisant la méthode d'intégration par parties, on a :

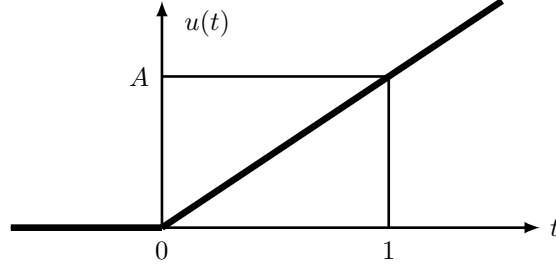


Figure 4.3. Rampe.

$$\begin{aligned}
 U(s) &= \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt \\
 &= A \left\{ \left[-t \frac{1}{s} e^{-st} \right] \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} dt \right\} = \frac{A}{s^2}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.3.3 Exponentielle

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{A}{s + \alpha}$$

4.3.4 Sinus et cosinus

Soient les relations trigonométriques bien connues : $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$
 $e^{-j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t)$

De la transformée de Laplace d'un signal exponentiel, on déduit aisément :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ A \sin(\omega_0 t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ A \cos(\omega_0 t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{As}{s^2 + \omega_0^2}$$

4.3.5 Impulsion de Dirac

Soit l'impulsion rectangulaire définie par (4.4) :

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/\Delta t & t \in [0, \Delta t) \\ 0 & t \geq \Delta t \end{cases}$$

A la limite, pour $\Delta t \rightarrow 0$, $\rho(t)$ tend vers une impulsion de durée infiniment courte, d'amplitude infiniment grande, de surface unité et située à l'origine (fig. 4.5) :

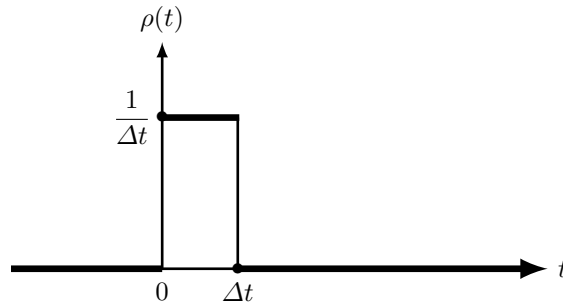


Figure 4.4. Impulsion rectangulaire.

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho(t)$$

Cette impulsion $\delta(t)$ est appelée **impulsion de Dirac** ou fonction delta. De ce qui précède, nous pouvons

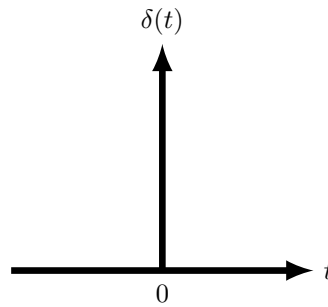


Figure 4.5. Impulsion de Dirac.

mettre en évidence les caractéristiques de cette impulsion :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0$$

La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{0+} \delta(t) e^0 dt + \int_{0+}^{\infty} 0 e^{-st} dt = 1$$

La réponse d'un système au repos à une impulsion de Dirac est appelée **réponse impulsionnelle**.

4.3.6 Dictionnaire de la transformation de Laplace

n°	Signal temporel	Transformée de Laplace	Abscisse de convergence
1	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$(0, \infty)$
2	$\delta(t)$	1	$(-\infty, \infty)$
3	$\delta^{n+1}(t)$	s^n	$(-\infty, \infty)$
4	$\epsilon(t)e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$(0, \infty)$
5	$\epsilon(t) \cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$(0, \infty)$
6	$\epsilon(t) \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$(0, \infty)$
7	$\epsilon(t)e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$(-\alpha, \infty)$
8	$\epsilon(t)e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$(-\alpha, \infty)$
9	$\epsilon(t) \cos(\omega t + \phi)$	$\frac{s \cos \phi - \omega \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$	$(0, \infty)$
10	$\epsilon(t) \sin(\omega t + \phi)$	$\frac{s \sin \phi + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$	$(0, \infty)$
11	$\frac{\epsilon(t)t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$(0, \infty)$
12	$\frac{\epsilon(t)t^n e^{-\alpha t}}{n!}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$(-\alpha, \infty)$

Ces expressions sont valables pour des puissances n positives et entières. $\epsilon(t)$ représente le saut unité à $t = 0$.

4.4 Propriétés de la transformation de Laplace

4.4.1 Dérivation temporelle

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right] e^{-st} dt$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] &= [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

De même, en appliquant successivement l'intégration par parties :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0) \quad (4.5)$$

En d'autres termes, dériver le signal temporel $f(t)$ correspond, dans le domaine de Laplace, à manipuler sa transformée de Laplace $F(s)$ par s . Remarquons ici qu'il est nécessaire de prendre en compte les conditions initiales.

4.4.2 Intégration temporelle

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] e^{-st} dt$$

A nouveau, une intégration par parties permet d'évaluer cette expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] &= \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} \left[e^{-\infty} \int_0^\infty f(\tau)d\tau - e^0 \int_0^0 f(\tau)d\tau \right] + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{F(s)}{s} \end{aligned} \quad (4.6)$$

En d'autre termes, intégrer le signal temporel $f(t)$ correspond, dans le domaine de Laplace, à multiplier sa transformée de Laplace $F(s)$ par $1/s$.

4.4.3 Translation dans le domaine de Laplace $F(s + \lambda)$

La transformée de Laplace d'un signal temporel multiplié par l'exponentielle $e^{-\lambda t}$ correspond à la transformée de Laplace du signal original décalé du facteur λ :

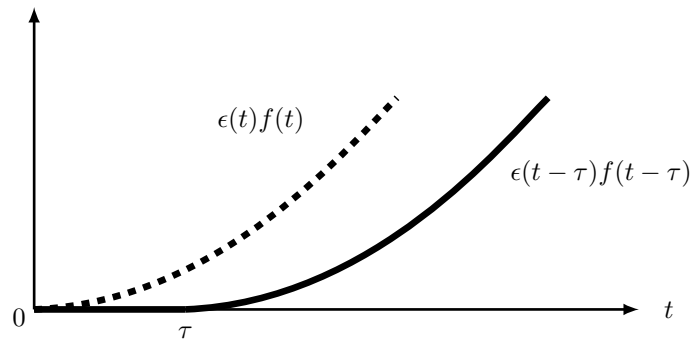


Figure 4.6. Translation temporelle du signal $f(t)$.

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}f(t)] = \int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\lambda)t}dt = F(s + \lambda) \quad (4.7)$$

4.4.4 Translation dans le temps $f(t - \tau)$

Soit le signal temporel $\epsilon(t - \tau)f(t - \tau)$ qui correspond au signal $\epsilon(t)f(t)$ retardé de τ (4.6).

On peut écrire :

$$\mathcal{L}[\epsilon(t - \tau)f(t - \tau)] = \int_0^\infty \epsilon(t - \tau)f(t - \tau)e^{-st} dt = \int_\tau^\infty f(t - \tau)e^{-st} dt$$

En introduisant le changement de variable $v = t - \tau$, on a, d'une part $dv = dt$, et, d'autre part

$$\mathcal{L}[\epsilon(t - \tau)f(t - \tau)] = e^{-s\tau} \int_0^\infty e^{-sv} dv = e^{-s\tau} F(s). \quad (4.8)$$

En d'autres termes, retarder le signal temporel $f(t)$ de τ correspond, dans le domaine de Laplace, à multiplier sa transformée de Laplace $F(s)$ par $e^{-s\tau}$.

4.4.5 Linéarité

La transformation de Laplace est un opérateur linéaire. En effet, si :

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$$

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

la définition (4.9) permet alors d'écrire :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad (4.9)$$

c_1 et c_2 sont des constantes réelles, vérifiant ainsi le principe de superposition (théorème d'additivité et d'homogénéité). Notons au passage que

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \int_0^\infty f_1(t)f_2(t)e^{-st} dt \neq F_1(s)F_2(s)$$

Vérifier cette dernière relation en choisissant par exemple $f_1(t) = f_2(t) = \epsilon(t)$.

4.4.6 Valeur finale (régime stationnaire)

Nous verrons plus loin comment calculer le signal $f(t)$ à partir de sa transformée de Laplace $F(s)$. En attendant, si la valeur en régime stationnaire de $f(t)$ existe, elle peut être évaluée à partir de $F(s)$ grâce au théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.10)$$

Cette relation peut être obtenue de Laplace de $d/dt f(t)$:

$$\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

En faisant tendre s vers 0, on obtient :

$$\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt = \int_0^\infty df(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

d'où l'on tire la relation (3.10).

La valeur en régime stationnaire de $f(t)$ existe, et donc la relation (4.10) est valable, si $sF(s)$, c'est-à-dire

lorsque les valeurs de s qui rendent $sF(s)$ infini, se trouvent dans la moitié gauche du plan complexe, axe imaginaire non compris. On vérifie ainsi que le théorème de la valeur finale s'applique à un saut échelon (pour lequel $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 1$) mais pas à un sinus (pour lequel $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ n'existe pas) ni à une exponentielle croissante (pour laquelle $\lim_{t \rightarrow \infty} = \infty$ alors que $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0$).

Vérifier que le théorème de la valeur finale s'applique à $y(t) = e^{-2t}$ mais pas à $y(t) = e^t$.

4.4.7 Valeur initiale (comportement initial)

De manière similaire, on peut calculer la valeur initiale de $f(t)$ à partir de $F(s)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (4.11)$$

Pour le démontrer, on utilise à nouveau la transformée de Laplace de $d/dt f(t)$ et on fait tendre s vers l'infini. Ainsi, d'une part, en faisant commuter la limite avec l'intégrale,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \left(\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) 0 dt = 0,$$

d'autre part, en utilisant la transformée de Laplace d'une valeur dérivée,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s) - f(0)) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0)$$

de telle sorte qu'en égalant les deux expressions, on obtienne

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0)$$

et ainsi la relation (4.11).

Il n'y a dans ce cas pas de condition sur la position des pôles de $sF(s)$. Cette relation est, par exemple, valable pour un sinus ou une exponentielle croissante.

4.4.8 Dérivation dans le domaine de Laplace

Soit $F(s)$ la transformée de Laplace du signal $f(t)$. Par définition, on a :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

et, en dérivant par rapport à s :

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}[t f(t)] \quad (4.12)$$

On établit facilement la règle générale :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (4.13)$$

4.4.9 Grammaire de la transformation de Laplace

L'ensemble des propriétés de la transformation de Laplace constitue la règle de grammaire à appliquer pour déterminer la transformée d'un signal temporel particulier. Elles sont regroupées dans le tableau qui suit :

n°	Signal temporel	Transformée de Laplace
I	$f(t)$	$F(s)$
II	$\sum_i k_i f_i(t)$	$\sum_i k_i F_i(s)$
III	$f(t/\lambda)$	$ \lambda F(\lambda s)$
IV	$e^{-\lambda t} f(t)$	$F(s + \lambda)$
V	$\epsilon(t - \tau) f(t - \tau)$	$e^{-s\tau} F(s)$
VI	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{d}{dt} f(0) - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0)$
VII	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
VIII	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
IX	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0^+} [sF(s)]$
X	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$

Les signaux temporels sont nuls pour $t < 0$. $\epsilon(t - \tau)$ représente le saut unité au temps $t = \tau$.

4.5 Exemples de transformée de Laplace

4.5.1 Echelon de durée finie

Déterminons la transformée de Laplace du signal représenté à la figure 4.7 :

Une première approche consiste à appliquer directement la définition (4.1).

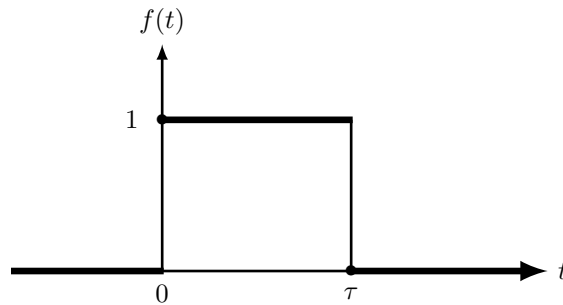


Figure 4.7. Impulsion de durée τ .

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\tau} 1e^{-st} dt + \int_{\tau}^{\infty} 0e^{-st} dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})$$

Une seconde approche, qui est appliquée de préférence chaque fois que cela est possible, consiste à décomposer le signal $f(t)$ en une combinaison de signaux dont les transformées de Laplace sont connues, en l'occurrence :

$$f(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t - \tau)$$

Et avec la linéarité de la transformation de Laplace :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\epsilon(t)] - \mathcal{L}[\epsilon(t - \tau)]$$

Et avec la propriété de translation temporelle :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\epsilon(t)] - e^{-s\tau} \mathcal{L}[\epsilon(t)] = (1 - e^{-s\tau}) \mathcal{L}[\epsilon(t)]$$

Finalement :

$$\mathcal{L}[f(t)] = (1 - e^{-s\tau}) \frac{1}{s}$$

4.5.2 Réponse exponentielle

Soit $f(t) = A[1 - e^{-\alpha t}]$ comme illustré à la figure 4.8, avec $\alpha > 0$.

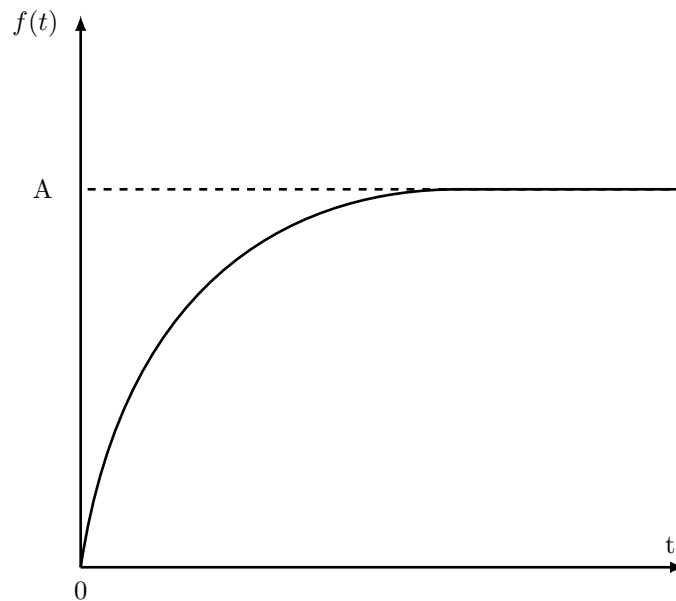


Figure 4.8. Réponse exponentielle.

- Déterminons $F(s)$ en utilisant le dictionnaire de la transformation de Laplace.
- Déterminons la valeur finale de $f(t)$

Solution

- Selon le dictionnaire de la section 4.3 :

$$F(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{s + \alpha} = \frac{A\alpha}{s(s + \alpha)}$$

- Valeur finale selon la grammaire de la section 4.4 :

Le pôle de $sF(s) = A\alpha/(s + \alpha)$ se trouve $s = -\alpha$ dans la moitié gauche du plan complexe. On peut donc

appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{A\alpha}{s + \alpha} \right] = A$$

4.5.3 Transformation de Laplace inverse

Quel est le signal dont la transformée de Laplace est

$$F(s) = \frac{1}{(s + a)^2} ?$$

Solution

Le dictionnaire nous donne :

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

et la grammaire :

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$$

Il s'ensuit que, pour $t \geq 0$:

$$\mathcal{L}[e^{-at}t] = \frac{1}{(s + a)^2}$$

4.6 Fonction de transfert

4.6.1 Définition

Un système dynamique lscr est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $g(t)$ ou, de manière équivalente, par la transformée de Laplace correspondante $G(s)$ qui est appelée la **fonction de transfert** du système :

$$G(s) := \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (4.14)$$

A partir de cette définition, on peut affirmer que la fonction de transfert est *indépendante* de l'entrée.

On démontre que la fonction de transfert d'un système lscr monovarié est le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée. Considérons à titre d'exemple le système dynamique donné par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (4.15)$$

avec les conditions initiales $y(0) = dy/dt(0) = 0$.

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (4.15), on a :

$$[s^2 + a_1 s + a_0]Y(s) = [b_1 s + b_0]U(s)$$

ou

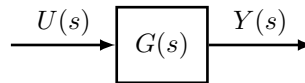


Figure 4.9. Représentation par fonction de transfert.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.16)$$

$G(s)$ lie ainsi la sortie à l'entrée d'un système lscr :

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (4.17)$$

La représentation par fonction de transfert est illustrée par le schéma fonctionnel de la figure 4.9.

4.6.2 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Le comportement dynamique d'un grand nombre de systèmes *linéaires* peut être représenté par :

- n équations différentielles du premier ordre (modèle d'état linéaire) ;
- une équation différentielle linéaire d'ordre n (modèle entrée-sortie).

Considérons le second cas :

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y \\ = b_mu^{(m)} + b_{m-1}u^{m-1} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u \end{aligned} \quad (4.18)$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (4.18), on obtient :

$$\begin{aligned} [Y(s)s^n - y_0s^{n-1} - y_0^{(1)}s^{n-2} - \dots - y_0^{(n-1)}] \\ + a_{n-1}[Y(s)s^{n-1} - y_0s^{n-2} - \dots - y_0^{(n-2)}] \\ + \dots + a_1[Y(s)s - y_0] + a_0Y(s) \\ = b_m[U(s)s^m - u_0s^{m-1} - u_0^{(1)}s^{m-2} - \dots - u_0^{(m-1)}] \\ + b_{m-1}[U(s)s^{m-1} - u_0s^{m-2} - u_0^{(1)}s^{m-3} - \dots - u_0^{(m-2)}] \\ + \dots + b_1[U(s)s - u_0] + b_0U(s) \end{aligned} \quad (4.19)$$

En regroupant dans les polynômes $Y_0(s)$ de degré $n-1$ et $U_0(s)$ de degré $m-1$ les termes faisant intervenir respectivement les conditions initiales de y et de u :

$$\begin{aligned} Y_0(s) &= y_0s^{n-1} + y_0^{(1)}s^{n-2} + \dots + y_0^{(n-1)} \\ &\quad + a_{n-1}[y_0s^{n-2} + y_0^{(1)}s^{n-3} + \dots + y_0^{(n-2)}] \\ &\quad + \dots + a_1y_0 \\ &= y_0s^{n-1} + [y_0^{(1)} + a_{n-1}y_0]s^{n-2} + \dots + [y_0^{(n-1)} + a_{n-1}y_0^{(n-2)} \\ &\quad + \dots + a_1y_0] \\ U_0(s) &= b_mu_0s^{m-1} + u_0^{(1)}s^{m-2} + \dots + u_0^{(m-1)} \\ &\quad + b_{m-1}[u_0s^{m-2} + u_0^{(1)}s^{m-3} + \dots + u_0^{(m-2)}] \\ &\quad + \dots + b_1u_0 \\ &= b_mu_0s^{m-1} + [b_mu_0^{(1)} + b_{m-1}u_0]s^{m-2} + \dots \\ &\quad + [b_mu_0^{(m-1)} + b_{m-1}u_0^{(m-2)} + \dots + b_1u_0] \end{aligned}$$

La relation (4.19) donne :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}U(s) \\ &\quad + \frac{Y_0(s) - U_0(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (4.20)$$

On constate que la sortie comporte deux termes bien distincts. Le premier dû à l'entrée, correspond à la **réponse forcée** du système ; le second, dû aux conditions initiales, correspond à sa **réponse libre**, ou réponse propre.

Pour se ramener à la définition de la fonction de transfert, il convient de considérer le système *au repos* ($Y_0(s) = U_0(s) = 0$) :

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s)$$

Le système est *causal* si les degrés m et n des polynômes numérateur et dénominateur respectent la condition $m \leq n$. Cette affirmation peut se justifier de façon intuitive en considérant le cas contraire, par exemple pour $m = 1$ et $n = 0$, ce qui correspond à l'équation différentielle

$$y(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t).$$

Ce système répondrait infiniment rapidement et avec une amplitude infinie à un saut échelon de l'entrée. Cette faculté de répondre infiniment rapidement à une variation finie de l'entrée n'est pas possible pour un processus physique. D'où la restriction de faisabilité physique $m \leq n$ qui correspond en fait à la condition de causalité.

Peut-on utiliser le même argument pour montrer qu'un système pour lequel $m = n = 1$ est physiquement réalisable ?

La fonction de transfert d'un système lscr représenté par une équation différentielle d'ordre n a donc la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad m \leq n \quad (4.21)$$

Les valeurs de la variable complexe s qui annulent le dénominateur de la fonction de transfert sont appelés les **pôles** du système ; quant aux valeurs qui annulent le numérateur, elles sont appelées **zéros**. L'**ordre** du système est le nombre de pôles, c'est-à-dire le degré du dénominateur. Ces concepts seront précisés au chapitre suivant. *On remarque que la fonction de transfert est une fonction rationnelle de la variable de Laplace s , c'est-à-dire un quotient de polynômes en s . Pourquoi a-t-on cette structure particulière ? Est-ce toujours le cas ?*

4.6.3 Systèmes multivariables

En appliquant la transformée de Laplace à la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

deux équations

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \quad (4.22)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (4.23)$$

sont obtenues où $X(s)$ et x_0 sont des vecteurs de dimension n , $U(s)$ un vecteur de dimension p et $Y(s)$ un vecteur de dimension q .

Pour des conditions initiales nulles ($x_0 = 0$), les équations (4.22) et (4.23) donnent

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s).$$

Ainsi, la matrice de fonctions de transfert s'écrit

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (4.24)$$

qui est une matrice de dimension $q \times p$ dans laquelle chaque élément $G_{ij}(s)$ représente une fonction de transfert correspondant à $Y_i(s)/U_j(s)$, c'est-à-dire une fonction de transfert entre l'entrée u_j et la sortie y_i .

4.6.4 Domaine temporel et domaine de Laplace

La transformation de Laplace et la notion de fonction de transfert sont des outils puissants qui permettent, entre autres, de déterminer la transformée de Laplace de la réponse d'un système lscr par une simple opération de multiplication, plutôt que par un produit de convolution fastidieux. Il est par exemple possible de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants par simple résolution d'une équation algébrique. Ces simplifications découlent de la transposition du problème du domaine temporel dans le domaine de Laplace (fig 4.6.4). Il faut néanmoins relever que, en règle générale, toute simplification d'un problème à un niveau donné de sa résolution se répercute par une complication à une autre étape. Il s'agit, dans ce cas-ci, de trouver le signal $y(t)$ qui correspond à la transformée de Laplace $Y(s)$. Cette opération, connue sous le nom de **transformation de Laplace inverse**, est notée :

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

La voie de résolution choisie est adéquate uniquement si la complication résultante est moindre que celle présente à l'origine.

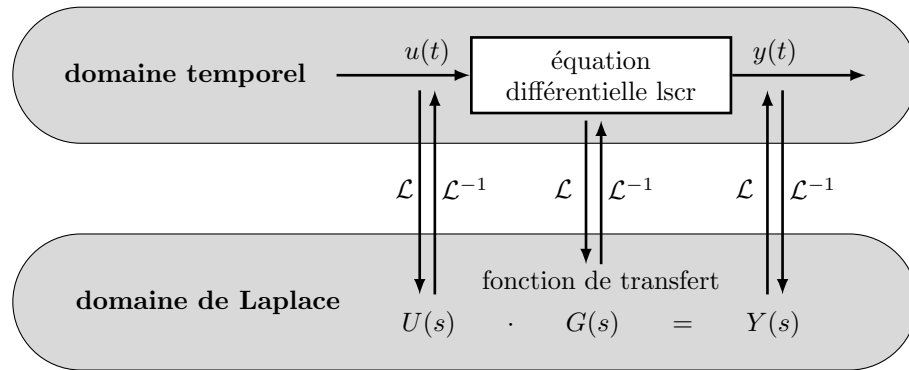


Figure 4.10. Correspondance entre le domaine temporel et le domaine de Laplace.

4.7 Transformation de Laplace inverse

4.7.1 Introduction

On calcul la sortie d'un système dynamique lscr excité par une entrée connue comme suit :

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

C'est la transformation de Laplace inverse appliquée à $Y(s)$ qui permettra d'obtenir la réponse temporelle $y(t)$. L'idée de base pour réaliser la transformation inverse consiste, dans le domaine de Laplace, à décomposer $Y(s)$ en une combinaison linéaire de termes dont les images dans le domaine temporel sont connues, par exemple les signaux donnés dans le dictionnaire. La transformation de Laplace étant un opérateur linéaire satisfaisant au principe de superposition, le signal $y(t)$ sera donc la combinaison linéaire des images obtenues.

4.7.2 Éléments simples

La transformation de Laplace de la sortie d'un système est une fraction rationnelle dont le dénominateur contient des termes qui proviennent de l'équation différentielle et de l'entrée. On peut développer cette fraction rationnelle en une somme pondérée d'**éléments simples** comme suit :

$$Y(s) = \frac{d_q s^q + d_{q-1} s^{q-1} + \dots + d_0}{s^p + c_{p-1} s^{p-1} + \dots + c_0} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_p}{s - s_p}$$

où s_i ($i = 1, \dots, p$) sont les valeurs de s qui annulent le dénominateur de $Y(s)$. Les facteurs constants A_i ($i = 1, \dots, p$) sont appelés **résidus**.

Pour des raisons de causalité, le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur ($q \leq p$). Un terme constant A apparaît dans la décomposition en éléments simples si $q = p$. Le terme constant est obtenu par division des deux polynômes. Par conséquent, dans le cas général, la fraction rationnelle s'écrit :

$$Y(s) = A + \frac{N(s)}{D(s)}$$

où le degré du polynôme $N(s)$ est strictement inférieur à celui du polynôme $D(s)$. On se restreindra donc par la suite à la décomposition de $N(s)/D(s)$.

Pour un système physique réel, les coefficients c_{p-1}, \dots, c_0 du dénominateur sont réels. Les racines sont par conséquent des nombres réels ou des paires de nombres conjugués complexes. Il s'ensuit qu'à toute racine complexe $s_i = a_i + jb_i$ correspond la racine $s_{i+1} = a_i - jb_i$.

Pour déterminer les résidus, il est possible soit de *réduire au même dénominateur* les éléments simples puis d'identifier les coefficients de même puissance avec ceux de la fonction de transfert, soit de faire appel à une méthode générale de calcul appelée *méthode des résidus*.

4.7.3 Décomposition en éléments simples par réduction au même dénominateur

Cette méthode, utilisable dans les cas simple, est illustrée sur la base d'un exemple. Soit le système au repos caractérisé par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+6)}$$

et excité par l'entrée $u(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$, dont la transformée de Laplace est :

$$U(s) = \frac{1}{s+2}$$

La transformée de Laplace de la réponse devient :

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+6)(s+2)} \quad (4.25)$$

On choisit de décomposer cette fraction rationnelle en trois éléments simples pondérés par les coefficients réel A, B et C qui sont les résidus à déterminer :

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+6} + \frac{C}{s+2} \quad (4.26)$$

Après réduction au même dénominateur des fractions de la relation (4.26), une comparaison avec (4.25) donne :

$$2(s+3) = A(s+6)(s+2) + B(s+1)(s+2) + C(s+1)(s+6)$$

L'identification membre à membre des coefficients de même puissance de s donne :

$$\begin{array}{lll} s^2 : 0 = A + B + C & \text{ce qui donne :} & A = 0,8 \\ s^1 : 2 = 8A + 3B + 7C & & B = -0,3 \\ s^0 : 6 = 12A + 2B + 6C & & C = -0,5 \end{array}$$

La transformation de Laplace inverse donne alors comme signal de sortie :

$$y(t) = 0,8e^{-t} - 0,3e^{-6t} - 0,5e^{-2t} \quad t \geq 0$$

4.7.4 Décomposition en éléments simples par la méthode des résidus

L'équation (4.26) est valable pour tout s . On peut donc multiplier cette équation par l'un des facteurs et faire tendre s vers la valeur qui annule ce facteur. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+6)} \right] = 0,8 \\ B &= \lim_{s \rightarrow -6} (s+6)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -6} \left[\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+1)} \right] = -0,3 \\ C &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{2(s+3)}{(s+6)(s+1)} \right] = -0,5 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$Y(s) = \frac{0,8}{s+1} - \frac{0,3}{s+6} - \frac{0,5}{s+2}$$

La transformation de Laplace inverse donne alors :

$$y(t) = 0,8e^{-t} - 0,3e^{-6t} - 0,5e^{-2t} \quad t \geq 0$$

4.7.5 Cas particuliers

Racines complexes

Soit :

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+5)}$$

Déterminons $y(t)$, la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$.

Soution

Le dénominateur de $Y(s)$ possède des racines complexes. Deux décompositions en éléments sont possibles, la deuxième étant plus facile à manipuler car elle ne fait pas intervenir de termes complexes :

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2+j)(s+2-j)} = \frac{A}{s} + \frac{C+Dj}{s+2+j} + \frac{C-Dj}{s+2-j}$$

et :

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Es+F}{s^2+4s+5}$$

Déterminons A, E et F pour la deuxième décomposition (en réduisant au même dénominateur) :

$$(s+1) = A(s^2+4s+5) + (Es+F)s$$

d'où :

$$\begin{array}{lll} s^2 : 0 = A + E & \text{ce qui donne :} & A = 0,2 \\ s^1 : 1 = 4A + F & & E = -0,2 \\ s^0 : 1 = 5A & & F = 0,2 \end{array}$$

Ainsi :

$$Y(s) = \frac{0,2}{s} + \frac{-0,2s+0,2}{s^2+4s+5} = \frac{0,2}{s} + \frac{-0,2(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{0,6}{(s+2)^2+1}$$

La transformation de Laplace inverse donne alors :

$$y(t) = 0,2 - 0,2e^{-2t} \cos t + 0,6e^{-2t} \sin t \quad t \geq 0$$

Racines doubles

Un système dynamique est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + 7\ddot{y} + 16\dot{y} + 12y = \dot{u} + u \quad (4.27)$$

avec les conditions initiales :

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = u(0) = 0 \quad (4.28)$$

Sachant que $u(t)$ correspond à une impulsion de Dirac au temps $t = 0$, calculons $y(t)$.

Solution

En appliquant la transformation de Laplace à (4.27) et en utilisant (4.28), on obtient :

$$Y(s)[s^3 + 7s^2 + 16s + 12] = U(s)[s + 1]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12} = \frac{s + 1}{(s + 2)^2(s + 3)}$$

Pour $U(s) = 1$ (impulsion de Dirac) :

$$Y(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)^2(s + 3)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{(s + 2)^2} + \frac{C}{s + 3} \quad (4.29)$$

Notons que la décomposition en éléments simple correspondant au terme $1/(s + 2)^2$ peut s'écrire ainsi :

$$\frac{A's + B'}{(s + 2)^2} = \frac{A'(s + 2) + (B' - 2A')}{(s + 2)^2} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{(s + 2)^2}$$

Déterminons A, B et C par la méthode des résidus. L'équation (4.29) permet d'écrire :

$$(s + 2)^2 Y(s) = \frac{s + 1}{s + 3} = A(s + 2) + B + \frac{C(s + 2)^2}{s + 3} \quad (4.30)$$

et en dérivant (4.30) par rapport à s :

$$\frac{d}{ds}[(s + 2)^2 Y(s)] = \frac{2}{(s + 3)^2} = A + (s + 2)Q(s)$$

où $Q(s)$ est un polynôme en s . On calcule A, B et C comme suit :

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds}[(s + 2)^2 Y(s)] \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2}{(s + 3)^2} = 2$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s + 1}{(s + 3)^2} = -1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -3} (s + 3)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s + 1}{(s + 2)^2} = -2$$

Finalement on obtient :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s + 2} - \frac{1}{(s + 2)^2} - \frac{2}{s + 3} \right] = 2e^{-2t} - te^{-2t} - 2e^{-3t} \quad t \geq 0$$

Terme constant

$$\text{Soit : } Y(s) = \frac{s(s + 3)}{(s + 1)^2}$$

Déterminons $y(t)$.

Solution

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s}{s^2 + 2s + 1} = 1 + \frac{s-1}{(s+1)^2} = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

Déterminons A et B en réduisant au même dénominateur :

$$s - 1 = A(s + 1) + B$$

d'où :

$$\begin{aligned} s^1 : A &= 1 \\ s^0 : -1 &= A + B \quad B = -2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$Y(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

La transformation de Laplace inverse donne alors :

$$y(t) = \delta(t) + e^{-t} - 2te^{-t} \quad t \geq 0$$

Système non linéaire

Un système dynamique est donné par l'équation différentielle

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3 = u \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad (4.31)$$

Calculons la fonction de transfert correspondante.

Solution

L'équation différentielle est *non linéaire* car le principe de superposition ne s'applique pas. En effet :

$$\begin{aligned} u_1 \rightarrow y_1 : \quad \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 3 &= u_1 \\ u_2 \rightarrow y_2 : \quad \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 3 &= u_2 \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 \rightarrow y_1 + y_2 : \quad (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + 2(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 6 = (u_1 + u_2)$$

On voit donc que le terme 3 dans l'équation dynamique gêne. Comme le concept de fonction de transfert ne s'applique qu'aux systèmes lscr, il convient de calculer d'abord une approximation linéaire à l'équation dynamique. Dans ce cas-ci, on peut le faire très simplement en définissant une nouvelle entrée $\tilde{u}(t) = u(t) - 3$, ce qui donne le système dynamique *linéaire* suivant :

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = \tilde{u} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Bien que, dans le cas présent, le système dynamique soit linéaire, la représentation (4.31) est non linéaire (elle est en fait affine) suite à un mauvais choix du point de référence pour $u(t)$. Le fait de travailler en variables écart permet d'éviter ce genre de problème.

La fonction de transfert est alors :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+2)}$$

4.8 Exercices résolus

Exercice 1

Soit le système dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 & x_2(0) &= 0\end{aligned}$$

Calculer la fonction de transfert $X_2(s)/U(s)$ correspondant aux point de fonctionnement

a) $\bar{u} = 1$

b) $\bar{u} = 2$

Solution

La fonction de transfert est la même pour $\bar{u} = 1$ et $\bar{u} = 2$ car le système est *linéaire*.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \quad &\rightarrow \quad \begin{aligned} X_1(s)[s+1] &= X_2(s) + U(s) \\ X_2(s)[s+2] &= X_1(s) \\ X_2(s)[s+2][s+1] &= X_2(s) + U(s) \end{aligned} \\ &\rightarrow \quad \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}\end{aligned}$$

Exercice 2

Calculer la réponse du système dynamique suivant à une impulsion de Dirac :

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = 2u(t) \quad y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Solution

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \quad &\rightarrow \quad \begin{aligned} [s^2 Y(s) + s] + 2[sY(s) + 1] &= 2U(s) \\ Y(s) &= \frac{2}{s(s+2)}U(s) - \frac{(s+2)}{s(s+2)} \\ &= \frac{2}{s(s+2)}U(s) - \frac{1}{s} \end{aligned}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \text{réponse forcée} & \text{réponse libre} \\ \text{Pour } U(s) = 1 \rightarrow & Y(s) = \frac{2}{s(s+2)} - \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} - \frac{1}{s} \end{array}$$

Méthode des résidus pour calculer A et B

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s+2} = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2}{s} = -1$$

On obtient ainsi : $Y(s) = -\frac{1}{s+2}$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad \rightarrow \quad y(t) = -e^{-2t} \quad t \geq 0$$

Exercice 3

a) Calculer la transformée de Laplace de :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-(t-1)/4} & t \geq 1 \end{cases}$$

b) Calculer la transformée de Laplace inverse de :

$$1) Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$2) Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4s + 5}$$

Solution

$$\text{a) } y(t) = e^{-(t-1)/4} \quad t \geq 1 \quad \mathcal{L} \quad Y(s) = \frac{e^{-s}}{s + \frac{1}{4}} = \frac{4e^{-s}}{4s + 1}$$

$$\text{b1) } Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 2te^{-t} \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{b2) } Y(s) &= \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4s + 5} = e^{-2s} Y_1(s) \\ Y_1(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_1(t) = e^{-2t} \sin t \quad t \geq 0 \\ \implies y(t) &= y_1(t-2) = e^{-2(t-2)} \sin(t-2) \quad t \geq 2 \end{aligned}$$

Exercice 4

La modélisation d'un système dynamique a donné l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) + 2y(t) - 3 = u(t) \quad y(0) = 1$$

Evaluer la fonction de transfert correspondante.

Solution

Système non linéaire à cause du terme constant -3. Introduisons :

$$\tilde{u} = u + 3 \quad \rightarrow \quad \dot{y} + 2y = \tilde{u} \quad y(0) = 1$$

Fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Exercice 5

Soit le système dynamique avec l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2u(t) - x(t)u(t) \quad x(0) = 1$$

$$y(t) = x(t-2)$$

- Ce système est-il linéaire, stationnaire, causal et initialement au repos ?
- Evaluer la fonction de transfert $Y(s)/U(s)$ pour le point de fonctionnement correspondant à $\bar{u} = 1$.

Solution

- Le système est non linéaire à cause du terme xu , stationnaire car les coefficients sont constants, causal car $y(t)$ ne dépend pas des entrées futures, mais il n'est pas initialement au repos car $x(0) = 1$.
- A l'état stationnaire pour $\bar{u} = 1$:

$$0 = -\bar{x} + 2 - \bar{x} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = 1$$

Linéarisation de xu :

$$xu \simeq \bar{x}\bar{u} + \bar{u}\delta x + \bar{x}\delta u = 1 + \delta x + \delta u$$

Système linéarisé (en variables écart) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 2u(t) - x(t) - u(t) = -2x(t) + u(t) & x(0) = 0 \\ y(t) = x(t-2) \end{cases}$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \begin{aligned} \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s+2} \\ \frac{Y(s)}{X(s)} &= e^{-2s} \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{e^{-2s}}{s+2} \end{aligned}$$

Exercice 6 Soit le système dynamique

$$G(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + s}$$

- a) Calculer sa réponse indicielle
- b) Esquisser les réponses indicielles pour $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$

Solution

a)

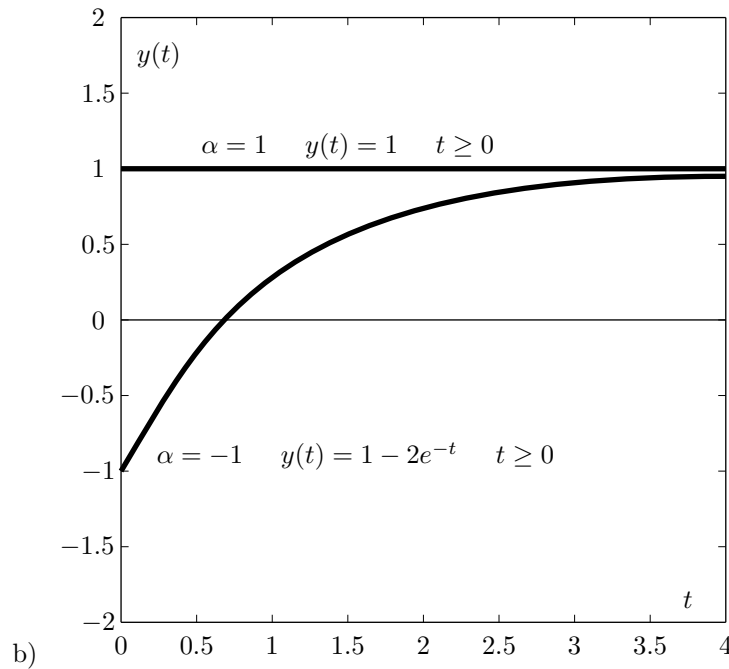
$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + s} \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + s} = \frac{1}{s} + \frac{\alpha - 1}{s + 1}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + \alpha s}{1 + s} = 1$$

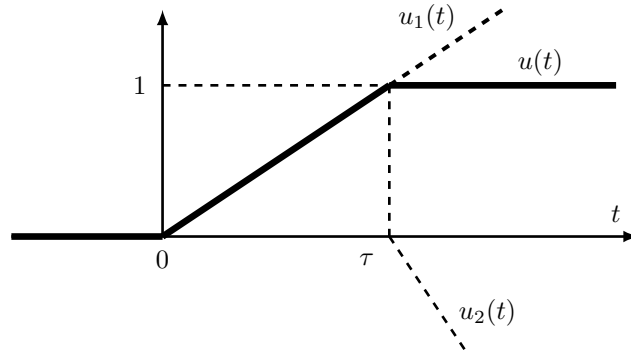
$$B = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1 + \alpha s}{s} = \alpha - 1$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow y(t) = 1 + (\alpha - 1)e^{-t} \quad t \geq 0$$



Exercice 7

- a) Calculer la transformée de Laplace du signal temporel $u(t)$ représenté par les figures suivantes.



b) Evaluer le signal temporel dont la transformée de Laplace vaut :

$$Y(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Solution

a)

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau}t & t \geq 0 \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ -\frac{1}{\tau}(t - \tau) & t \geq \tau \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{1}{\tau s^2} - \frac{1}{\tau s^2} e^{-\tau s} = \frac{1}{\tau s^2} [1 - e^{-\tau s}]$$

b)

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{4s + 10}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{4s + 10}{s + 2} = 6$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{4s + 10}{s + 1} = -2$$

$$\mathcal{L} \rightarrow y(t) = \delta(t) + 6e^{-t} - 2e^{-2t} \quad t \geq 0$$

Exercice 8

Calculer la réponse indicielle du système dynamique suivant :

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 5u \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Solution

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$5 = A(s^2 + 2s + 5) + (Bs + C)s$$

$$s^2 : 0 = A + B \quad A = 1$$

$$s^1 : 0 = 2A + C \quad \rightarrow \quad B = -1$$

$$s^0 : 5 = 5A \quad C = -2$$

$$\frac{s+2}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \quad t \geq 0$$

Exercice 9

Soit $Y(s) = (s+12)/(s^2+4s)$ la transformée de Laplace de la réponse indicielle d'un système dynamique.

- a) Calculer $y(t)$
 b) Evaluer la *valeur finale* de la réponse du système à l'entrée $u(t) = 1 - e^{-2t}$.

Solution

a)

$$Y(s) = \frac{s+12}{s^2+4s} = \frac{s+12}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{12}{4} = 3$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4)Y(s) = \frac{-4+12}{-4} = -2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s} - \frac{2}{s+4} \right] = 3 - 2e^{-4t} \quad t \geq 0$$

b)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{s+12}{s(s+4)}}{\frac{1}{s}} = \frac{s+12}{s+4}$$

Pour $u(t) = 1 - e^{-2t}$, $U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$

donc $Y(s) = \left(\frac{s+12}{s+4} \right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) = \frac{s+12}{s(s+4)} - \frac{s+12}{(s+4)(s+2)}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+12}{s+4} = 3$$

Exercice 10

Soit le système décrit par l'équation dynamique :

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \text{ avec } y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0 \text{ et l'entrée } u(t) = e^{2t}$$

Déterminer la réponse temporelle libre de ce système.

Solution

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$$

$$y(t) \rightarrow Y(s)$$

$$\dot{y}(t) \rightarrow sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\ddot{y}(t) \rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - s$$

Ainsi :

$$s^2Y(s) - s - 2sY(s) + 2 + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)(s-1)^2 - (s-2) = U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-1)^2} U(s)} + \underbrace{\frac{s-2}{(s-1)^2}}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow y_f(t) = \text{réponse forcée} \quad y_l(t) = \text{réponse libre}$$

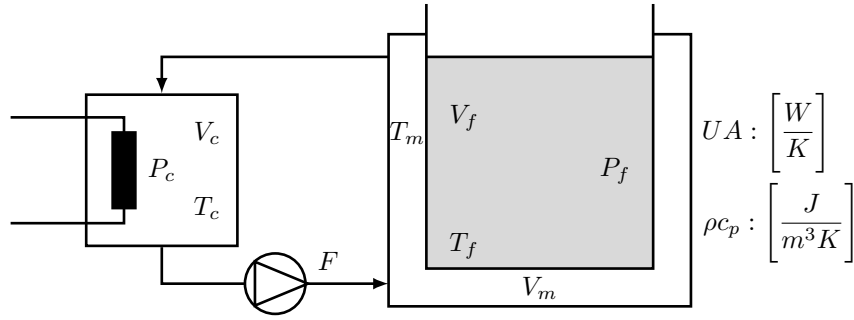
Calcul de la réponse libre $y_l(t)$:

$$\begin{aligned} y_l(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s-2}{(s-1)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{(s-1)} \right] \\ &= \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} \right] \\ y_l(t) &= e^t \epsilon(t) - t e^t = \epsilon(t) e^t [1 - t] \end{aligned}$$

Exercie 11

On considère le transfert d'énergie d'une source chaude (cuve de volume constant V_c , température T_c , puissance de chauffe P_c) vers un puit froid (réacteur endothermique de volume constant V_f , température T_f , puissance consommée $P_f < 0$). Le transfert a lieu par l'intermédiaire d'un manteau de chauffe (volume constant V_m , température homogène T_m , coefficient de transfert UA entre T_m et T_f).

Le liquide caloporteur circule à l'aide d'une pompe avec un débit volumique F . Les capacités calorifiques du caloporteur et du mélange réactionnel sont identiques et égales à ρc_p . On suppose que le système est bien isolé et qu'il n'y pas de perte thermique vers l'extérieur.



- Ecrire un modèle dynamique pour ce système.
- Sachant que F est constant et que V_m et V_c peuvent être négligés par rapport à V_f ($V_m, V_c \rightarrow 0$), déterminer la fonction de transfert $T_f(s)/P_c(s)$.

Solution

- Bilans thermiques

$$\rho c_p V_f \frac{dT_f}{dt} = UA(T_m - T_f) + P_f \quad T_f(0) = T_{f0} \quad (1)$$

$$\rho c_p V_m \frac{dT_m}{dt} = \rho c_p F(T_c - T_m) - UA(T_m - T_f) \quad T_m(0) = T_{m0} \quad (2)$$

$$\rho c_p V_c \frac{dT_c}{dt} = \rho c_p F(T_m - T_c) + P_c \quad T_c(0) = T_{c0} \quad (3)$$

- Hypothèse : $V_m = V_c = 0$

$$(2) \rightarrow 0 = \rho c_p F(T_c - T_m) - UA(T_m - T_f)$$

$$(3) \rightarrow 0 = \rho c_p F(T_m - T_c) + P_c$$

$$\rightarrow UA(T_m - T_f) = \rho c_p F(T_c - T_m) = P_c \quad (4)$$

$$(1) + (4) \rightarrow \rho c_p V_f \frac{dT_f}{dt} = P_c + P_f \quad (5)$$

$$\mathcal{L} : \rho c_p V_f s T_f(s) = P_c(s) + P_f(s)$$

Fonction de transfert

$$\frac{T_f(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{\rho c_p V_f s}$$

Exercice 12

Le système dynamique

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = -2$$

est soumis à l'entrée $u(t) = e^{-2t}, t \geq 0$. Calculer sa réponse libre et sa réponse forcée.

Solution

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = -2$$

$$u(t) = e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L} \rightarrow [s^2 Y(s) - s + 2] + 2[sY(s) - 1] + Y(s) = 2U(s)$$

$$Y(s)[s^2 + 2s + 1] = 2U(s) + s$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2} U(s) + \frac{s}{(s+1)^2}$$

Réponse libre pour $U(s) = 0$

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = e^{-t} - te^{-t} \quad t \geq 0$$

Réponse forcée pour $U(s) = 1/(s+2)$

$$y(t) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s+2} \right) = \lim_{s \rightarrow -1} \left(-\frac{2}{(s+2)^2} \right) = -2$$

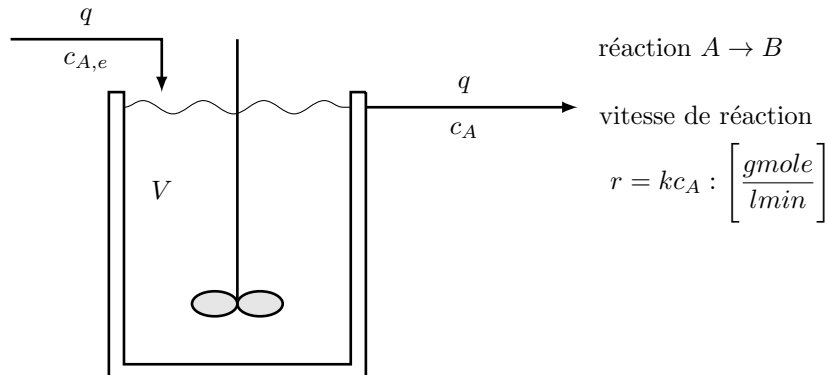
$$B = \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{2}{s+2} \right) = 2$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2}{(s+1)^2} = 2$$

$$y(t) = -2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-2t} \quad t \geq 0$$

Exercice 13

Soit le réacteur chimique continu suivant :



A l'état stationnaire, $\bar{q} = 0,05(m^3/min)$, $\bar{c}_{Ae} = 2(mole/l)$ et $\bar{c}_A = 1,33(mole/l)$

- Calculer la fonction de transfert $C_A(s)/C_{Ae}(s)$ sachant que $V = 0,1m^3$.
- Indiquer les suppositions nécessaires à l'obtention du modèle.

Solution

- Modèle dynamique

$$V \frac{dc_A}{dt} = q(c_{A,e} - c_A) - Vkc_A \quad c_A(0) = c_{A0} \quad (1)$$

A l'état stationnaire :

$$0 = \bar{q}(\bar{c}_{A,e} - \bar{c}_A) - V\bar{k}\bar{c}_A \quad (2)$$

d'où l'on tire :

$$k = \frac{\bar{q}[\bar{c}_{A,e} - \bar{c}_A]}{V\bar{c}_A} = 0,25min^{-1}$$

En utilisant la transformation de Laplace et en considérant des conditions initiales nulles :

$$VsC_A(s) = q[C_{A,e}(s) - C_A(s)] - Vkc_A(s)$$

$$\frac{C_A(s)}{C_{A,e}(s)} = \frac{q}{sV + (q + Vk)} = \frac{\frac{q}{q + Vk}}{\frac{V}{q + Vk}s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

avec

$$K = \frac{q}{q + Vk}, \quad \tau = \frac{V}{q + Vk}$$

- Suppositions

- Pertes thermiques négligeables
- Zone homogène (réacteur bien mélangé)

Exercice 14

La réaction catalytique $2A \rightarrow B$ a lieu dans un réacteur agité isotherme à marche continue. La modélisation du réacteur a donné les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{dt} &= \frac{1}{\tau}(c_{Ae} - c_A) - 2k_1c_A^2 & c_A(0) &= \bar{c}_A \\ \frac{dc_B}{dt} &= -\frac{1}{\tau}c_B + k_1c_A^2 & c_B(0) &= \bar{c}_B \end{aligned}$$

où τ représente le temps de séjour constant, c_A et c_B les concentrations de A et B , c_{Ae} la concentration d'alimentation de A , \bar{c}_A et \bar{c}_B les concentrations de A et B au point de fonctionnement stationnaire et k_1 la constante cinétique. Déterminer la fonction de transfert $C_B(s)/C_{Ae}(s)$.

Solution

Système dynamique non linéaire à cause du terme c_A^2 . On peut linéariser ce terme non linéaire autour du point de fonctionnement stationnaire \bar{c}_A :

$$c_A^2 \simeq \bar{c}_A^2 + 2\bar{c}_A(c_A - \bar{c}_A)$$

Le système dynamique devient ainsi (en variables écarts autour de \bar{c}_A et \bar{c}_B) :

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{dt} &= \frac{1}{\tau}(c_{Ae} - c_A) - 4k_1\bar{c}_Ac_A & c_A(0) &= 0 \\ \frac{dc_B}{dt} &= -\frac{1}{\tau}c_B + 2k_1\bar{c}_Ac_A & c_B(0) &= 0 \end{aligned}$$

La transformation de Laplace donne :

$$C_A(s) \left[s + \frac{1}{\tau} + 4k_1 \bar{c}_A \right] = \frac{1}{\tau} C_{Ae}(s) \rightarrow \frac{C_A(s)}{C_{Ae}(s)} = \frac{\frac{1}{1 + 4k_1 \tau \bar{c}_A}}{\frac{\tau}{1 + 4k_1 \tau \bar{c}_A} s + 1}$$

$$C_B(s) \left[s + \frac{1}{\tau} \right] = 2k_1 \bar{c}_A C_A(s) \rightarrow \frac{C_B(s)}{C_A(s)} = \frac{2k_1 \tau \bar{c}_A}{\tau s + 1}$$

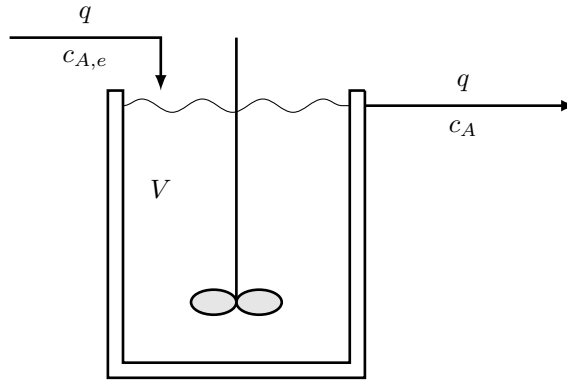
$$\frac{C_B(s)}{C_{Ae}(s)} = \frac{C_B(s)}{C_A(s)} \frac{C_A(s)}{C_{Ae}(s)} = \frac{\frac{2k_1 \tau \bar{c}_A}{1 + 4k_1 \tau \bar{c}_A}}{(\tau s + 1) \left(\frac{\tau}{1 + 4k_1 \tau \bar{c}_A} s + 1 \right)}$$

Exercice 15

Le système de deux réservoirs cylindriques de section A_1 et A_2 placés en cascade est présenté sur le schéma. Les débits q_1 et q_2 sont proportionnels aux niveaux de liquide h_1 et h_2 dans les réservoirs, c'est-à-dire :

$$q_1 = k_1 h_1 \quad \text{et} \quad q_2 = k_2 h_2$$

Le débit de recyclage q_r est ajusté par la pompe P et peut ainsi être considéré comme une variable indépendante ;



q_0 est un débit d'entrée.

- Ecrire les équations dynamiques pour ce système.
- Déterminer les fonctions de transfert

$$\frac{H_1(s)}{Q_0(s)}, \frac{H_1(s)}{Q_r(s)}, \frac{H_2(s)}{Q_0(s)}, \frac{H_2(s)}{Q_r(s)}$$

- Est-ce que le débit q_r influence le niveau h_2 en régime stationnaire ?

Solution

- Modèle dynamique

Bilan massique pour le réservoir 1 :

$$\frac{d}{dt}(\rho A_1 h_1) = \rho q_r + \rho q_0 - \rho k_1 h_1 \quad h_1(0) = h_{10} \quad (1)$$

Bilan massique pour le réservoir 2 :

$$\frac{d}{dt}(\rho A_2 h_2) = \rho k_1 h_1 - \rho k_2 h_2 - \rho q_r \quad h_2(0) = h_{20} \quad (2)$$

Comme ρ est constant, on peut diviser (1) et (2) par ρ .

b) Fonctions de transfert

$$(1) \longrightarrow H_1(s)[sA_1 + k_1] = Q_r(s) + Q_0(s) \quad (3)$$

$$(2) \longrightarrow H_2(s)[sA_2 + k_2] = k_1 H_1(s) - Q_r(s) \quad (4)$$

$$(3) \longrightarrow \frac{H_1(s)}{Q_r(s)} = \frac{H_1(s)}{Q_r(s)} = \frac{1}{A_1 s + k_1} \quad (5)$$

L'équation (4) indique que $H_2(s)$ dépend de la variable dépendante $H_1(s)$ en plus de la variable indépendante $Q_r(s)$. Il faut donc exprimer $H_1(s)$ en fonction des variables indépendantes $Q_r(s)$ et $Q_0(s)$ à partir de (3) :

$$Q_0(s) \rightarrow H_2(s) \quad : \quad H_2(s)[sA_2 + k_2] = k_1 \frac{1}{A_1 s + k_1} Q_0(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_0(s)} = \frac{k_1}{(A_1 s + k_1)(A_2 s + k_2)}$$

$$Q_r(s) \rightarrow H_2(s) \quad : \quad H_2(s)[sA_2 + k_2] = k_1 \frac{1}{A_1 s + k_1} Q_r(s) - Q_r(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_r(s)} = -\frac{A_1 s}{(A_1 s + k_1)(A_2 s + k_2)}$$

c) Etat stationnaire

$$(1) \rightarrow 0 = \bar{q}_r + \bar{q}_0 - k_1 \bar{h}_1$$

$$(2) \rightarrow 0 = k_1 \bar{h}_1 - k_2 \bar{h}_2 - \bar{q}_r$$

En additionnant ces deux équations pour éliminer le terme $k_1 \bar{h}_1$ dans la deuxième, on obtient :

$$0 = \bar{q}_0 - k_2 \bar{h}_2$$

ce qui indique que \bar{h}_2 dépend de \bar{q}_0 mais pas de \bar{q}_r

Exercice 16

Un système dynamique est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = \frac{du}{dt} + u \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = u(0) = 0$$

a) Evaluer sa fonction de transfert.

b) Calculer la réponse du système à une impulsion de Dirac au temps $t = 1$.

Solution

a) La transformée de Laplace de l'équation différentielle :

$$Y(s)(s^2 + 4s + 4) = U(s)(s + 1) + (s + 4)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 4s + 4} = \frac{s + 1}{(s + 2)^2}$$

b) $u(t) = \delta(t - 1)$

$$U(s) = e^{-s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{(s + 1)e^{-s} + (s + 4)}{s^2 + 4s + 4} = Y_1(s)e^{-s} + Y_2(s)$$

réponse	réponse
forcée	libre

$$\bullet Y_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

Méthode des résidus :

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} [(s+2)^2 Y_1(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} 1 = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 Y_1(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+1) = -1$$

$$\bullet Y_2(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+4} = \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} [(s+2)^2 Y_2(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} 1 = 1$$

$$D = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 Y_2(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+4) = 2$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} \right] = \epsilon(t)[e^{-2t} - te^{-2t}]$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \right] = \epsilon(t)[e^{-2t} + 2te^{-2t}]$$

- Finalement on obtient

$$y(t) = \epsilon(t-1)[e^{-2(t-1)} - (t-1)e^{-2(t-1)}] + \epsilon(t)[e^{-2t} + 2te^{-2t}]$$

Exercice 17

Transformer le système dynamique

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t) \quad x(0) = 2$$

sous la forme d'un système dynamique avec des conditions initiales nulles.

Solution

La transformation de Laplace du système dynamique donne :

$$[sX(s) - 2] + 2X(s) = U(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} [U(s) + 2] = \frac{1}{s+2} [U(s) + 2\Delta(s)] \quad (1)$$

où $\Delta(s) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

La transformation de Laplace inverse de (1) donne :

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t) + 2\delta(t) \quad x(0) = 0$$

On voit ainsi que, pour un système dynamique linéaire, des conditions initiales différentes de zéro correspondent à l'application d'une impulsion de Dirac au temps initial.

4.9 Symboles utilisés

$D(s)$	polynôme dénominateur
$f(t)$	signal temporel
$F(s)$	transformée de Laplace de $f(t)$
$g(t)$	réponse impulsionnelle

$G(s)$	fonction de transfert	
Im	axe imaginaire du plan complexe	
j	$\sqrt{-1}$	
$\mathcal{L}[\cdot]$	transformée de Laplace	
$\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$	transformée de Laplace inverse	
$N(s)$	polynôme numérateur	
Re	axe réel du plan complexe	
s	variable complexe de Laplace ($s = a + bj$)	
t	temps	[s]
$u(t)$	entrée du système	
$y(t)$	sortie du système	
$\delta(t)$	impulsion de Dirac au temps $t = 0$	
$\epsilon(t)$	saut unité au temps $t = 0$	
λ	translation fréquentielle	
ρ	impulsion rectangulaire au temps $t = 0$	
τ	translation temporelle	[s]

Analyse temporelle

5.1 définitions préliminaires

5.1.1 Introduction

Nous avons vu précédemment que les réponses temporelles de systèmes linéaires sont obtenues par combinaison de termes issus d'une décomposition en éléments simples. Ces éléments sont d'ordre un ou deux, suivant que les racines du dénominateur sont réelles ou conjuguées complexes. Les réponses types des systèmes d'ordre un ou deux constituent par conséquent les « briques » de base qui, combinées et pondérées par les résidus des éléments simples correspondants, permettent de calculer les réponses d'un système d'ordre quelconque.

La réponse indicielle $\gamma(t)$ sera étudiée en priorité dans ce chapitre, sachant que la réponse impulsionnelle $g(t)$ est obtenue par simple dérivation : $g(t) = \dot{\gamma}(t)$.

5.1.2 Gain statique, pôles et zéros, équation caractéristique

Soit un système dynamique dont la fonction de transfert $G(s)$ est donnée sous la forme d'un quotient de deux polynômes en s :

$$G(s) := \mathcal{L}[g(t)] = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Le **gain statique** K est défini comme la valeur de $G(s)$ pour $s = 0$:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Pour un système stable (système dont tous les pôles ont une partie réelle négative), le gain statique est le rapport entre l'amplitude de la réponse et l'amplitude de l'excitation après disparition des phénomènes transitoires, c'est à dire en régime stationnaire :

$$K = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)} \quad (5.1)$$

On peut le montrer en considérant un saut d'amplitude A comme excitation, c'est à dire $U(s) = A/s$, et en appliquant le théorème de la valeur finale pour calculer la valeur stationnaire de la sortie y :

$$K = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)}{A} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{A}{s}}{A} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (5.2)$$

Il est parfois utile de définir d'autres gains statiques :

$$\text{Gain en vitesse :} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$\text{Gain en accélération :} \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

- Les **pôles** de $G(s)$ sont les n valeurs de s qui annulent le dénominateur de $G(s)$. Ces valeurs sont notées $p_i, i = 1, \dots, n$.

Les **zéros** de $G(s)$ sont les m valeurs de s qui annulent le numérateur de $G(s)$.

Ces valeurs sont notées $z_j, j = 1, \dots, m$.

Les pôles et les zéros peuvent être réels ou complexes. S'ils sont complexes, ils apparaissent en paires conjuguées.

- **L'équation caractéristique** de $G(s)$ est :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

5.1.3 Ordre d'un système

Il y a plusieurs manières équivalents de définir l'**ordre** d'un système :

- L'ordre d'un système est le nombre minimum d'équations différentielles temporelles du premier ordre nécessaires pour décrire le comportement du système ; une équation d'ordre n peut se réduire sous la forme de n équations du premier ordre. De façon équivalente, l'ordre d'un système est le nombre de variables d'état (variables dépendantes) nécessaires pour décrire la dynamique du système.
- L'ordre d'un système est le degré du polynôme en s du dénominateur de la fonction de transfert décrivant ce système après, le cas échéant, élimination des facteurs communs au numérateur et au dénominateur. De la façon équivalente, l'ordre d'un système correspond au nombre de pôles de la fonction de transfert.

Exemples

- a) Soit un système décrit par l'équation de mouvement de Newton :

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \sum_i F_i(t)$$

Il s'agit d'un système du deuxième ordre car il est caractérisé par une deuxième dérivée par rapport à t .

- b) Soient les fonctions de transfert $G_1(s) = 1/(s^3 + 2s)$ et $G_2(s) = s/(s^3 + 2s)$. $G_1(s)$ est d'ordre 3 alors que $G_2(s)$ est d'ordre 2 car on peut simplifier le numérateur et les dénominateur par s .

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = 2\dot{u} + u \quad x(0) = \dot{x}(0) = u(0) = 0$$

Ce système dynamique est d'ordre deux. En effet, comme $u(t)$ représente l'*entrée* du système, le terme $\dot{u}(t)$ ne fait pas intervenir de variable d'état. On le remarque également en calculant la fonction de transfert :

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 3}$$

5.2 Étude d'un système simple : salle chauffée

Soit une salle chauffée par un radiateur qui dispense une puissance de chauffage $P(t)$. A l'intérieur règne une température $T(t)$, l'extérieur se trouvant à la température $T_{ext}(t)$ comme indiqué à la figure 5.1. Le but est d'étudier le comportement de $T(t)$ en fonction des variations de $P(t)$ et de $T_{ext}(t)$.

5.2.1 Variables écart

Pour l'analyse de systèmes dynamiques, on travaille le plus souvent avec des **variables écart** définies par rapport à un état stationnaire de référence. Ceci est dû au fait que, d'une part, les modèles linéarisés ne sont

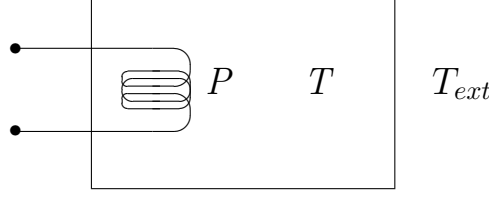


Figure 5.1. Schéma d'une salle chauffée

valable que dans le voisinage du point stationnaire de référence et, d'autre part, les variables écart possèdent la valeur zéro au point de référence, ce qui est utile pour définir des conditions initiales nulles. Dans notre exemple, nous définissons les variables écart suivantes :

$$\delta T(t) := T(t) - \bar{T}$$

$$\delta P(t) := P(t) - \bar{P}$$

$$\delta T_{ext}(t) := T_{ext}(t) - \bar{T}_{ext}$$

où \bar{T} , \bar{P} et \bar{T}_{ext} correspondent à un point de fonctionnement stationnaire.

5.2.2 Modélisation du système

Bilan thermique

Nous pouvons écrire, par rapport à l'état stationnaire de référence :

$$\left(\text{accumulation de chaleur dans la pièce par unité de temps} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{puissance thermique} \\ \text{qui entre dans} \\ \text{la pièce via} \\ \text{le radiateur} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{puissance thermique} \\ \text{perdue à travers} \\ \text{les cloisons} \end{array} \right)$$

$$C \frac{d}{dt} \delta T(t) = \delta P(t) - \frac{1}{R} [\delta T(t) - \delta T_{ext}(t)] \quad (5.3)$$

où $C[J/K]$ est la capacité thermique de la pièce et $R[K/W]$ la résistance thermique des cloisons.

Grandeurs caractéristiques

Nous retrouvons dans le modèle (5.3) :

- une variable d'état (dépendante) : $\delta T(t)$
- une variable d'entrée (indépendante) : $\delta P(t)$
- une variable de perturbation (indépendante) : $\delta T_{ext}(t)$
- des paramètres constants : C, R

5.2.3 Fonctions de transfert

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (5.3), on obtient :

$$sC\delta T(s) = \delta P(s) - \frac{1}{R} [\delta T(s) - \delta T_{ext}(s)]$$

où

$$[sRC + 1]\delta T(s) = R\delta P(s) + \delta T_{ext}(s)$$

En posant $\tau = RC$, on trouve :

$$\delta T(s) = \frac{R}{\tau s + 1} \delta P(s) + \frac{1}{\tau s + 1} \delta T_{ext}(s) \quad (5.4)$$

Qu'en est-il de la condition initiale pour δT ?

Quelle est la dimension de τ ? Quelle est sa signification physique ?

Puisqu'il y a deux variables indépendantes distinctes, $\delta P(t)$ et $\delta T_{ext}(t)$, on considère les deux fonctions de transfert :

$$G_1(s) = \frac{\delta T(s)}{\delta P(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} \quad (5.5)$$

$$G_2(s) = \frac{\delta T(s)}{\delta T_{ext}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (5.6)$$

L'équation (5.5) décrit *uniquement* le comportement de δT en fonction de δP , tandis que l'équation (5.6) renseigne *uniquement* sur la variation δT résultant d'une variation δT_{ext} . Si nous sommes intéressés par la réponse du système à des variations δP et δT_{ext} , il nous faut alors considérer l'équation complète (5.4).

5.2.4 Réponse de $T(t)$ à un saut unité de $P(t)$

Variation de $P(t)$:

$$P(t) = \bar{P} + \delta P(t)$$

Pour un saut unité, $\delta P(t) = 1$ ou $\delta P(s) = 1/s$, l'équation (5.5) permet d'écrire :

$$\delta T(s) = G_1(s) \delta P(s) = \left(\frac{R}{\tau s + 1} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1}$$

Détermination de A et B à l'aide de la méthode des résidus :

$$A = \left[\frac{R}{\tau s + 1} \right]_{s=0} = R$$

$$B = \left[\frac{R}{s} \right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = -R\tau$$

Ainsi

$$\delta T(s) = \frac{R}{s} - \frac{R}{s + \frac{1}{\tau}}$$

La transformation de Laplace inverse de $\delta T(s)$ donne :

$$\delta T(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{R}{s + \frac{1}{\tau}} \right] = R - R e^{-\frac{t}{\tau}} = R \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

et ainsi :

$$T(t) = \bar{T} + \delta T(t) = \bar{T} + R \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad t \geq 0$$

Comportement de $\delta T(t)$ pour $t \rightarrow \infty$

$$\text{Gain statique de } G_1(s) : \quad K = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{R}{\tau s + 1} \right] = R$$

$$\text{Pôle de } G_1(s) : \quad p_1 = -\frac{1}{\tau}$$

$$\text{Zéros de } G_1(s) : \quad \text{aucun}$$

Equation caractéristique de $G_1(s)$: $\tau s + 1 = 0$

Représentation graphique

En supposant que le saut unité de l'entrée $P(t)$ à lieu à l'instant t^* , la représentation graphique de ce test dynamique est donnée à la figure 5.2.

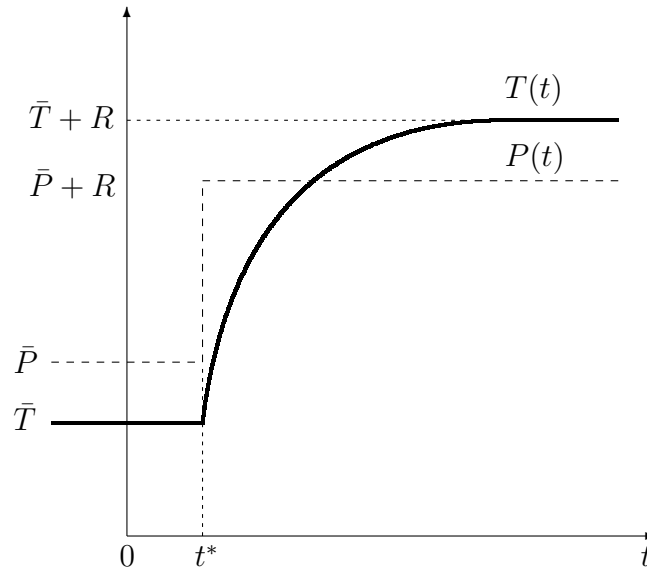


Figure 5.2. Réponse indicielle.

5.2.5 Réponse de $T(t)$ à un saut unité de $T_{ext}(t)$

Pour $\delta T_{ext}(t) = 1$, on calcule aisément :

$$T(t) = \bar{T} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t \geq 0$$

Comportement de $\delta T(t)$ pour $t \rightarrow \infty$

Le théorème de la valeur finale donne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta T(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \delta T(s)] = 1$$

c'est à dire :

$$(\delta T)_{final} = \delta T_{ext}$$

Gain statique, pôle, zéro et équation caractéristique

Gain statique de $G_2(s)$: $K = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\tau s + 1} \right] = 1$

Pôle de $G_2(s)$: $p_1 = -\frac{1}{\tau}$

Zéro de $G_2(s)$: aucun

Equation caractéristique de $G_2(s)$: $\tau s + 1 = 0$

Peut-on comparer les grandeurs caractéristiques de $G_1(s)$ et $G_2(s)$?

Représenter graphiquement $\delta T(t)$ pour un saut d'unité de $\delta T_{ext}(t)$.

5.2.6 Remarque importante concernant les notations

On a vu dans l'exemple précédent que les variables écart δT , δP et δT_{ext} déterminent entièrement les variations du système autour du point de référence \bar{T} , \bar{P} et \bar{T}_{ext} . Pour l'analyse des système, on travaille presque exclusivement avec des variables écart car on s'intéresse aux variations autour du point de référence. On avait déjà rencontré ces variables écart lors de l'approximation linéaire d'un système non linéaire. La figure 5.2 se laisse normaliser si l'on reporte en abscisse $\delta t = t - t^*$ ($\delta t \geq 0$) et en ordonnée les variables écart $\delta P(t)$ et $\delta T(t)$, comme illustré à la figure 5.3.

On rencontre naturellement les variables absolues lors de la modélisation d'un système ou lors de son opération

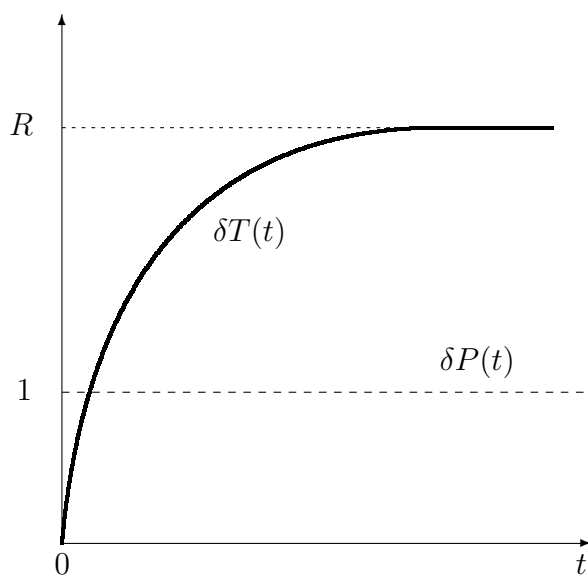


Figure 5.3. Réponse indicielle en variable écart.

(les grandeurs physiques de mesure et de commande sont des signaux en valeur absolue). Par contre, pour l'étude des systèmes linéaires ou linéarisés, il est plus simple de travailler en variables écart. Ceci à l'avantage de générer des conditions initiales nulles pour le système relâché au point de référence, ce qui permet d'utiliser directement le concept de fonction de transfert. On peut aisément passer des variables écart aux variables absolues, et inversement, à l'aide des relations :

$$T(t) = \bar{T} + \delta T$$

$$P(t) = \bar{P} + \delta P$$

Dorénavant, et en accord avec les notation au niveau international, nous omettrons le symbole δ distinguant une variable écart d'une variable absolue. Le contexte indiquera s'il s'agit d'une variable écart ou d'une variable absolue.

5.3 Système du premier ordre

5.3.1 Représentation

Un système du premier ordre est décrit par une fonction de transfert possédant un polynôme du premier ordre au dénominateur. Si il n'y a pas de zéro, la fonction de transfert aura la forme suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (5.7)$$

Le gain statique de ce système est $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K$.

Le pôle est $p = -1/\tau$, τ étant la **constante de temps** du système.

5.3.2 Réponse indicielle

La réponse à un saut d'amplitude A , $u(t) = A\epsilon(t)$, d'un système du premier ordre est :

$$y(t) = \epsilon(t)KA[1 - e^{-t/\tau}] \quad (5.8)$$

On peut l'obtenir suit :

$$\begin{array}{ccc} u(t) = A\epsilon(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & U(s) = \frac{A}{s} \\ & & \downarrow \\ & & \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \\ y(t) = \epsilon(t)KA[1 - e^{-t/\tau}] & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = \frac{KA}{s(\tau s + 1)} \end{array}$$

Cette représentation graphique de la réponse indicielle est valable pour tous les systèmes caractérisés par la fonction de transfert (5.7), laquelle est paramétrée par K et τ . En d'autre termes, qu'il s'agisse d'un processus lent ou rapide, de nature mécanique, électrique ou autres, pour autant que ce processus soit caractérisable par (5.7), la réponse indicelle de la figure 5.4 paramétrée par KA et τ restera valable (A est ici l'amplitude du saut échelon). On peut donc choisir de représenter la **réponse indicielle normalisée**, c'est à dire $y(t)/KA$ en fonction de t/τ .

La dérivée de la réponse indicielle est maximale à l'origine et vaut :

$$\dot{y}(0) = KA/\tau$$

Quant à la valeur finale de la réponse, elle est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = KA$$

La valeur de la réponse pour $t = \tau$ est :

$$y(\tau) = KA \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0,63KA$$

La valeur de la réponse pour $t = 3\tau$ est :

$$y(3\tau) = KA \left(1 - \frac{1}{e^3} \right) = 0,95KA$$

On constate donc que la réponse indicielle du système atteint le 63% de sa valeur finale lorsqu'un temps τ s'est écoulé. De plus, la réponse indicielle atteint 95% de sa valeur finale pour 3τ . La variable τ constitue donc une

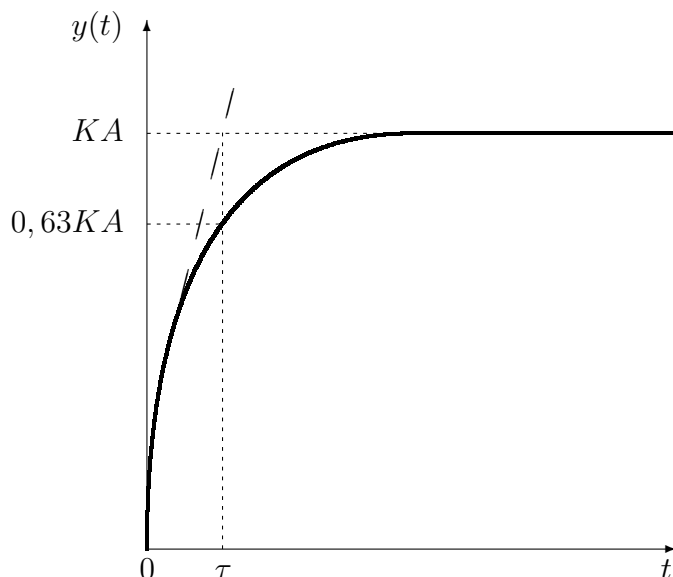


Figure 5.4. Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

mesure de la rapidité de la réponse. Pour cette raison, cette grandeur est appelée la **constante de temps** du système. Elle est toujours en unités de temps, comme une analyse dimensionnelle le montre.

Identification du système à partir de la réponse indicielle

Si la réponse indicielle d'un système du premier ordre est mesurée, il est possible de déterminer le gain statique K et la constante de temps τ . Une fois ces grandeurs disponibles, la fonction de transfert est complètement définie et peut être utilisée pour prédire les réponses à des entrées autres qu'un saut indiciel.

Trois méthodes simples sont proposées pour l'identification (fig. 5.5).

- Le gain statique est obtenu en divisant l'amplitude maximale KA de la réponse par le facteur A (amplitude connue du saut indiciel appliqué au système). La constante de temps correspond à l'instant où l'amplitude de cette réponse atteint le 63% de sa valeur finale.
- Le gain statique est obtenu de la même manière que celle proposée en a. Pour déterminer la constante de temps, la pente m de la tangente de la réponse indicielle est mesurée à l'instant d'application de l'échelon. Elle vaut :

$$m = \frac{KA}{\tau}$$

Par conséquent,

$$\tau = \frac{KA}{m}$$

- Une troisième possibilité consiste à prélever deux échantillons de la réponse $y_1(t)$ et $y_2(t)$ et à résoudre un système de deux équations avec les deux inconnues K et τ .

$$\begin{cases} y(t_1) = KA[1 - e^{-t_1/\tau}] \\ y(t_2) = KA[1 - e^{-t_2/\tau}] \end{cases}$$

On constate en pratique que la réponse indicielle relevée expérimentalement est souvent bruitée et présente une allure qui diffère légèrement de celle attendue, certains phénomènes ayant été négligés lors de la modélisation comme des non-linéarités et des modes rapides. La précision des résultats obtenus avec les outils simples proposés ci-dessus est par conséquent souvent insuffisante. Afin d'améliorer l'identification, toutes les mesures disponibles

peuvent être prises en compte pour introduire une redondance et par conséquent un effet de lissage. Un problème de régression, linéaire ou non linéaire selon l'approche choisie, est à même de réaliser cet objectif.

Les techniques décrites précédemment servent également à obtenir une fonction de transfert qui décrit *localement* un système non linéaire. Dans ce cas ci, l'entrée u et la sortie y doivent impérativement être remplacées dans toutes les expressions par l'écart δu de l'entrée par rapport à l'entrée nominale \bar{u} et l'écart δy de la sortie par rapport à la sortie nominale \bar{y} .

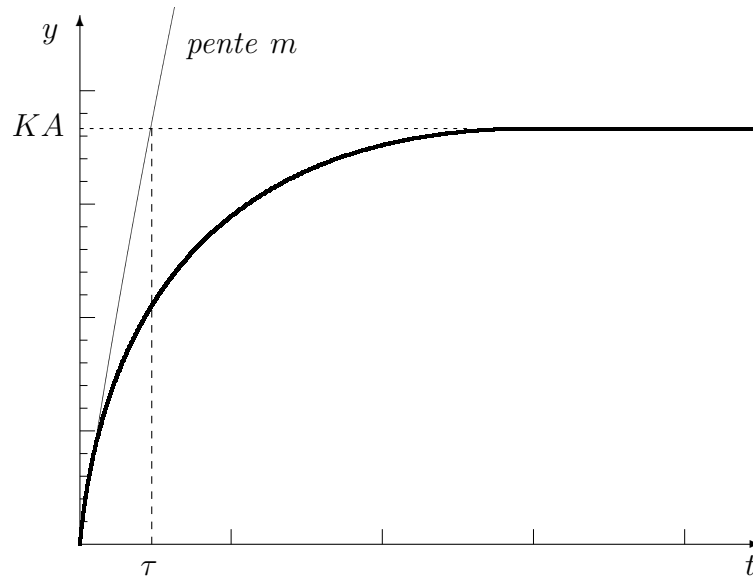


Figure 5.5. Réponse indicielle mesurée.

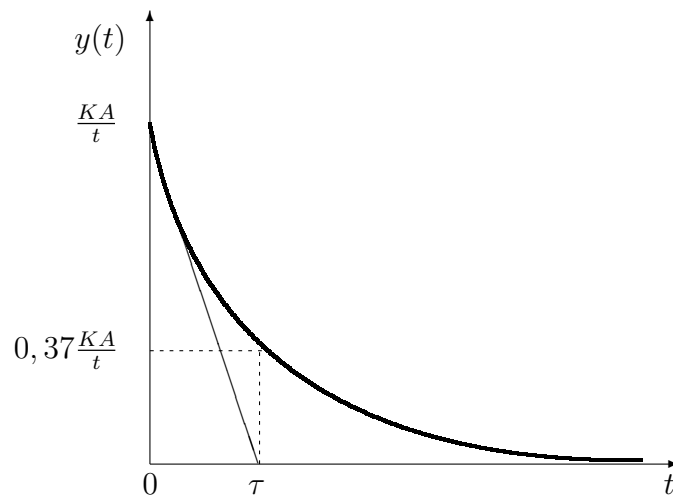


Figure 5.6. Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

5.3.3 Réponse impulsionnelle

$$\begin{array}{ccc}
u(t) = A\delta(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & U(s) = A \\
& & \downarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \\
y(t) = \frac{KA}{\tau} e^{-t/\tau} & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = \frac{KA}{\tau s + 1}
\end{array}$$

La représentation graphique est donnée à la figure 5.6.

Vérifier que la réponse impulsionnelle soit bien la dérivée de la réponse indicielle. Comment peut-on le justifier ?

5.3.4 Réponse à une rampe

$$\begin{array}{ccc}
u(t) = At(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & U(s) = \frac{A}{s^2} \\
& & \downarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \\
y(t) & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = \left(\frac{K}{\tau s + 1} \right) \left(\frac{A}{s^2} \right)
\end{array}$$

Pour déterminer $y(t)$, il est nécessaire de décomposer $Y(s)$ en éléments simples :

$$Y(s) = \left(\frac{K}{\tau s + 1} \right) \left(\frac{A}{s^2} \right) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{\gamma}{\tau s + 1} \quad (5.9)$$

Déterminons α, β et γ par la méthode des résidus :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{KA}{\tau s + 1} \right) \right]_{s=0} = \left(\frac{-KA\tau}{(\tau s + 1)^2} \right)_{s=0} = -KA\tau \\
\beta &= \left(\frac{KA}{\tau s + 1} \right)_{s=0} = KA \\
\gamma &= \left(\frac{KA}{s^2} \right)_{s=-\frac{1}{\tau}} = KA\tau^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$Y(s) = \frac{KA\tau}{s} + \frac{KA}{s^2} + \frac{KA\tau^2}{\tau s + 1}$$

La transformation de Laplace inverse donne :

$$y(t) = -KA\tau + KA t + KA\tau e^{-t/\tau} = KA(t - \tau) + KA\tau e^{-t/\tau} \quad t \geq 0$$

La représentation graphique de $y(t)$ est donnée à la figure 5.7.

5.3.5 Réponse harmonique

La **réponse harmonique** est la réponse *en régime permanent* d'un système dynamique excité par une sinusoïde de pulsation donnée. Le terme transitoire de la réponse est donc négligé.

Pour un système du premier ordre excité par l'entrée sinusoïdale $u(t) = A \sin(\omega t)$ de pulsation $\omega = 2\pi/T[\text{rad/sec}]$, on peut écrire :

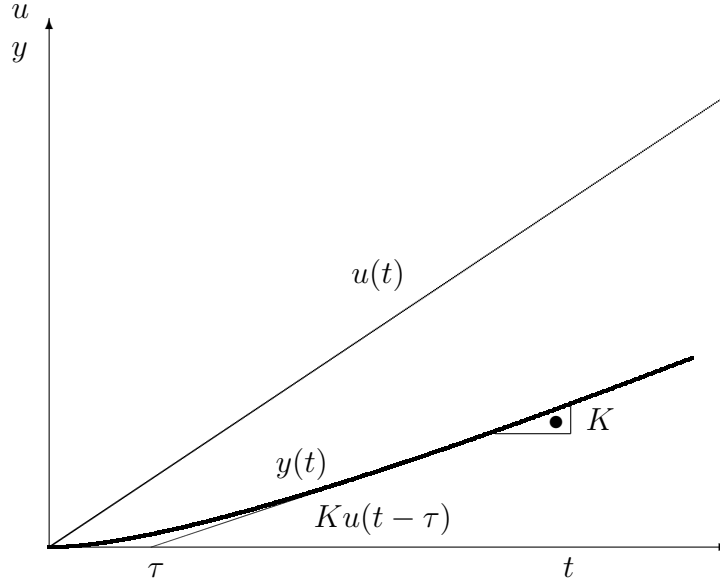


Figure 5.7. Réponse d'un système du premier ordre à une rampe.

$$\begin{array}{ccc}
 u(t) = A \sin(\omega t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \\
 & & \downarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \\
 y(t) & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = \frac{KA\omega}{(\tau s + 1)(s^2 + \omega^2)} = \frac{\alpha_1}{\tau s + 1} + \frac{\alpha_2 s + \alpha_3}{s^2 + \omega^2}
 \end{array} \quad (5.10)$$

Calculons la réponse $y(t)$. Nous commençons par déterminer α_1 par la méthode des résidus :

$$\alpha_1 = \left(\frac{KA\omega}{s^2 + \omega^2} \right)_{s=-1/\tau} = \frac{KA\omega\tau^2}{1 + \tau^2\omega^2}$$

En réduisant l'équation (5.10) au même dénominateur, on obtient :

$$KA\omega = \alpha_1(s^2 + \omega^2) + (\alpha_2 s + \alpha_3)(\tau s + 1)$$

Cette équation est valable pour tous s . On peut également la dériver une fois, puis une deuxième fois par rapport à s pour obtenir :

$$0 = 2\alpha_1 s + 2\alpha_2 \tau s + \alpha_2 + \alpha_3 \tau \quad (5.11)$$

$$0 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \tau$$

d'où :

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{\tau} = -\frac{KA\omega\tau}{1 + \tau^2\omega^2}$$

L'équation (5.11) pour $s = 0$ donne :

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_2}{\tau} = \frac{KA\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

On obtient ainsi la réponse du système :

$$Y(s) = \frac{KA}{1 + \tau^2 \omega^2} \left[\frac{\omega \tau^2}{\tau s + 1} - \frac{\omega \tau s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

et avec la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$:

$$y(t) = \frac{KA}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\omega \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \omega \tau \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right) \quad (5.12)$$

En utilisant la relation trigonométrique :

$$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

où

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5.13)$$

l'équation (5.12) devient :

$$y(t) = \left(\frac{KA\omega\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \left(\frac{KA}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right) \sin(\omega t + \varphi) \right) \right) \quad (5.14)$$

avec :

$$\varphi = \arctan(-\tau\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

La réponse comporte une partie *transitoire* (premier terme) et une partie *permanente* (deuxième terme). La réponse en régime permanent (c'est-à-dire une fois que la partie transitoire a disparu) s'écrit :

$$\bar{y}(t) = \frac{KA}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

et est caractérisée par :

1. une amplitude A' différente de l'amplitude du signal d'excitation A ; on parle de rapport d'amplitude entre la sortie et l'entrée, $R_A = A'/A$
2. la même pulsation ω (c'est-à-dire la même période T)
3. un déphasage φ entre les signaux d'entrée et de sortie.

Cette situation en régime permanent est visualisée à la figure 5.8. Le déphasage est négatif ($\varphi = -\omega t'$) ; on dit que $\bar{y}(t)$ est en « retard » sur $u(t)$ et on parle de **retard de phase**. Exemple

Soit une cuve homogène de $1[m^3]$ de volume alimentée en continu par un débit d'eau de $0,05[m^3/min]$ qu'il convient de chauffer de 10 à $20[C]$ par l'intermédiaire d'un corps de chauffe dont la puissance nominale vaut $35[kW]$. On peut modéliser ce système par la fonction de transfert liant la puissance de chauffe à la température de la cuve (cf. section 6.2) :

$$\frac{T(s)}{P(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} K &= 0,29[C/kW] \\ \tau &= 20[min] \end{aligned}$$

On désire étudier l'effet sur la température d'une excitation sinusoïdale de la puissance de chauffe. On a observé les comportements suivants :

a) Sous l'effet de l'excitation

$$P(t) = 10 \sin(0,01t) \quad [kW]$$

autour de la valeur stationnaire de référence $\bar{P} = 35[kW]$, le temps étant exprimé en $[min]$, la variation de température en régime permanent devient :

$$\bar{T}(t) = 2,84 \sin(0,01t - 0,197) \quad [C]$$

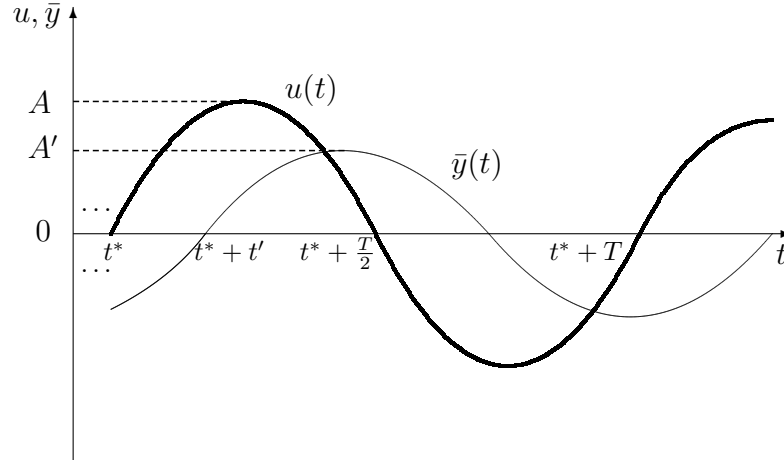


Figure 5.8. Réponse en régime permanent à une excitation sinusoïdale.

b) Avec une excitation de pulsation plus élevée, par exemple :

$$P(t) = 10 \sin(t) \quad [kW]$$

on obtient

$$\bar{T}(t) = 0,14 \sin(t - 1,52) \quad [C]$$

*Quelle constatation peut-être faite en comparant ces deux tests ?
Peut-on identifier le gain statique K et la constante de temps τ ?*

5.4 Système intégrateur du premier ordre

5.4.1 Représentation

Un système intégrateur du premier ordre possède un pôle unique à l'origine ($p = 0$). Sa fonction de transfert est donc de la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s} \quad (5.15)$$

Le gain statique d'un tel système est infini. Le gain en vitesse vaut K .

5.4.2 Réponse indicielle

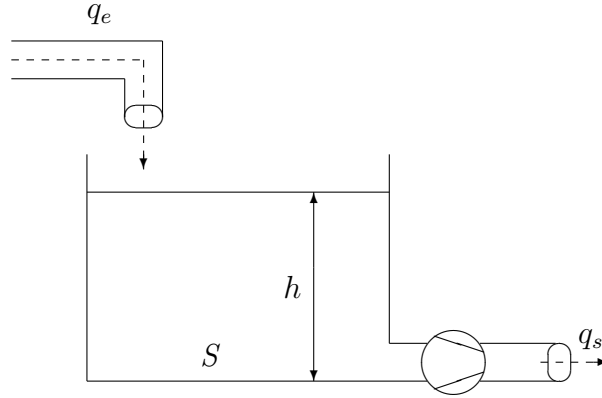
La réponse d'un système intégrateur du premier ordre au saut échelon $u(t) = A\epsilon(t)$ est :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} \frac{A}{s}\right] = \epsilon(t)KA t \quad (5.16)$$

5.4.3 Exemple

Soit la cuve de volume variable donnée à la figure 5.9. On peut modéliser ce système comme suit :

$$S \frac{d}{dt} h(t) = q_e(t) - q_s(t)$$

**Figure 5.9.** Cuve de volume variable.

Pour un débit de fuite constant (imposé par la pompe), on obtient :

$$S \frac{d}{dt} h(t) = q_e(t) - q_s \quad (5.17)$$

Remarque

L'équation (5.17) est écrite en variables absolues. En travaillant avec des variables écart, on obtient :

$$S \frac{d}{dt} h(t) = q_e(t)$$

et dans le domaine de Laplace

$$SsH(s) = Q_e(s)$$

La fonction de transfert du système s'écrit donc :

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{Ss}$$

Indiquer le gain statique, le gain en vitesse et les pôles de cette fonction de transfert ?

Réponse de $h(t)$ à un saut de $q_e(t)$ d'amplitude A

Supposons le système initialement au repos (à l'état stationnaire) :

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \bar{q}_e - q_s$$

c'est à dire $\bar{q}_e = q_s = \text{const.}$

Soit $q_e(t) = A$ pour $t \geq 0$. Ainsi (tout en variables écart) :

$$\begin{array}{ccc}
 q_e(t) = A & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Q_e(s) = \frac{A}{s} \\
 & & \downarrow \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{Ss} \\
 h(t) = \frac{A}{S}t & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & H(s) = \frac{A}{Ss^2}
 \end{array}$$

Ce résultat est représenté à la figure 5.10.

Si le niveau $h(t)$ doit être exprimé en variable absolue, il devient :

$$h(t) = \bar{h} + \frac{A}{S}t \quad t \geq 0$$

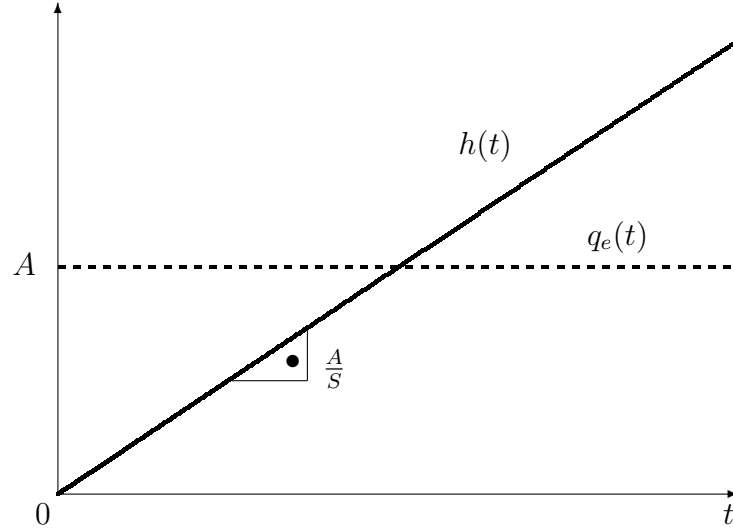


Figure 5.10. Niveau du liquide en réponse à un saut du débit d'alimentation

5.5 Système du deuxième ordre sans zéro

5.5.1 Représentation

Un système du deuxième ordre sans zéro se rencontre dans la littérature sous deux formes classiques équivalentes :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (5.18)$$

On limite l'étude au cas où $\zeta \geq 0$ pour lequel le système est stable (voir section 5.6 et le chapitre 7 pour une discussion sur la stabilité).

Une simple inspection permet de construire les relations pour passer d'une représentation à l'autre, soit $\omega_0 = 1/\tau$ et $a = \zeta\omega_0$.

La nomenclature correspondante est la suivante :

- K : Gain statique
- ζ : Coefficient d'amortissement [-]
- τ : Constante de temps [s]
- ω_0 : Pulsation propre ou naturelle [1/s]

Les pôles de $G(s)$ sont :

$$p_{1,2} = -\frac{1}{\tau}(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) = -\omega_0(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

Ces pôles peuvent être réels distincts, réels confondus ou conjugués complexes.

Un système du deuxième ordre est souvent formé à partir de deux systèmes du premier ordre en série, c'est-à-dire :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \right) \left(\frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \right) \quad (5.19)$$

On a dans ce cas la correspondance suivante :

$$K = K_1 K_2$$

$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}$$

$$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Remarques

Il convient de noter certaines limitations liées à la représentation (5.18) pour un système du deuxième ordre :

- La constante de temps équivalente τ ne représente pas nécessairement la constante de temps dominante du système. Par exemple, pour le système (5.19) avec $\tau_1 \gg \tau_2$, la **constante de temps dominante** est environ τ_1 et non $\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}$.
- Comme mentionné précédemment, la représentation (5.18) n'est pas utilisable pour un système instable. Par exemple, pour le système strictement instable (un ou plusieurs pôles positifs)

$$G(s) = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \right) \left(\frac{K_2}{\tau_2 s - 1} \right)$$

on obtient

$$G(s) = \frac{K_1 K_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_2 - \tau_1)s - 1}$$

qui ne se laisse pas mettre sous la forme (5.18).

5.5.2 Réponse indicielle

Pente à l'origine

La pente à l'origine de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre sans zéro est toujours nulle. C'est une caractéristique intrinsèque qui permet de les différencier des systèmes du premier ordre par simple inspection. Pour justifier cette affirmation, il suffit d'utiliser le théorème de la valeur initiale. La pente à l'origine est :

$$\dot{y}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[\dot{y}(t)]$$

Pour une excitation $u(t) = A\epsilon(t)$ en forme d'échelon :

$$\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = sY(s) = sG(s)U(s) = sG(s)\frac{A}{s} = G(s)A$$

Le théorème de la valeur initiale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)A \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sKA}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = 0 \end{aligned}$$

Montrer que cette conclusion n'est, en général, pas valable pour un système du deuxième ordre avec un zéro.

Cas sur-amorti : Pôles réels distincts pour $\zeta > 1$

La fonction de transfert $G(s)$ peut dans ce cas être décomposée en deux facteurs du premier ordre :

$$G(s) = K \frac{1}{(\tau_1 s + 1)} \frac{1}{(\tau_2 s + 1)} \quad (5.20)$$

avec

$$\tau_{1,2} = \tau / (\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

La réponse à un échelon de la forme $u(t) = A\epsilon(t)$ devient :

$$y(t) = \epsilon(t) K A \left\{ 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} [\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}] \right\} \quad (5.21)$$

Cas critique : Pôles réels confondus pour $\zeta = 1$

La fonction de transfert $G(s)$ se résume dans ce cas à :

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \quad (5.22)$$

La réponse à un échelon de la forme $u(t) = A\epsilon(t)$ est alors :

$$y(t) = \epsilon(t) K A \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] \quad (5.23)$$

Cas sous-amorti : Pôles conjugués complexes pour $0 \leq \zeta < 1$

La réponse à un échelon de la forme $u(t) = A\epsilon(t)$ est dans ce cas :

$$y(t) = \epsilon(t) K A \left\{ 1 - e^{-\zeta t/\tau} \left[\cos \bar{\omega} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \bar{\omega} t \right] \right\} \quad (5.24)$$

avec

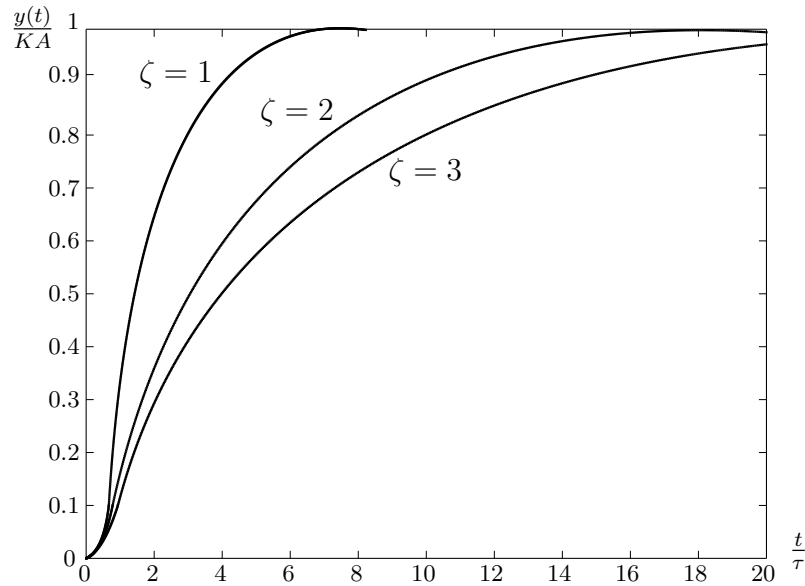


Figure 5.11. Réponse indicielle normalisée d'un système du deuxième ordre sans zéro et avec pôles réel ($\zeta \geq 1$).

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\tau} \sqrt{1 - \zeta^2}$$

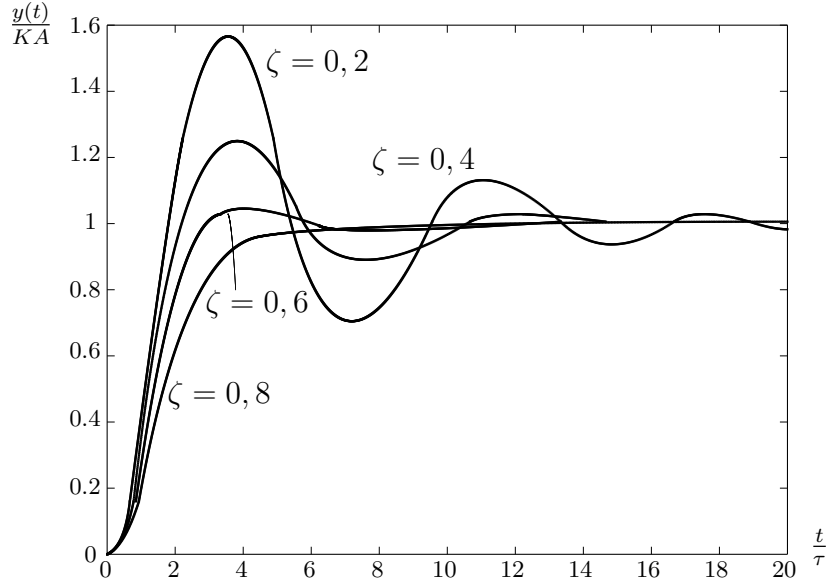


Figure 5.12. Réponse indicielle normalisée d'un système du deuxième ordre sans zéro et avec pôles conjugués complexes ($0 \leq \zeta < 1$).

La réponse normalisée $y(t)/KA$ en fonction du temps relatif t/τ est présentée aux figures 5.11 et 5.12 pour différentes valeurs de ζ .

5.5.3 Systèmes oscillants et non oscillants

Suite à l'étude de la section précédente, on distingue deux cas de réponse d'un système du deuxième ordre sans zéro à une entrée non oscillante (p_1 et p_2 sont les pôles de $G(s)$:

- a) Si $\zeta \geq 1$, la réponse $y(t)$ sera **non oscillatoire** (cas sur-amorti et critique).

Cela signifie que p_1 et p_2 sont réels.

- b) Si $0 \leq \zeta < 1$, la réponse $y(t)$ sera **oscillatoire** (cas sous-amorti).

Cela signifie que p_1 et p_2 sont conjugués complexes ($p_{1,2} = a \pm jb$).

De plus :

- si $0 < \zeta < 1$: les oscillations seront **amorties**,
- si $\zeta = 0$: les oscillations seront **entretenues**.

5.5.4 Identification de la fonction de transfert

Il est utile d'exprimer analytiquement l'abscisse et l'ordonnée de certains points particuliers de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre sans zéro, tel un point d'inflexion ou un maximum. En effet, cette connaissance permet d'identifier le modèle d'une installation existante sur la base de l'observation de sa réponse indicielle.

Cas sur-amorti : Pôles réels distincts pour $\zeta > 1$

Dans le cas d'un système non oscillant, un point particulier est le point d'inflexion de la réponse indicielle. Ses coordonnées t_i et $y(t_i)$ sont obtenues en exploitant les deux premières dérivées de la réponse :

$$\dot{y}(t) = \frac{KA}{\tau_1 - \tau_2} [e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}] \quad (5.25)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{KA}{(\tau_1 - \tau_2)} \left[-\frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \right] \quad (5.26)$$

Comme au point d'inflexion $\ddot{y}(t_i) = 0$, l'équation (5.26) donne :

$$\frac{1}{\tau_1} e^{-t_i/\tau_1} = \frac{1}{\tau_2} e^{-t_i/\tau_2} \quad (5.27)$$

ce qui permet de déterminer l'instant t_i du point d'inflexion :

$$t_i = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad (5.28)$$

Introduisons la constante :

$$X := \frac{1}{\tau_1} e^{-t_i/\tau_1} = \frac{1}{\tau_2} e^{-t_i/\tau_2} \quad (5.29)$$

qui permet de simplifier l'écriture de la réponse indicielle et de sa dérivée au point d'inflexion :

$$y(t_i) = KA \left\{ 1 - \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} X \right\} = KA \{ 1 - (\tau_1 + \tau_2) X \} \quad (5.30)$$

$$\dot{y}(t_i) = KAX \quad (5.31)$$

L'équation de la droite $d(t)$ tangente au point d'inflexion est :

$$d(t) = KA[X(t - (t_i + \tau_1 + \tau_2)) + 1] \quad (5.32)$$

Cette droite passe par zéro en $t = t_A$ et croise l'asymptote horizontale correspondant à la valeur finale KA en $t = t_B = t_i + \tau_1 + \tau_2$. Ainsi, l'intervalle de temps qui sépare le point d'inflexion de l'intersection mentionnée est égale à la somme des constantes de temps τ_1 et τ_2 .

L'ensemble des indications obtenues et résumées à la figure 5.13 sont pratiques pour identifier la fonction de

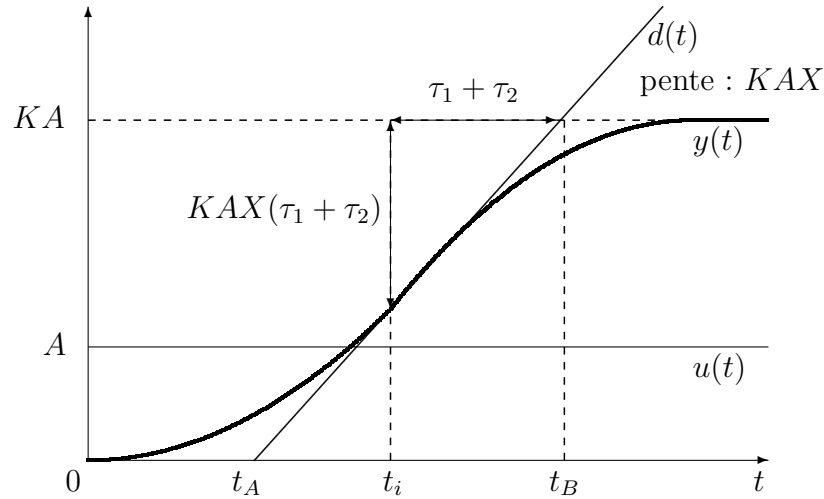


Figure 5.13. Réponse indicielle d'un système sur-amorti du deuxième ordre sans zéro.

transfert d'un système sur-amorti du deuxième ordre sans zéro. La marche à suivre est la suivante :

1. Mesurer la valeur finale KA de la réponse à un échelon d'amplitude A . Ceci permet de déterminer la valeur du gain statique K .
2. Mesurer la pente KAX de la droite tangente au point d'inflexion. Ceci permet d'en déduire la valeur de la constante X . En injectant ensuite cette valeur dans les deux termes de la relation (5.29), deux équations non linéaires sont obtenues qui permettent de déterminer les constantes de temps τ_1 et τ_2 .

3. Mesurer l'intervalle de temps $t_B - t_i$ et vérifier qu'il corresponde bien à la somme des constantes de temps.

Cas critique : Pôles réels confondus pour $\zeta = 1$

Un point particulier est également le point d'inflexion de la réponse indicielle. Ses coordonnées t_i et $y(t_i)$ sont obtenues en exploitant les deux premières dérivées de la réponse :

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -KA \left[\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] = \frac{KA t}{\tau^2} e^{-t/\tau} \\ \ddot{y}(t) &= \frac{KA}{\tau^2} \left[e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \right] = \frac{KA}{\tau^2} e^{-t/\tau} \left[1 - \frac{t}{\tau} \right]\end{aligned}\quad (5.33)$$

Comme au point d'inflexion $\ddot{y}(t_i) = 0$, l'équation (5.33) donne $t_i = \tau$.

La marche à suivre pour déterminer K et τ est la suivante :

1. Mesurer la valeur finale KA de la réponse à un échelon d'amplitude A . On obtient directement $\tau = t_i$.
2. Déterminer le point d'inflexion et le temps correspondant t_i . On obtient directement $\tau = t_i$.
3. Les valeurs de la réponse indicielle et de sa dérivée au temps t_i permettent de vérifier l'exactitude de K et τ . En effet, on doit avoir :

$$y(t_i) = KA \left(1 - \frac{2}{e} \right) = 0,264KA \quad \text{et} \quad \dot{y}(t_i) = \frac{KA}{\tau e} = 0,368 \frac{KA}{\tau}$$

Cas sous-amorti : Pôles conjugués complexes pour $0 \leq \zeta < 1$

Dans le cas d'un système sous-amorti ou oscillant, les points particuliers sont les extrema de la réponse indicielle, plus spécialement le premier maximum qu'il est important de connaître et facile à mesurer. Ses coordonnées t_p et $y(t_p)$ sont obtenues en exploitant la première dérivée de la réponse.

Déterminons pour commencer les extrema qui sont situés aux instants t_k , tels que $\dot{y}(t_k) = 0$. La dérivation temporelle de (5.24) donne :

$$\dot{y}(t) = \frac{kA e^{-\zeta t/\tau}}{\tau \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \bar{\omega} t \quad t \geq 0$$

et donc :

$$t_k = \frac{k\pi}{\bar{\omega}} = \frac{k\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Les minimas sont obtenus pour les valeurs paires de k et les maxima pour valeurs impaires. Le premier maximum est obtenu pour $k = 1$. Ainsi :

$$t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

En introduisant cette expression dans l'équation de la réponse indicielle (5.24), on obtient :

$$y(t_p) = KA \left(1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right) \quad (5.34)$$

Ces indications, résumées à la figure 5.14, sont utiles pour identifier la fonction de transfert d'un système oscillant du deuxième ordre sans zéro. La marche à suivre est la suivante :

1. Mesurer la valeur finale KA de la réponse à un échelon d'amplitude A . Ceci permet de déterminer la valeur du gain statique K .
2. Mesurer l'amplitude du premier maximum, ce qui permet de déterminer la valeur de ζ .
3. Mesurer l'instant d'apparition de ce premier maximum, ce qui permet de déterminer la valeur de la constante de temps τ .

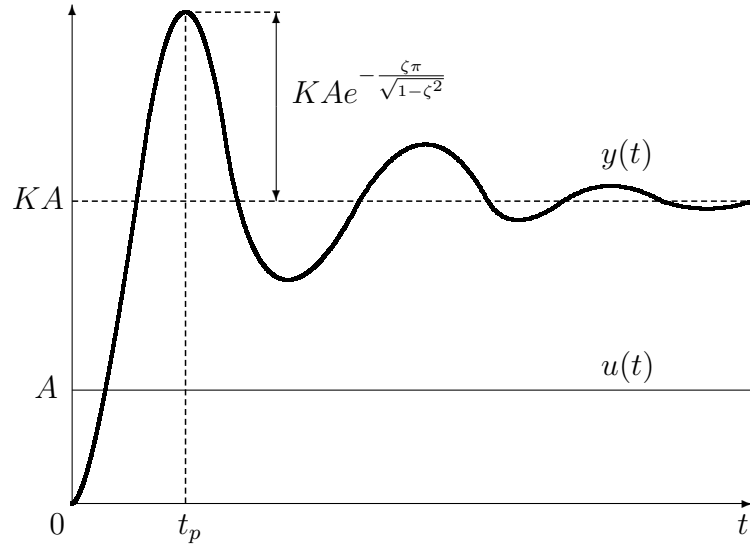


Figure 5.14. Réponse indicielle d'un système sous-amorti du deuxième ordre sans zéro.

La méthodologie d'identification proposée ici est de nature plus didactique que pratique. Elle permet en effet de développer une intuition quant à la forme de la réponse indicielle. Toutefois, pour identifier efficacement le modèle d'un système sur la base d'une réponse dynamique, il convient d'utiliser plus de mesures que les 3 points pré-cités. Il existe des méthodes d'identification de système dynamiques basées sur la technique des moindres carrés qui permettent d'utiliser tous les points mesurés de la réponse. Il y a ainsi une forte redondance des données (par exemple, 100 mesures pour déterminer les trois paramètres K , τ et ζ , ce qui permet de lisser les erreurs de mesure et les effets d'autres perturbations).

5.6 Relation entre position des pôles et réponse temporelle

La réponse $Y(s)$ d'un système dynamique contient les pôles du système ainsi que d'autres pôles associés à l'excitation $U(s)$:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Nous avons appris au chapitre 4 à décomposer $Y(s)$ en éléments simples de manière à retomber sur une ou plusieurs entrées du dictionnaire de la transformation de Laplace. Les termes temporels qui correspondent à une fraction rationnelle simple peuvent s'écrire de la manière générique. Pour les cas paire de pôles conjugués complexes, la réponse temporelle s'écrit :

$$\frac{2A}{(r-1)!} t^{r-1} e^{\alpha t} \cos(\omega t) - \frac{2B}{(r-1)!} t^{r-1} e^{\alpha t} \sin(\omega t) \quad (5.35)$$

avec $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ la paire de pôles conjugués complexes, $A \pm Bj$ les résidus correspondants et $r = 1, 2, \dots, \mu$ où μ représente la multiplicité des pôles. L'expression (5.35) est appelée un **mode**. Il s'agit du mode associé à la paire de pôles conjugués complexes $\alpha \pm j\omega$. Selon les cas, $r-1$, α ou ω peuvent être nuls. Par exemple, pour un pôle réel simple ($\omega = 0$ et $\mu = 1$), le mode devient $Ae^{\alpha t}$.

$$\text{Evaluer l'expression (5.35) pour } Y(s) = \frac{K(s-z)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Le signe de α joue un rôle important. Pour $\alpha > 0$, la réponse croîtra au-delà de toute limite. Inversement, si $\alpha < 0$, ces termes décroissent et tendent vers zéro lorsque le temps s'écoule. L'existence d'un facteur t^{r-1} ne change rien à cette règle car la décroissance de l'exponentielle l'emporte sur t^{r-1} ainsi qu'un développement en

Figure 5.15. Lieu des pôles d'un mode et allure temporelle correspondante.

série de Taylor le montre.

De façon générale, la partie réelle α d'un pôle conditionne l'amortissement du mode qui lui est associé. La partie imaginaire ω détermine quant à elle la fréquence d'oscillation du même mode. Ces particularités sont représentées à la figure 5.15.

Un système linéaire est dit **stable** si et seulement si tous ses pôles sont stables, c'est-à-dire si ses pôles se trouvent dans le demi-plan complexe de gauche ($\alpha_i < 0$), axe imaginaire non compris. On parle alors de stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output), c'est-à-dire que la réponse à toute entrée bornée restera bornée. Un signal borné est un signal dont la valeur en fonction du temps reste entre une limite inférieure finie et une limite supérieure finie (par exemple, un saut unité, une sinusoïde ou e^{-2t} , mais par contre pas e^{2t}).

Pour un système stable, le pôle le plus proche de l'origine, c'est-à-dire celui pour lequel $|\alpha|$ est le plus petit, est dit **dominant**. En effet, après un temps suffisant pour que les contributions des autres pôles se soient amortis, seule la contribution qui lui est associée reste présente. Il conditionne de ce fait l'allure globale de la réponse après un temps initial.

5.7 Exercices résolus

Exercice 1

- a) Evaluer la réponse impulsionnelle du système :

$$G(s) = \frac{s-1}{(2s+1)(s+3)}$$

- b) Représenter graphiquement cette réponse.
c) Evaluer les pôles et les zéros de ce système. Est-il stable ?

Solution

- a)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(2s+1)(s+3)} = \frac{A}{2s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{s-1}{s+3} = -\frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s-1}{2s+1} = \frac{4}{5}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow y(t) = -\frac{3}{10}e^{-t/2} + \frac{4}{5}e^{-3t} \quad t \geq 0$$

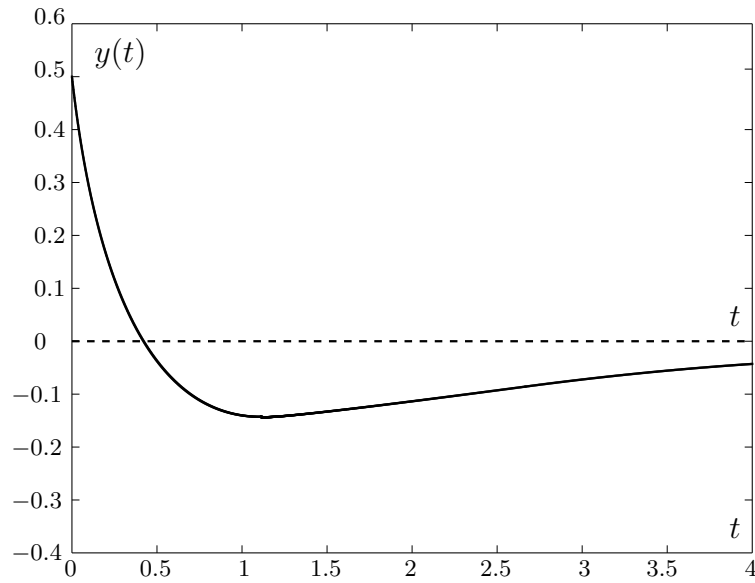
- b) Graphique
c) $z_1 = 1, p_1 = -0.5, p_2 = -3$

Comme les deux pôles sont dans la moitié gauche du plan complexe, le système est BIBO stable.

Exercice 2

Soit le système dynamique autonome, c'est-à-dire sans entrée :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x \quad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$



- a) Calculer $x(t)$.
 b) Quel est l'ordre du système? Combien de modes se trouvent dans la réponse $x(t)$? Discuter ce résultat.

Solution

$$\text{a) } \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \quad x_1(0) = 10$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \quad x_2(0) = 10$$

Transformation de Laplace :

$$sX_1(s) - 10 = X_1(s) - 2X_2(s)$$

$$sX_2(s) - 10 = 2X_1(s) - 3X_2(s)$$

$$X_2(s)[s+3] = 2X_1(s) + 10 \rightarrow X_2(s) = \frac{2}{s+3}X_1(s) + \frac{10}{s+3}$$

$$X_1(s)[s-1] = -2X_2(s) + 10 = -\frac{4}{s+3}X_1(s) - \frac{20}{s+3} + 10$$

$$X_1(s)[(s-1)(s+3)+4] = -20 + 10(s+3)$$

$$X_1(s)[s^2 + 2s - 3 + 4] = 10s + 10$$

$$X_1(s)[s^2 + 2s + 1] = 10s + 10$$

$$X_1(s)[s^2 + 2s + 1] = 10(s+1)$$

$$X_1(s) = \frac{10}{s+1}$$

$$X_2(s) = \frac{2}{s+3} \frac{10}{s+1} + \frac{10}{s+3} = \frac{20 + 10(s+1)}{(s+3)(s+1)} = \frac{10(s+3)}{(s+3)(s+1)} = \frac{10}{s+1}$$

$$x_1(t) = x_2(t) = 10e^{-t} \quad t \geq 0$$

- b) Le système est d'ordre 2 car il est décrit par 2 équations différentielles du premier ordre. Comme les réponses $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ne contiennent que le mode e^{-t} , on pourrait penser que le système est du premier ordre. Cependant, il s'agit là d'un artefact dû au choix des conditions initiales. Pour le montrer, considérons le même système dynamique avec les conditions initiales génériques :

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

Un développement similaire à celui du point a) donne les signaux $X_1(s)$ et $X_2(s)$ suivants :

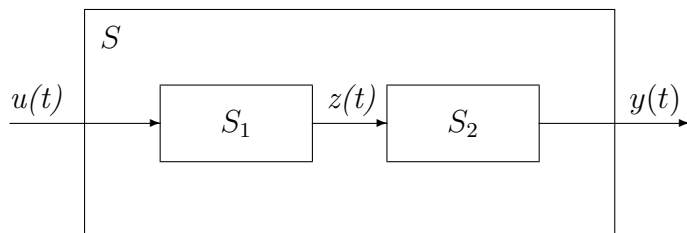
$$X_1(s) = \frac{x_{10}s + (3x_{10}) - 2x_{20}}{(s+1)^2}$$

$$X_2(s) = \frac{x_{20}s + (2x_{10} - x_{20})}{(s+1)^2}$$

Pour $x_{10} = x_{20} = 10$, on retrouve le résultat du point a). Dans le cas général avec un pôle double à $s = -1$, on observe les modes e^{-t} et te^{-t} . Notons également que les valeurs propres de la matrice du système sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Exercice 3

Un système physique est composé de deux sous-systèmes S_1 et S_2 : Le sous-système S_1 est décrit par la fonction



de transfert : $G_1(s) = (s+1)/s$.

La sortie z de ce système est l'entrée du sous-système S_2 dont la dynamique est régie par l'équation différentielle :

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{z}(t) + 3z(t) \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad z(0) = 0$$

- Calculer la fonction de transfert du système complet S .
- Evaluer les pôles et les zéros ainsi que le gain statique du système S .

Solution

a) Système S_1 : $G_1(s) = \frac{s+1}{s} = \frac{Z(s)}{U(s)}$

Système S_1 : $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{z}(t) + 3z(t)$

Calcul de $G_2(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)}$

Le concept de fonction de transfert suppose des conditions initiales nulles (système relâché) :

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sZ(s) + 3Z(s)$$

$$Y(s)[s^2 + 3s + 2] = Z(s)[s + 3]$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\text{Système } S : G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{Z(s)} \cdot \frac{Z(s)}{U(s)}$$

$$G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \rightarrow G(s) = \frac{(s + 3)(s + 1)}{(s + 1)(s + 2)s} = \frac{s + 3}{s(s + 2)}$$

b) Pôles : $p_1 = 0$ $p_2 = -2$

Zéro : $z_1 = -3$

Il s'agit d'un système intégrateur ($p_1 = 0$) possédant donc un gain statique infini :

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 3}{s(s + 2)} = \infty$$

Exercice 4

a) Calculer la réponse indicielle du système suivant :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + s - 2}$$

b) Quel est le gain statique, la constante de temps dominante et le coefficient d'amortissement de ce système ?

Solution

a)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + s - 2} = \frac{2}{(s - 1)(s + 2)}$$

Pour un saut unité, $U(s) = 1/s$, on a :

$$Y(s) = \frac{2}{s(s - 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s - 1} + \frac{C}{s}$$

Par la méthode des résidus, on détermine :

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \left\{ \frac{2}{s(s - 1)} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \frac{2}{s(s + 2)} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{(s - 1)(s + 2)} \right\} = -1$$

Finalement, on obtient :

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t - 1 \quad t \geq 0$$

b) Comme le système est instable (un pôle à 1), il n'est pas possible d'identifier K , τ et ζ par inspection de sa fonction de transfert :

$$\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} \neq \frac{1}{0,5s^2 + 0,5s - 1}$$

- Le gain statique est infini à cause du terme e^t dans $y(t)$.

- Le mode instable $0,67e^t$ est dominant.
- Le concept de coefficient d'amortissement n'a pas de sens pour un système instable.

Exercice 5

Calculer la réponse indicielle du système dynamique caractérisé par un gain statique de 2, une constante de temps de 5 minutes et un retard pur de 1 minute.

Solution

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2e^{-s}}{5s + 1}$$

Réponse du système sans retard

$$G_{SR}(s) = \frac{Y_{SR}(s)}{U(s)} = \frac{2}{5s + 1}$$

$$Y_{SR}(s) = G_{SR}(s)U(s) = \frac{2}{s(5s + 1)}$$

$$Y_{SR}(s) = \frac{2}{s} - \frac{10}{5s + 1} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s + \frac{1}{5}}$$

Ainsi :

$$y_{SR}(t) = 2 \left(1 - e^{-\frac{t}{5}} \right) \quad t \geq 0$$

Réponse avec retard

$$y(t) = y_{SR}(t - 1) = 2\epsilon(t - 1) \left[1 - e^{-\frac{t-1}{5}} \right]$$

Exercice 6

Soit le système de cuves suivant avec le débit d'alimentation $q_e(t)$, le débit intermédiaire $q_1(t)$ proportionnel à la différence de niveaux $h_1(t) - h_2(t)$ et q_2 constant :

- Calculer l'état stationnaire du système.
- Calculer la fonction de transfert $H_2(s)/Q_e(s)$.
- Un tel système est appelé interactif. Pourquoi ?
- Ce système possède-t-il un élément intégrateur ?

Solution

a) Etat stationnaire

Bilans massiques (après simplification par $\rho = \text{const.}$) :

$$\text{Cuve 1 : } S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_e - q_1 = q_e - \frac{1}{R}(h_1 - h_2) \quad (5.1)$$

$$\text{Cuve 2 : } S_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 = \frac{1}{R}(h_1 - h_2) - q_2 \quad (5.2)$$

Etat stationnaire :

$$(1) \Rightarrow 0 = \bar{q}_e - \frac{1}{R}(\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \quad (5.0)$$

$$(2) \Rightarrow 0 = \frac{1}{R}(\bar{h}_1 - \bar{h}_2) - q_2$$

Il y a un état stationnaire uniquement si $\bar{q}_e = q_2, \Rightarrow \bar{h}_1 - \bar{h}_2 = R\bar{q}_e$.

b) Fonctions de transfert

Equations dynamiques en variables écarts :

$$\begin{pmatrix} \Delta h_1 = h_1 - \bar{h}_1 \\ \Delta h_2 = h_2 - \bar{h}_2 \\ \Delta q_e = q_e - \bar{q}_e \end{pmatrix}$$

$$(1) - (1a) : S_1 \frac{d}{dt}(\Delta h_1) = \Delta q_e - \frac{1}{R}(\Delta h_1 - \Delta h_2) \quad (5.2)$$

$$(2) - (2a) : S_2 \frac{d}{dt}(\Delta h_2) = \frac{1}{R}(\Delta h_1 - \Delta h_2) \quad (5.2)$$

A l'état stationnaire $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta q_e = 0$

Transformation de Laplace :

$$S_1 s \Delta H_1(s) = \Delta Q_e(s) - \frac{1}{R}[\Delta H_1(s) - \Delta H_2(s)] \quad (5.2)$$

$$S_2 s \Delta H_2(s) = \frac{1}{R}[\Delta H_1(s) - \Delta H_2(s)] \quad (5.2)$$

$$(3) : \left(S_1 s + \frac{1}{R} \right) \Delta H_1(s) = \Delta Q_e(s) + \frac{1}{R} \Delta H_2(s) \quad (5.2)$$

$$(4) : \left(S_2 s + \frac{1}{R} \right) \Delta H_2(s) = \frac{1}{R} \Delta H_1(s) \quad (5.2)$$

$$(6) : \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta H_1(s)} = \frac{1}{R S_2 s + 1} \quad (5.2)$$

Eliminons $\Delta H_2(s)$ dans (5) :

$$\begin{aligned} \left(S_1 s + \frac{1}{R} \right) \Delta H_1(s) &= \Delta Q_e(s) + \frac{1}{R} \frac{\Delta H_1(s)}{R S_2 s + 1} \\ \left[R S_1 s + 1 - \frac{1}{R S_2 s + 1} \right] \Delta H_1(s) &= R \Delta Q_e(s) \\ \frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q_e(s)} &= \frac{R(R S_2 s + 1)}{s[R^2 S_1 S_2 s + R(S_1 + S_2)]} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q_e(s)} = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta H_1(s)} \frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q_e(s)} = \frac{1}{s[R S_1 S_2 s + (S_1 + S_2)]} = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \quad (5.2)$$

avec :

$$K = \frac{1}{S_1 + S_2} \quad \tau = \frac{R S_1 S_2}{S_1 + S_2}$$

c) Le système est appelé **interactif** car le niveau de la deuxième cuve influence celui de la première.

d) Elément **intégrateur** car le terme $1/s$ apparaît dans la fonction de transfert (9).

Exercice 7

Soient les 2 systèmes de cuves suivants.

- a) Pour chaque système, calculer la fonction de transfert $H_2(s)/Q_e(s)$ et évaluer son gain statique et ses pôles.
Y a-t-il un élément intégrateur ?
- b) Comparer qualitativement les deux systèmes.

Solution

a1) Système 1

Equations dynamiques :

$$A_1 \frac{d}{dt} h_1(t) = q_e(t) - k_1 h_1(t)$$

$$A_2 \frac{d}{dt} h_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2 h_2(t)$$

Fonction de transfert :

$$A_1 s H_1(s) = Q_e(s) - k_1 H_1(s)$$

$$A_2 s H_2(s) = k_1 H_1(s) - k_2 H_2(s)$$

$$\frac{H_1(s)}{Q_e(s)} = \frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{A_1}{k_1} s + 1}$$

$$\frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{\frac{k_1}{k_2}}{\frac{A_2}{k_2} s + 1}$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_e(s)} = \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \frac{H_1(s)}{Q_e(s)} = \frac{\frac{1}{k_2}}{\left(\frac{A_1}{k_1} s + 1\right) \left(\frac{A_2}{k_2} s + 1\right)}$$

- Gain statique :

$$K = \frac{1}{k_2}$$

- Constantes de temps :

$$\tau_1 = \frac{A_1}{k_1} \quad \tau_2 = \frac{A_2}{k_2}$$

- Pôles :

$$p_1 = -\frac{k_1}{A_1} \quad p_2 = -\frac{k_2}{A_2}$$

- Pas d'éléments intégrateur (pas de pôle en 0)

a2) Système 2

Equation dynamiques :

$$A_1 \frac{d}{dt} h_1(t) = q_e(t) - k_1 [h_1(t) - h_2(t)]$$

$$A_2 \frac{d}{dt} h_2(t) = k_1 [h_1(t) - h_2(t)] - k_2 h_2(t)$$

Fonctions de transfert :

$$A_1 s H_1(s) = Q_e(s) - k_1 [H_1(s) - H_2(s)]$$

$$A_2 s H_2(s) = k_1 [H_1(s) - H_2(s)] - k_2 H_2(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{\frac{k_1}{k_1 + k_2}}{\frac{A_2}{k_1 + k_2} s + 1}$$

$$\frac{H_1(s)}{Q_e(s)} = \frac{\frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} \left[\frac{A_2}{k_1+k_2} s + 1 \right]}{\frac{A_1 A_2}{k_1 k_2} s^2 + 2s \sqrt{\frac{A_1 A_2}{k_1 k_2}} \left[\frac{A_1(k_1+k_2) + k_1 A_2}{2\sqrt{k_1 k_2} A_1 A_2} \right] + 1}$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_e(s)} = \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \frac{H_1(s)}{Q_e(s)}$$

Avec la définition des paramètres suivants :

$$K_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \quad K_3 = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \quad K_4 = \frac{1}{k_2}$$

$$\tau_2 = \frac{A_2}{k_1 + k_2} \quad \tau = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{k_1 k_2}} \quad \zeta = \frac{A_1(k_1 + k_2) + k_1 A_2}{2\sqrt{k_1 k_2} A_1 A_2}$$

on obtient les fonctions de transfert :

$$\begin{cases} \frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \\ \frac{H_1(s)}{Q_e(s)} = \frac{K_3[\tau_2 s + 1]}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \\ \frac{H_2(s)}{Q_e(s)} = \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \frac{H_1(s)}{Q_e(s)} = \frac{K_4}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \end{cases}$$

- Gain statique : $K = K_4 = 1/k_2$
- Constante de temps équivalente : $\tau = \sqrt{A_1 A_2 / k_1 k_2}$
- Pôles :

$$p_1 = \frac{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad p_2 = \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

- Pas d'élément intégrateur (pas de pôles en 0)

b) Comparaison des deux systèmes

Système	Ordre	Particularités	Gain statique	Pôles
1	2	Deux systèmes d'ordre 1 en série	$\frac{1}{k_2}$	Pas d'oscillation
2	2	Interactif : h_1 influence h_2 h_2 influence h_1	$\frac{1}{k_2}$	Oscillation pour $\zeta < 1$

5.8 Symboles utilisés

A	amplitude	[J/K]
C	capacité thermique	
$g(t)$	réponse impulsionnelle	
$G(s)$	fonction de transfert	
h	hauteur	[m]
j	$\sqrt{-1}$	
K	gain statique	
K_a	gain en accélération	

K_v	gain en vitesse	
$\mathcal{L}[\cdot]$	transformation de Laplace	
$\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$	transformation de Laplace inverse	
m	nombre de zéros	
n	nombre de pôles	
p	pôle ($p = \alpha \pm j\omega$)	
P	puissance	[W]
q	débit volumique	[m ³ /s]
R	résistance thermique	[K/W]
s	variable complexe de Laplace ($s = a + bj$)	
S	surface de section	[m ²]
t	temps	[s]
t_i	temps au point d'inflexion	
T	température	[K]
T	période	[s]
T_{ext}	température extérieur	[K]
u	entrée du système	
x	état du système	
y	sortie du système	
z	zéro	
α	Re(p)	
$\gamma(t)$	réponse indicielle	
$\delta(t)$	impulsion de Dirac au temps $t = 0$	
$\epsilon(t)$	saut unité au temps $t = 0$	
ζ	coefficient d'amortissement	
μ	multiplicité d'un pôle	
ϕ	déphasage	
τ	constante de temps	
ω	pulsation	
ω_0	pulsation propre	
$\bar{\omega}$	$\sqrt{1 - \zeta^2}/\tau$	

Indices et autres symboles

X_e	X d'entrée
X_s	X de sortie
X_0	condition initiale pour X
\bar{X}	X à l'état stationnaire
\dot{X}	dérivée de X par rapport au temps
δX	variation de X ; variable écart $X(t) - \bar{X}$

Commandes élémentaires

Nous étudions dans ce chapitre le comportement de systèmes commandés en rétroaction par des régulateurs simples, en particulier des régulateurs avec effets proportionnel, intégral et dérivé. La mise au point de tels régulateurs est également discutée.

En introduction, la section 6.1 présente différents types de commande, notamment la commande manuelle, la commande en boucle ouverte et la commande en boucle fermée. On étudie également la réduction de schémas fonctionnels.

6.1 Types de commande

On utilise la notation générale $u(t)$ pour la grandeur de commande, $y(t)$ pour la grandeur commandée, $y_c(t)$ pour la grandeur de consigne, $d(t)$ pour la perturbation, $e(t)$ pour l'erreur de commande, $G_P(s)$ pour l'effet de u sur y , $G_L(s)$ pour celui de d sur y et $G_R(s)$ pour la fonction de transfert du régulateur. Les effets des organes de mesure et de commande sont inclus dans $G_P(s)$. Le schéma fonctionnel général d'un système de commande est donné à la figure 6.1, lequel permet de visualiser trois situations importantes :

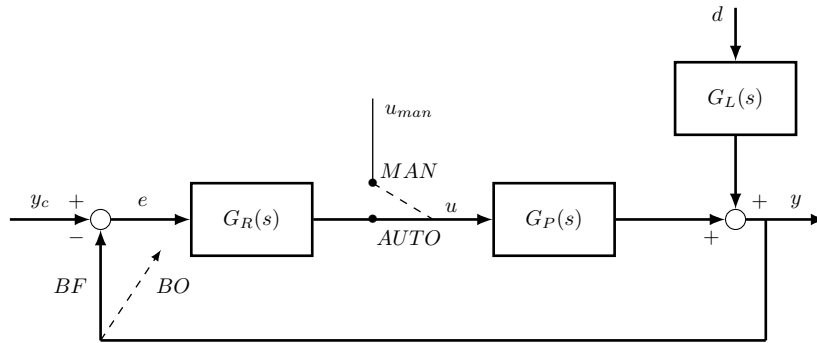


Figure 6.1. Schéma fonctionnel d'un système commandé (MAN : manuel, AUTO : automatique, BO : boucle ouverte, BF : boucle fermée).

- commande manuelle** avec $u = u_{man}$,
- commande en boucle ouverte** lorsque le signal de retour est déconnecté au niveau du comparateur,
- commande en boucle fermée** ou par rétroaction lorsque la boucle est fermée au niveau du comparateur.

Dans ce chapitre consacré à la commande, on va également travailler avec des variables écart, lesquelles vont donc représenter des déviations autour d'un point de fonctionnement de référence. On a ainsi la situation décrite à

la figure 6.2 avec les signaux u et y liés au procédé et la fonction de transfert G_P entre δu et δy . Comme dans le chapitre précédent, on va également noter par u et y les écarts δu et δy afin de simplifier les notations ; ainsi, une valeur de u en variable écart signifie en fait $\bar{u}_{ref} + u$ en variable absolue.

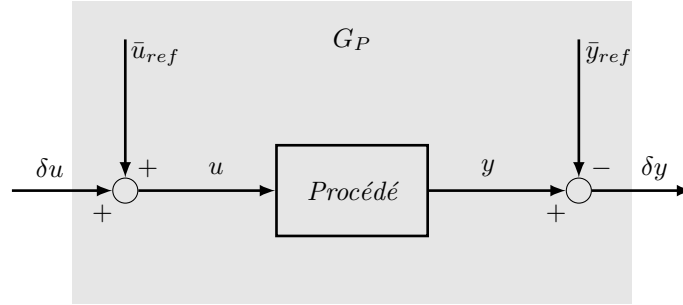


Figure 6.2. Relations entre variables absolues (u et y), variables de référence (\bar{u}_{ref} et \bar{y}_{ref}) et variables écart (δu et δy).

6.1.1 Commande manuelle

Il arrive parfois que l'opérateur doive (ou désire) prendre contrôle du système de commande. Pour ce faire, il existe un commutateur à la sortie du régulateur (fig. 6.1) : en mode « manuelle », le signal u est généré par l'opérateur à l'aide d'un potentiomètre ou d'un générateur de fonctions ; en mode « automatique », u correspond à la sortie du régulateur.

Pour passer d'un mode à l'autre sans-à-coup, on procède ainsi :

Commutation « manuel » / « automatique »

1. Opération en mode « manuel » à l'état stationnaire : $\bar{u}_{man}, \bar{y}_{man}$
 - 2a Ajuster la consigne telle que $y_c = y_{man}$, c'est-à-dire $\bar{e} = 0$
 - 2b Ajuster la commande a priori \bar{u}_{ref} (fig. 6.2) telle que $\bar{u}_{ref} = \bar{u}_{man}$
2. Commuter en « automatique » : $u(t) = \bar{u}_{ref} + 0 = \bar{u}_{man}$

Commutation « automatique » / « manuel »

1. Opération en mode « automatique » à l'état stationnaire : $\bar{u}_{aut}, \bar{y}_{aut}$
2. Ajuster la commande manuelle telle que $\bar{u}_{man} = \bar{u}_{aut}$
3. Commuter en « manuel » : $u(t) = \bar{u}_{man} = \bar{u}_{aut}$

6.1.2 Commande en boucle ouverte

Si la boucle est déconnectée au niveau du comparateur, la fonction de transfert entre la consigne y_c et la grandeur commandée y devient :

$$\left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BO} = G_R(s)G_P(s)$$

La commande est parfaite (c'est-à-dire y suit parfaitement la consigne y_c) si $G_R(s) = 1/G_P(s)$. Il y a cependant trois raisons principales qui, dans la pratique, limitent l'application d'une telle commande en boucle ouverte :

1. nécessité de connaître parfaitement le modèle du système à commander,
2. le régulateur $G_R(s)$ ainsi calculé est souvent un élément dynamique non causal nécessitant une prédiction et donc pas réalisable physiquement,
3. aucune action n'est prévue pour rejeter la perturbation d .

6.1.3 Commande en boucle fermée

Il s'agit d'une commande par rétroaction (en anglais *feedback*) pour laquelle le signal de commande u est calculé à partir d'une mesure de la *grandeur commandée* y . Le principe a été introduit au chapitre 1. La façon de calculer la fonction de transfert d'un système bouclé par rétroaction est présentée au paragraphe suivant.

6.1.4 Réduction de schémas fonctionnels

Il arrive souvent que l'on souhaite calculer une fonction de transfert globale à partir de plusieurs fonction de transferts se trouvant dans un système bouclé. Pour ce faire, on dispose de la règle simple suivante :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Fonction de transfert} \\ \text{entre entrée et sortie} \\ \text{d'un système bouclé} \end{array} \right] = \frac{\left[\begin{array}{l} \text{Produit des fonctions de transfert} \\ \text{en transmission direct (entrée} \rightarrow \text{sortie)} \end{array} \right]}{1 + \left[\begin{array}{l} \text{Produit des fonctions de} \\ \text{transfert dans la boucle} \end{array} \right]} \quad (6.1)$$

Illustrons cette règle à l'aide du système en boucle fermée de la figure 6.1. On peut écrire :

$$Y(s) = G_P(s)U(s) + G_L(s)D(s)$$

$$U(s) = G_R(s)E(s)$$

$$E(s) = Y_c(s) - Y(s)$$

- Pour calculer la fonction de transfert $Y(s)/Y_c(s)$, on pose $D(s) = 0$ et on obtient à partir des 3 équations précédentes :

$$Y(s) = G_P(s)G_R(s)[Y_c(s) - Y(s)]$$

ou

$$\begin{aligned} Y(s)[1 + G_P(s)G_R(s)] &= G_P(s)G_R(s)Y_c(s) \\ \frac{Y(s)}{Y_c(s)} &= \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Exemple Considérons l'exemple de la figure 6.3.

$$\text{Boucle intérieure : } \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)} = \frac{G_{R,2}(s)G_{OC}(s)G_{P,1}(s)}{1 + G_{R,2}(s)G_{OC}(s)G_{P,1}(s)G_{OM,1}(s)} = G_1(s)$$

$$\text{Boucle extérieure : } \frac{Y_4(s)}{Y_1(s)} = G_{BF}(s) = \frac{K_{OM}G_{R,1}(s)G_1(s)G_{P,2}(s)}{1 + G_{R,1}(s)G_1(s)G_{P,2}(s)G_{OM,2}(s)}$$

Pour le schéma fonctionnel de la figure 6.1, vérifier la validité des quatre relations suivantes :

$$\left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BO} = G_L(s) \quad \left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BF} = \frac{G_L(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} \quad (6.3)$$

$$\left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BO} = G_R(s)G_P(s) \quad \left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BF} = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} \quad (6.4)$$

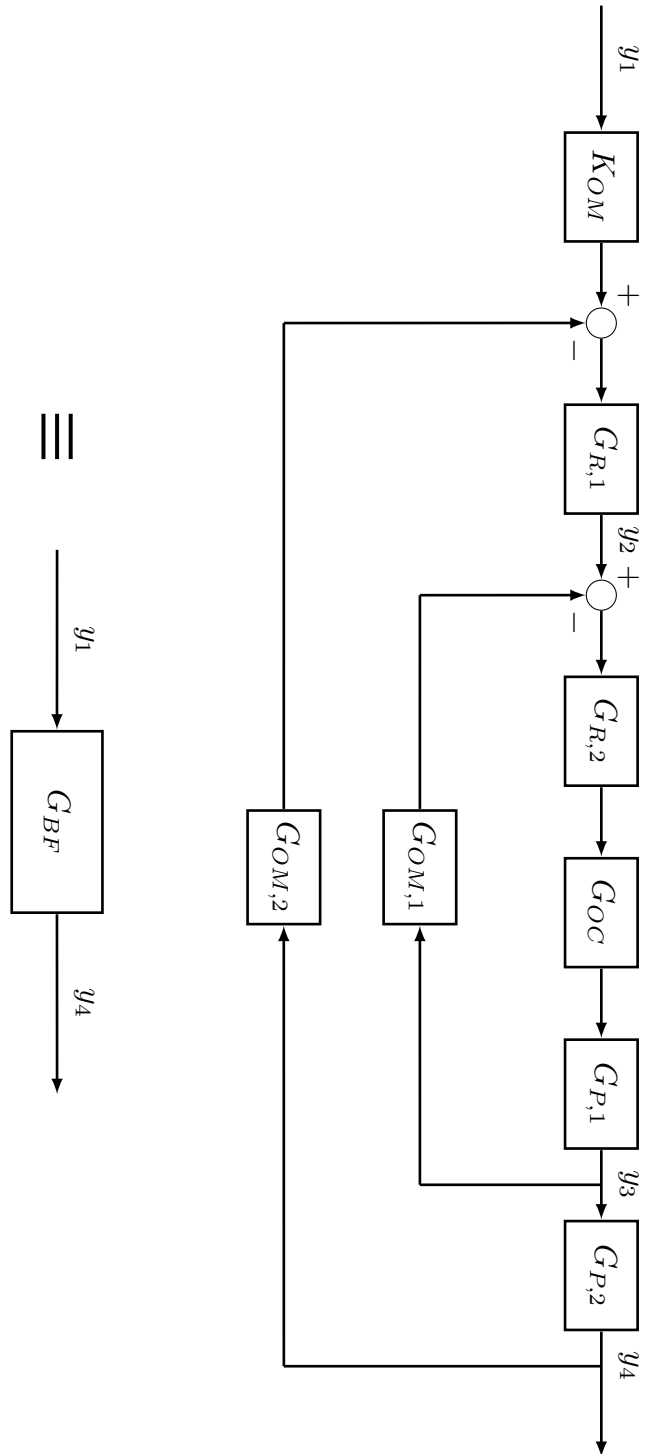


Figure 6.3. Réduction de schémas fonctionnels.

6.2 Exemple : régulation de température

Soit une cuve homogène de $1 [m^3]$ de volume et alimentée en continu par un débit d'eau de $0,05[m^3]$ qu'il convient de chauffer de 10 à $20 [^\circ C]$ par l'intermédiaire d'un corps de chauffe dont la puissance nominale vaut $35 [kW]$. On souhaite modéliser les divers éléments de la boucle de commande nécessaire à la régulation de la température de la cuve. On considère un régulateur proportionnel pour commander $T(t)$ en ajustant $P(t)$. Le schéma de l'installation commandée est donné à la figure 6.4 où M et N sont des signaux électriques de mesure et de commande.

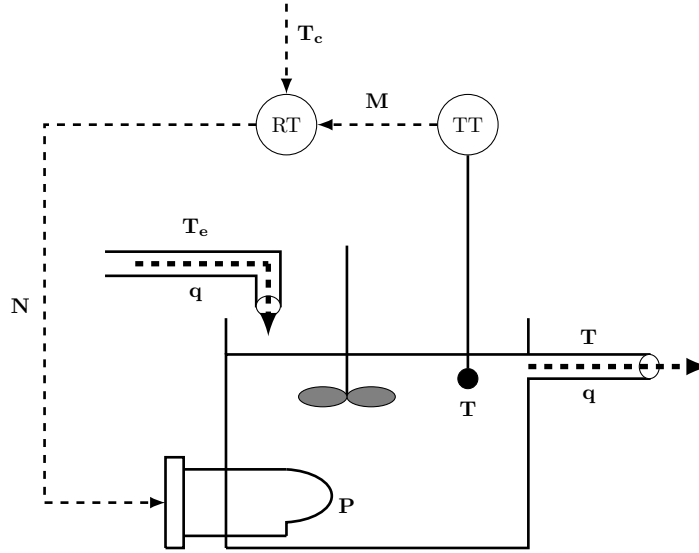


Figure 6.4. Régulation de la température d'une cuve (TT : transmetteur de température; RT : régulateur de température).

6.2.1 Modélisation

Un bilan thermique pour la cuve donne le modèle suivant :

$$V\rho c_p \frac{d}{dt}T(t) = q\rho c_p [T_e(t) - T(t)] + P(t) \quad (6.5)$$

avec les grandeurs suivantes :

- paramètres constants : V, ρ, c_p, q
- variables d'entrée (variables indépendantes) : $P(t), T_e(t)$
- variable d'état (variable dépendante) : $T(t)$
- variable de sortie (mesure) : $T(t)$

A l'état stationnaire, l'équation (6.5) devient :

$$0 = q\rho c_p (\bar{T}_e - \bar{T}) + P$$

d'où l'on tire : $\bar{T} = \bar{T}_e + (\bar{P}/q\rho c_p) = 20[^\circ C]$

Ecrire l'équation (6.5) en termes de variables écart par rapport à l'état stationnaire de référence.

6.2.2 Analyse des éléments de la boucle de commande

Le schéma fonctionnel pour la régulation de température de la cuve est donnée à la figure 6.5. M_c , M et N sont des signaux électriques normés, par exemple 0-5 [V] ou 4-20 [mA]. On étudie ci-dessous séparément chacun des blocs du schéma fonctionnel.

a) Cuve

La transformée de Laplace de l'équation 6.6 donne (en supposant le système initialement au repos) :

$$V\rho c_p sT(s) = q\rho c_p [T_e(s) - T(s)] + P(s)$$

ou

$$\left(\frac{V}{q}s + 1\right)T(s) = T_e(s) + \frac{1}{q\rho c_p}P(s) \quad (6.6)$$

Puisque la grandeur commandée $T(t)$ dépend de $T_e(t)$ et de $P(t)$, nous considérons deux fonctions de transfert distinctes :

- Fonction de transfert de la perturbation (load) $G_L(s)$ décrivant le comportement de $T(s)$ en fonction de $T_e(s)$ uniquement ; pour cela on pose $P(s) = 0$ dans l'équation (6.6) et, après réarrangement, on obtient :

$$G_L(s) := \frac{T(s)}{T_e(s)} = \frac{1}{(V/q)s + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

où

$$\tau = \frac{V}{q} = 20[\text{min}]$$

- Fonction de transfert du processus $G_P(s)$ décrivant le comportement de $T(s)$ en fonction de $P(s)$ uniquement ; pour cela on pose $T_e(s) = 0$ dans l'équation (6.6), et après réarrangement, on obtient :

$$G_P(s) := \frac{T(s)}{P(s)} = \frac{1/q\rho c_p}{(V/q)s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1} \text{ où } K = \frac{1}{q\rho c_p} = 0,29[C/kW]$$

b) Organe de mesure (thermocouple + conditionnement du signal électrique)

La caractéristique faiblement non linéaire de l'organe de mesure ainsi que son approximation linéaire sont représentées à la figure 6.6. Cette caractéristique représente une relation statique entre la température T et la tension générée correspondante M .

La constante de temps du thermocouple est d'environ 3 [s]

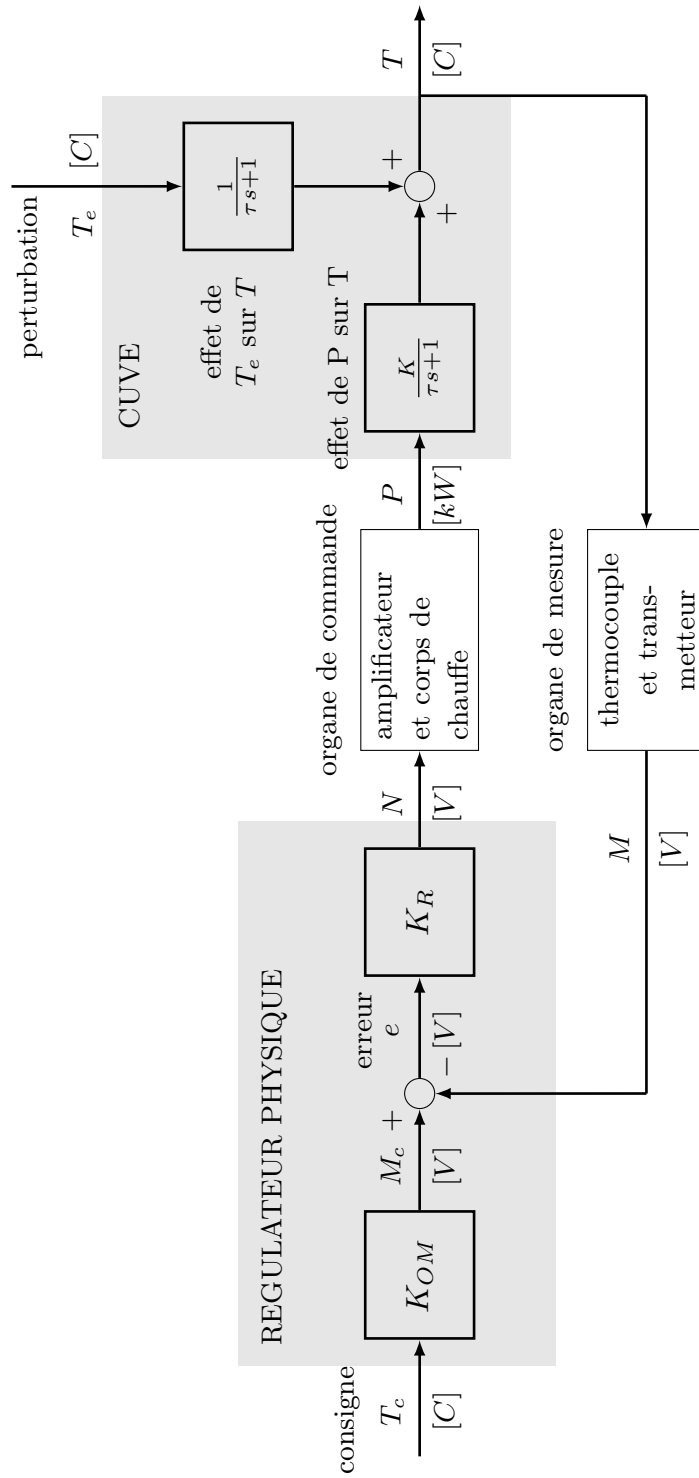


Figure 6.5. Schéma fonctionnel de la régulation de la température d'une cuve.

Un organe de mesure est souvent modélisé comme un système statique (d'ordre zéro) ou un système de premier ordre (cf. section 5.3). Ici :

$$G_{OM}(s) = \frac{M(s)}{T(s)} = \frac{K_{OM}}{(\tau_{OM}s + 1)}$$

avec

$$K_{OM} = \frac{5[V]}{50[C]} = 0,1[V/C] \text{ (obtenu à partir du graphe ci-dessous)}$$

$$\tau_{OM}(s) = 3[s] = 0,05[min]$$

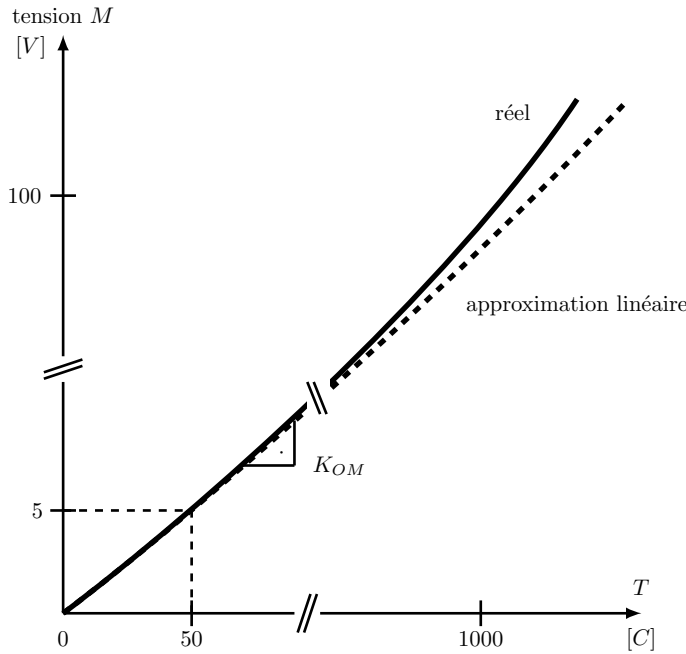


Figure 6.6. Caractéristique statique de l'organe de mesure.

c) Organe de commande (amplificateur de puissance + corps de chauffe)

La caractéristique statique de l'organe de commande est donnée à la figure 6.7.

Sa constante de temps est d'environ 2 [min].

Un organe de commande est souvent modélisé comme un système du premier ordre :

$$G_{OC}(s) = \frac{P(s)}{N(s)} = \frac{K_{OC}}{\tau_{OC}s + 1}$$

Ici : $K_{OC} = \frac{100[kW]}{5[V]} = 20[kW/V]$ (obtenu à partir du graphe ci-dessus) $\tau_{OC} = 2[min]$

d) Système à commander (cuve avec organe de mesure et organe de commande)

Le système à commander, tel que vu par le régulateur, correspond à la mise en série des trois éléments indiqués à la figure 6.8.

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)T(s)P(s)}{T(s)P(s)N(s)} = G_{OM}(s)G_P(s)G_{OC}(s)$$

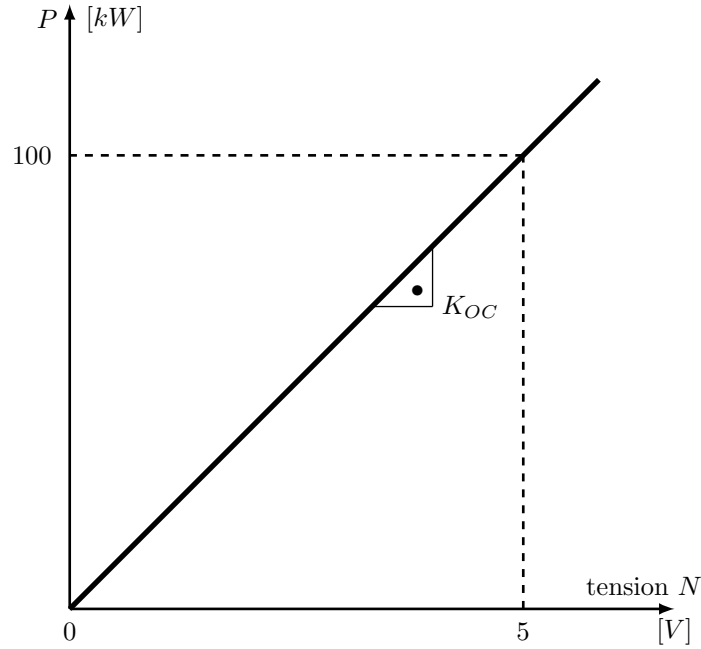


Figure 6.7. Caractéristique statique de l'organe de commande.

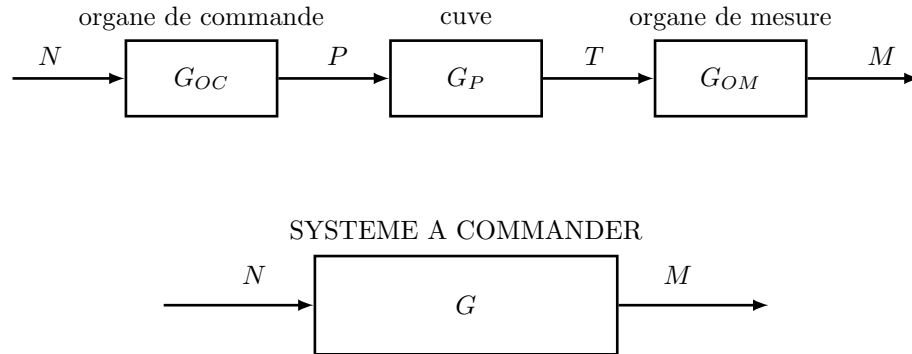


Figure 6.8. Système à commander comprenant la cuve et les organes de mesure et de commande.

$$= \left(\frac{0,1}{0,05s+1}\right)\left(\frac{0,29}{20s+1}\right)\left(\frac{20}{2s+1}\right) = \frac{0,58}{(0,05s+1)(20s+1)(2s+1)}$$

La dynamique du capteur (organe de mesure) étant négligeable (en effet $0,05 \ll 2$ ou 20), on peut écrire simplement :

$$G(s) \simeq K_{OM}G_P(s)G_{OC}(s) = \frac{0,58}{(20s+1)(2s+1)}$$

Utiliser des arguments graphiques pour justifier la simplification précédente. Peut-on également négliger K_{OM} ?

- e) Régulateur Le régulateur calcule le signal de commande N sur la base de l'erreur de commande $e = M_c - M$. Un régulateur proportionnel possède la fonction de transfert suivante :

$$G_R(s) = \frac{N(s)}{E(s)} = K_R$$

où K_R représente le gain du régulateur.

f) Système bouclé

Le système bouclé, avec toutes les fonctions de transfert d'intérêt, est donné à la figure 6.9. Le système

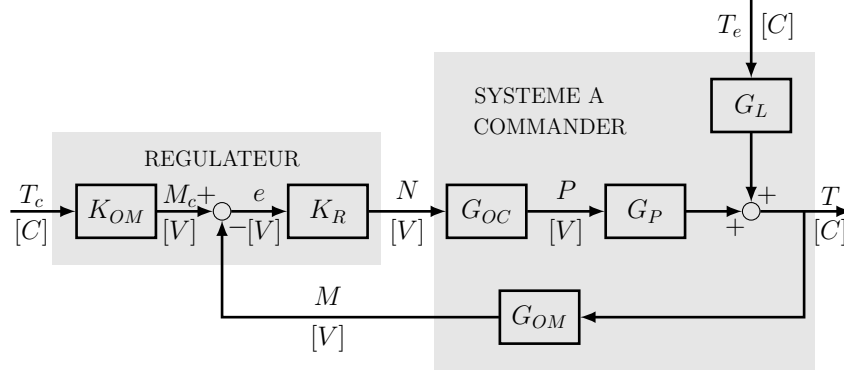


Figure 6.9. Schéma fonctionnel de la commande d'une cuve

bouclé représente un système dynamique dont l'étude constitue l'objet de l'automatique. L'objectif principal est le dimensionnement du régulateur (ici le choix du gain K_R) en fonction des caractéristiques du système à commander et du système bouclé désiré.

En appliquant la règle de la section précédente, on peut écrire les fonctions de transferts suivantes :

- Effet de la consigne T_c sur la grandeur commandée T :

$$\left. \frac{T(s)}{T_c(s)} \right|_{BF} = \frac{K_{OM} K_R G_{OC}(s) G_P(s)}{1 + K_R G_{OC}(s) G_P(s) G_{OM}(s)} \quad (6.7)$$

- Effet de la perturbation T_e sur la grandeur commandée T :

$$\left. \frac{T(s)}{T_e(s)} \right|_{BF} = \frac{G_{LS}}{1 + K_R G_{OC}(s) G_P(s) G_{OM}(s)} \quad (6.8)$$

Etant donnés $G_P(s)$, $G_L(s)$, $G_{OC}(s)$ et $G_{OM}(s)$, la synthèse du régulateur consiste à choisir K_R de façon à avoir une solution acceptable au problème d'asservissement (6.7) et/ou de régulation (6.8). D'où l'intérêt d'étudier le comportement dynamique de $T(s)/T_c(s)$ et de $T(s)/T_e(s)$.

Par définition, les variables du schéma fonctionnel de la figure 6.9 représentent des écarts autour de l'état stationnaire de référence. Pour déterminer cet état stationnaire, on a spécifié les valeurs numériques des deux variables indépendantes \bar{P} et \bar{T}_e (cf. §6.2.1). Pour le système en boucle fermée, l'état stationnaire sera déterminé en spécifiant les valeurs numériques des deux variables indépendantes \bar{T}_c et \bar{T}_e (fig. 6.9). Il en résultera les valeurs numériques de \bar{M}_c , \bar{M} , \bar{e} , \bar{N} , \bar{P} et \bar{T} .

6.3 Commande tout-ou-rien

Considérons la régulation de la température d'une salle équipée d'un radiateur avec thermostat à deux positions : « ouvert » / « fermé », c'est-à-dire que le radiateur chauffe ou ne chauffe pas. La consigne est $T_c(t)$ et la température effective dans la pièce est $T(t)$. L'erreur $e(t) = T_c(t) - T(t)$ permet de déterminer la puissance $P(t)$. Comme cette dernière ne peut prendre que deux valeurs P_{max} ou P_{min} (dans ce cas particulier $P_{min} = 0$), on obtient la loi de commande suivante :

$$P(t) = \begin{cases} P_{max} & \text{pour } e(t) > 0 \\ P_{min} & \text{pour } e(t) \leq 0 \end{cases}$$

Cette condition exprime une **commande tout-ou-rien** ou on/off. Le radiateur sera « on » lorsque l'erreur est positive ($T < T_c$) et « off » lorsque l'erreur est négative ou nulle ($T \geq T_c$). La variable commandée oscillera

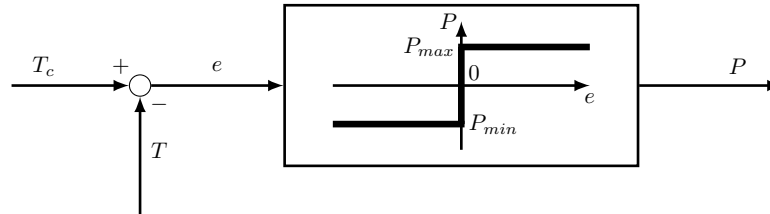


Figure 6.10. Commande tout-ou-rien

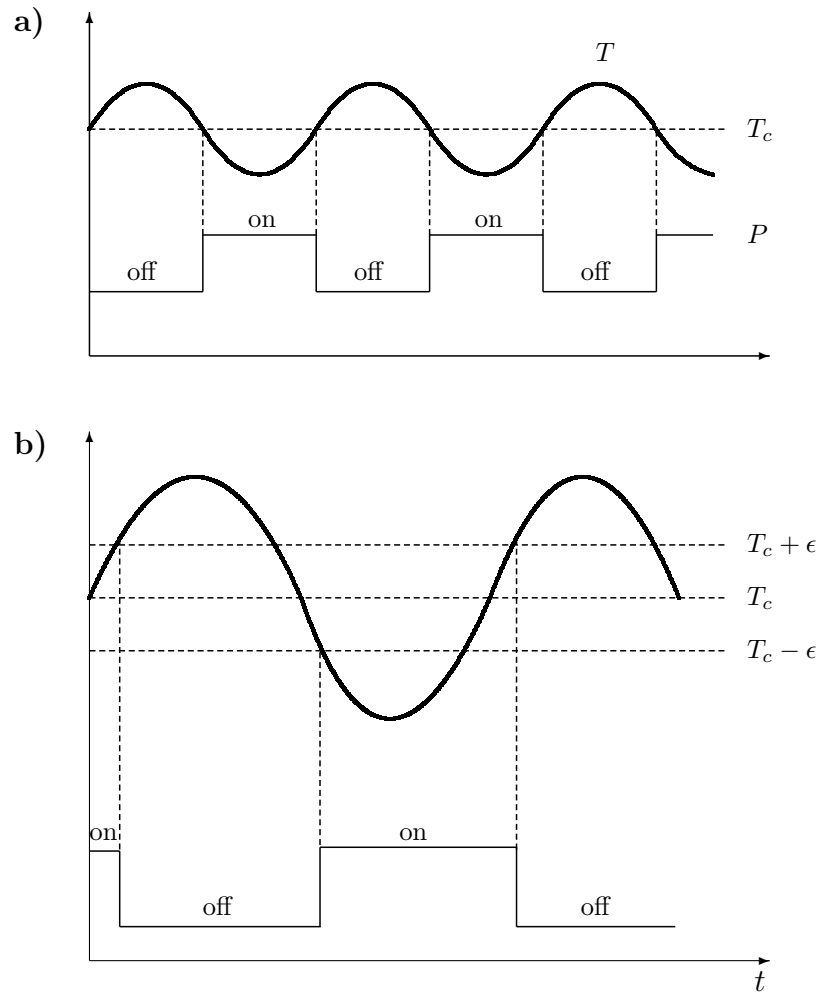


Figure 6.11. Comportement qualitatif d'une commande tout-ou-rien : a) sans hystérésis, b) avec hystérésis.

autour de la valeur de consigne avec une amplitude et une fréquence qui dépendront de l'ordre et de la valeur constante de temps du système à commander.

Pour éviter de passer très souvent de P_{min} à P_{max} , et inversement, dès que l'erreur change de signe (c'est-à-dire

afin de réduire le nombre de commutations on/off par là l'usure de l'organe de commande), on introduit souvent une hystérésis de largeur 2ϵ (Fig. 6.12).

La commande tout-ou-rien est simple, bon marché et utile en l'absence d'une connaissance précise de la dynamique du processus. Elle est très utilisée pour des commandes simples dans l'industrie et les applications courantes (systèmes de chauffage et de conditionnement de l'aire, réfrigérateurs, etc.). Malgré son apparente simplicité, la commande tout-ou-rien est difficile à analyser du fait de sa non-linéarité.

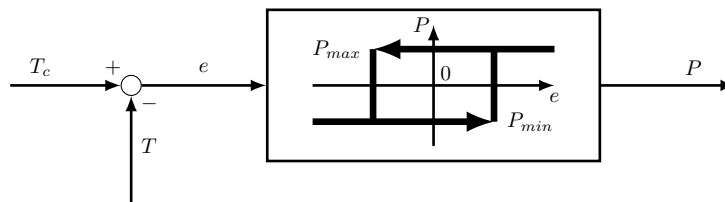


Figure 6.12. Commande tout-ou-rien avec hystérésis.

Identifier l'élément non linéaire de la commande tout-ou-rien. Pourquoi l'analyse est-elle difficile ? Ecrire la fonction de transfert pour une commande tout-ou-rien. Dessiner qualitativement la réponse temporelle d'un système du premier ordre commandé à l'aide d'un régulateur tout-ou-rien avec hystérésis. Quelle est l'influence de ϵ sur l'amplitude et la fréquence des oscillations ?

6.4 Commande proportionnelle

Le plus souvent, il ne saurait être question d'agir comme dans l'exemple précédent par « tout-ou-rien » car le système est ajusté par à-coups. Il est préférable de pondérer l'action du régulateur. Par exemple, celle-ci peut être proportionnelle à l'écart de commande $e(t)$.

6.4.1 Fonction de transfert du régulateur proportionnel

La sortie $N(t)$ d'un régulateur proportionnel dépend de son entrée $e(t)$ selon l'équation suivante :

$$N(t) = K_R e(t) \quad (6.9)$$

Ceci donne la fonction de transfert suivante pour le régulateur proportionnel :

$$G_R(s) = \frac{N(s)}{E(s)} = K_R \quad (6.10)$$

K_R représente la **gain** du régulateur. Dans l'industrie, on rencontre souvent une indication de la **bande proportionnelle** (BP en % = $100/K_R$). L'équation (6.9) indique la relation entre les déviations $e(t)$ et $N(t)$, lesquelles sont calculées à partir de l'état stationnaire de référence \bar{e}_{ref} et \bar{N}_{ref} . L'erreur de référence $\bar{e}_{ref} = \bar{y}_{c,ref} - \bar{y}_{ref}$ est typiquement nulle. Le signal de référence \bar{N}_{ref} est appelé **commande à priori** et représente le signal de commande réel lorsque l'erreur est nulle.

Il est important de ne pas oublier la commande a priori dans une implantation pratique car, lorsque l'erreur de commande est nulle, il convient d'appliquer la tension \bar{N}_{ref} (et non pas 0) à l'actionneur. On voit aussi que \bar{N}_{ref} doit être calculé de façon à ce que, à l'état stationnaire, l'erreur de commande correspondante \bar{e}_{ref} soit nulle. On obtient ainsi la situation de la figure 6.13.

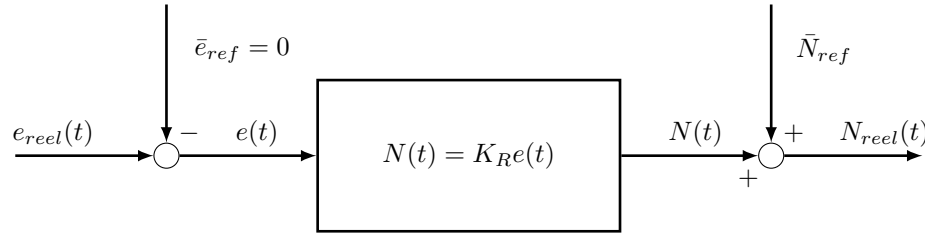


Figure 6.13. Régulateur proportionnel avec la commande a priori \bar{N}_{ref} correspondant à $\bar{e}_{ref} = 0$.

6.4.2 Statisme

Définition On appelle **statisme**, ou erreur statique, l'erreur résiduelle (permanente) entre la grandeur de consigne et la grandeur commandée pour $t \rightarrow \infty$:

$$\bar{e} := \lim_{t \rightarrow \infty} [T_c(t) - T(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[T_c(s) - T(s)]$$

On cherche souvent à éliminer le statisme afin d'améliorer la précision en régime permanent ; on dit qu'un système bouclé n'a pas de statisme si $\bar{e} = 0$.

L'équation (6.9) montre que si l'on veut, avec un régulateur P , obtenir une valeur de $N(t)$ différente de zéro (c'est-à-dire un signal de commande réel différent de \bar{N}_{ref}), une certaine erreur est nécessaire.

Avec un régulateur proportionnel, une certaine erreur $e(t)$ est nécessaire afin de pouvoir générer une grandeur de commande différente de celle à l'état de référence. Ceci est souvent nécessaire suite à un changement durable de consigne ou à une perturbation durable comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple

Supposons que le système bouclé de la section 6.2 soit à l'état stationnaire de référence avec, en variables absolues :

$$\begin{aligned} \bar{T}_{c,ref} = \bar{T}_{ref} = 20[C] \quad \text{c'est-à-dire} \quad \bar{e}_{ref} = 0 \\ \bar{N}_{ref} = \frac{\bar{P}_{ref}}{K_{OC}} = 1,75[V] \quad \bar{P}_{ref} = 35[kW] \end{aligned}$$

Le système est bouclé par un régulateur P et on désire imposer une nouvelle température de consigne. On aimerait donc que le régulateur amène le système à un nouvel état stationnaire, si possible sans statisme, caractérisé par :

$$\bar{T}_c = \bar{T} = 25[C] \quad \text{c'est-à-dire} \quad \bar{e} = 0$$

Pour cela, il faut $\bar{N} = 2,62[V]$ et $\bar{P} = 52,5[kW]$.

Or, pour générer un signal de commande réel $\bar{N} = 2,62[V]$, donc différent de $\bar{N}_{ref} = 1,75[V]$, il faut qu'une certaine erreur existe puisque $\bar{N} = \bar{N}_{ref} + K_R \bar{e}$. Avec un régulateur proportionnel, une erreur statique nulle ($\bar{e} = 0$) donnera toujours $\bar{N} = \bar{N}_{ref}$ et donc $\bar{T} = \bar{T}_{ref} = \bar{T}_{c,ref}$. Par conséquent, pour avoir $\bar{T} \neq \bar{T}_{ref}$, il est nécessaire d'avoir un statisme ($\bar{e} \neq 0$). L'erreur statique qui résulte d'un saut de consigne est représentée graphiquement à la figure 6.14 (une description quantitative est donnée au §6.4.4).

Dessiner qualitativement le comportement du signal de commande $N(t)$.

6.4.3 Saturation du régulateur

A partir de l'équation (6.9), le signal réel de commande (donc en variable absolue) peut s'écrire :

$$N_{réel}(t) = \bar{N}_{ref} + K_R e(t)$$

En pratique, le signal $N_{réel}$ est borné entre 0 et 5[V]. Ainsi, si le terme $K_R e$ est grand en valeur absolue, il y aura saturation de $N_{réel}(t)$, comme représenté à la figure 6.15. On cherche donc à travailler dans les régions de

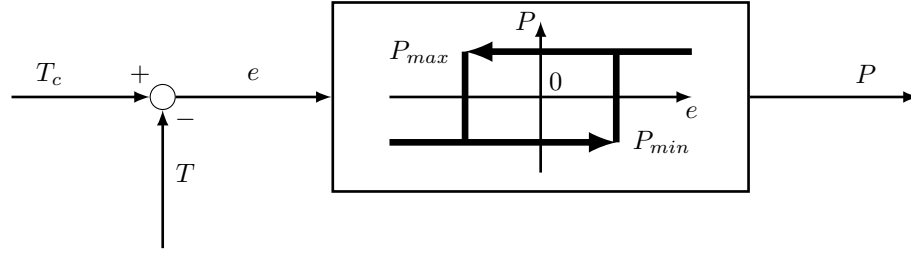


Figure 6.14. Réponse de la température de la cuve à un saut de consigne de 5°C (régulateur P). Les variables expriment des déviations par rapport au point de référence.

non saturation.

La commande tout-ou-rien de la figure 6.10 constitue en fait une commande proportionnelle de gain infini et avec des saturations à P_{min} et P_{max} .

Le régulateur P avec saturation est-il linéaire ?

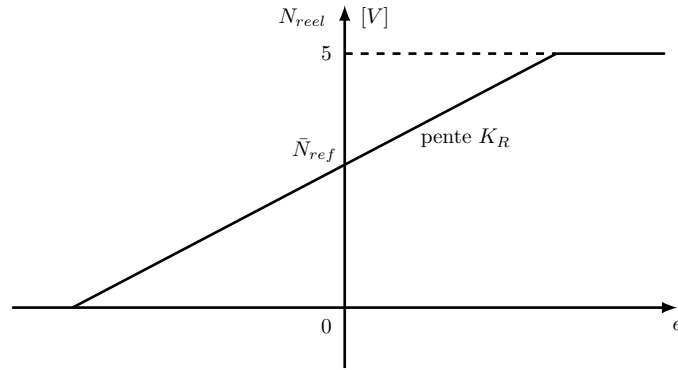


Figure 6.15. Caractéristique d'un régulateur P avec effets de saturation.

6.4.4 Effet de la consigne $T_c(t)$ sur $T(t)$

Pour les valeurs numériques de la section 6.2, l'équation (6.7) donne pour un régulateur P :

$$G_{BF}(s) = \left. \frac{T(s)}{T_c(s)} \right|_{BF} = \frac{0,58K_R}{40s^2 + 22s + (1 + 0,58K_R)}$$

ce qui permet de définir :

$$\begin{aligned} K_{BF} &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{BF}(s) = \frac{0,58K_R}{1 + 0,58K_R} \\ \tau_{BF} &= \sqrt{\frac{40}{1 + 0,58K_R}} \xi_{BF} = \frac{1,74}{\sqrt{1 + 0,58K_R}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

a) Pour $K_R = 1$:

$$\begin{aligned} G_{BF}(s) &= \frac{0,58}{40s^2 + 22s + 1,58} \quad \text{d'où} \quad K_{BF} = 0,37 \left[\frac{C}{C} \right] \\ \tau_{BF} &= 5,03 [min] \\ \xi_{BF} &= 1,38 \end{aligned}$$

b) Pour $K_R = 10$:

$$G_{BF}(s) = \frac{5,8}{40s^2 + 22s + 6,8} \quad \text{d'où} \quad K_{BF} = 0,85 \left[\frac{C}{C} \right]$$

$$\tau_{BF} = 2,42 [\text{min}]$$

$$\xi_{BF} = 0,66$$

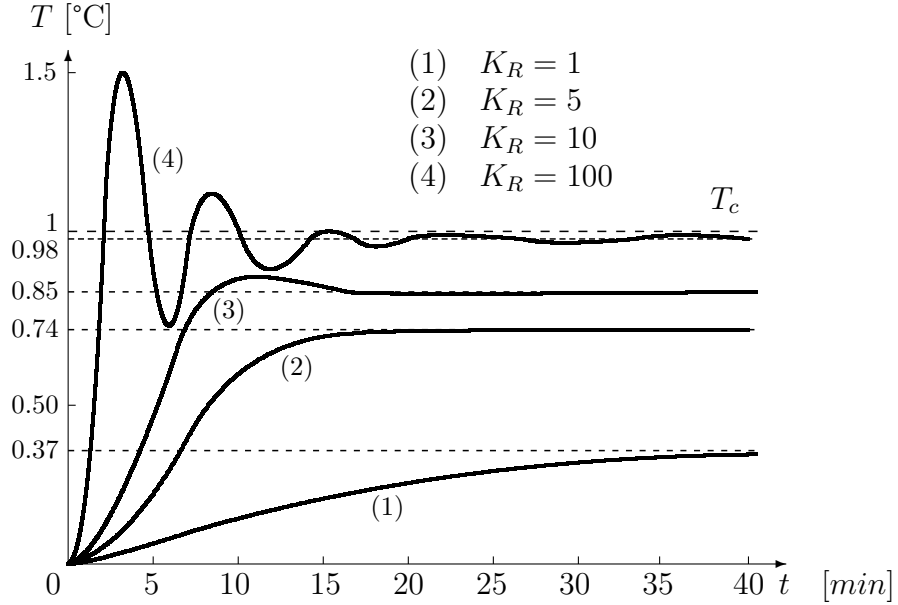


Figure 6.16. Réponse du système bouclé à un saut de consigne pour différents régulateurs, P .

Le système est-il oscillant pour $K_R = 1$? Et pour $K_R = 10$?

Répéter le calcul pour $K_R = 5$ et $K_R = 100$.

La réponse $T(t)$ à un saut unité de $T_c(t)$ pour différents régulateurs P est donnée à la figure 6.16.

Qu'elle est l'effet de K_R sur l'erreur statique ?

Qu'elle est l'effet de K_R sur K_{BF} , τ_{BF} et ξ_{BF} ?

6.4.5 Effet de la perturbation $T_e(t)$ sur $T(t)$

a) En boucle ouverte

$$G_{BO}(s) = \left. \frac{T(s)}{T_e(s)} \right|_{BO} = G_L(s) = \frac{1}{20s + 1} \left[\frac{C}{C} \right]$$

b) En boucle fermée Pour les valeurs numériques de la section 6.2, l'équation (6.8) donne pour un régulateur P :

$$G_{BF}(s) = \left. \frac{T(s)}{T_e(s)} \right|_{BF} = \frac{2s + 1}{40s^2 + 22s + 1 + 0,58K_R}$$

d'où

$$K_{BF} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{BF}(s) = \frac{1}{1 + 0,58K_R} \quad (6.12)$$

La réponse indicielle, c'est-à-dire la réponse $T(t)$ à un saut unité de la perturbation $T_e(t)$, est donnée à la figure 6.17.

Quelle est l'effet de K_R sur l'erreur statique ?

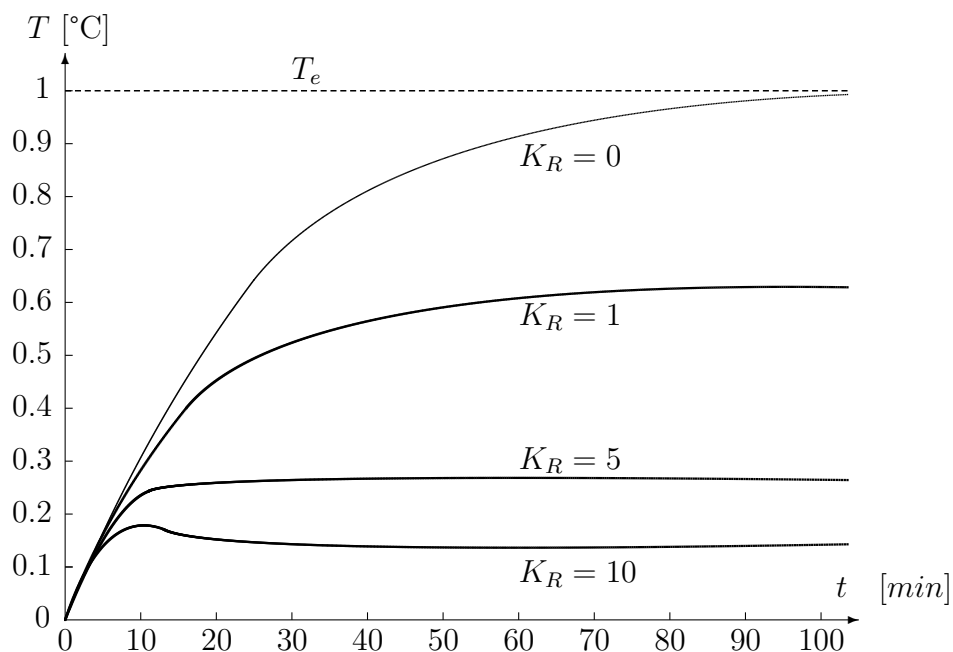


Figure 6.17. Réponse du système bouclé à un saut unité de perturbation pour différents régulateurs P ($K_R = 0$: système en boucle ouverte).

6.4.6 Action directe ou inverse ?

Jusqu'à présent, nous avons considéré le gain du régulateur comme une grandeur positive ; cependant, un régulateur doit sans cas posséder un gain négatif.

Considérons le régulateur P de la figure 6.18 avec :

$$N(t) = K_R e(t) = K_R [M_c(t) - M(t)] \quad (6.13)$$

On distingue deux cas en relation avec l'équation (6.13) :

- a) $K_R > 0$ Action **inverse** du régulateur
 $N(t)$ augmente quand $M(t)$ diminue, et inversement
- b) $K_R < 0$ Action **directe** du régulateur
 $N(t)$ augmente quand $M(t)$ augmente et inversement

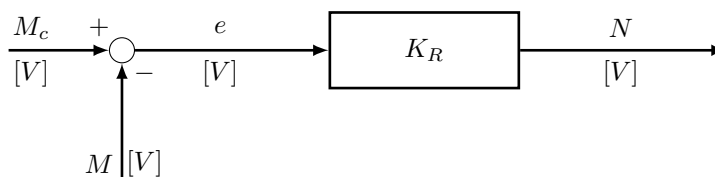


Figure 6.18. Régulateur P .

Exemple : Régulation de niveau dans une cuve

Soit l'installation de la figure 6.19. La vanne peut être de deux types :

- Vanne « air-to-open » (un signal est nécessaire pour ouvrir la vanne ; l'organe de commande a un gain statique positif). Si l'énergie pneumatique vient à manquer, la vanne se ferme automatiquement ; une telle vanne est utilisée pour des raisons de sécurité pour commander un débit d'alimentation par exemple. Seul un régulateur à **action inverse** convient ; en effet :

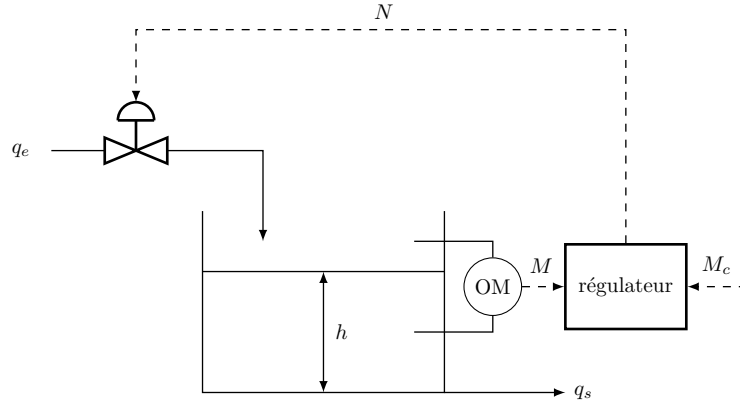


Figure 6.19. Régulation de niveau dans une cuve.

Lorsque $h(t) \nearrow \Rightarrow M(t) \nearrow \Rightarrow N(t) \searrow \Rightarrow q_e(t) \searrow \Rightarrow h(t) \searrow$

(action corrective dans la bonne direction)

(régulateur à action directe : si $h(t) \nearrow \Rightarrow M(t) \nearrow \Rightarrow N(t) \nearrow \Rightarrow q_e(t) \nearrow \Rightarrow h(t) \nearrow$!)

- Vanne « air-to-close » (un signal est nécessaire pour fermer la vanne; l'organe de commande a un gain statique négatif). Si l'énergie pneumatique vient à manquer, la vanne s'ouvre automatiquement; une telle vanne est utilisée par exemple pour un débit de réfrigération. Seul un régulateur à **action direct** convient; en effet :

lorsque $h(t) \nearrow \Rightarrow M(t) \nearrow \Rightarrow N(t) \nearrow \Rightarrow q_e(t) \searrow \Rightarrow h(t) \searrow$

(action corrective dans la bonne direction)

(régulateur à action inverse : si $h(t) \nearrow \Rightarrow M(t) \nearrow \Rightarrow N(t) \searrow \Rightarrow q_e(t) \nearrow \Rightarrow h(t) \nearrow$!)

6.5 Commande intégrale

La sortie $N(t)$ d'un régulateur intégral dépend de son entrée $e(t)$ selon l'équation :

$$N(t) = \frac{1}{\tau_1} \int_0^t e(t') dt' \quad (6.14)$$

où τ_1 est la **constante de temps d'intégration**.

Avantages

L'intégrale dans l'équation (6.14) représente une somme pondérée de toutes les erreurs passées; le régulateur I considère donc le *passé* aussi bien que le présent pour calculer le signal de commande.

$N(t)$ varie aussi longtemps que $e(t) \neq 0$ et n'atteint donc pas de nouvel état stationnaire avant que l'erreur de commande soit nulle. De ce fait, ce nouvel état stationnaire n'exhibe pas d'erreur statique. Il est donc possible d'obtenir \bar{N} différent de zéro et \bar{e} nulle. Il s'ensuit que *la commande intégrale permet d'éliminer le statisme*.

Inconvénient

La commande intégrale ne répond pas suffisamment à l'erreur instantanée vu qu'elle tient en mémoire toute l'erreur passée. En d'autres termes, l'erreur instantanée est pondérée trop faiblement. Le régulateur I est de ce fait très peu utilisé en pratique; on lui préfère le régulateur PI , lequel possède un terme P en plus d'élément I (cf. section 6.7).

6.6 Commande dérivée

La sortie $N(t)$ d'un régulateur dérivé dépend de son entrée $e(t)$ selon l'équation suivante :

$$N(t) = \tau_D \frac{d}{dt} e(t) \quad (6.15)$$

où τ_D est la **constante de dérivation**.

La dérivée $\frac{d}{dt}e(t)$ indique la variation de l'erreur, c'est-à-dire la tendance de celle-ci à augmenter ou à diminuer. Avantage La dérivée dans l'équation (6.15) signifie que l'on considère la tendance de l'erreur à augmenter ou à diminuer. De ce fait, on porte un *regard sur le futur* (effet de prévision). On verra que cet effet de prévision augmente en général la stabilité du régulateur.

Inconvénient

On n'emploie que très rarement un régulateur dérivé tout seul ; on lui associe généralement un terme P et souvent également un terme I (cf. section 6.8).

6.7 Commande proportionnelle-intégrale

6.7.1 fonction de transfert du régulateur PI

En combinant les deux effets, proportionnel et intégrale, on obtient l'équation suivante décrivant le comportement de la sortie $N(t)$ en fonction de l'entrée $e(t)$:

$$N(t) = K_R \left[e(t) + \frac{1}{\tau_1} \int_0^t e(t') dt' \right] \quad (6.16)$$

Ce type de régulateur est très utilisé dans l'industrie chimique.

Avec la transformée de Laplace de l'équation (6.16) :

$$N(s) = K_R \left[E(s) + \frac{1}{\tau_1 s} E(s) \right]$$

la fonction de transfert du régulateur PI devient :

$$G_R(s) = \frac{N(s)}{E(s)} = K_R \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right) \quad (6.17)$$

Cette dernière est-elle-linéaire ? Quel est son ordre ?

6.7.2 Effet de la consigne $T : c(t)$ sur $T(t)$

Pour les valeurs numériques de la section 6.2, l'équation (6.7) donne pour un régulateur PI :

$$G_{BF}(s) = \frac{T(s)}{T_c(s)} \Big|_{BF} = \frac{0,58K_R(\tau_1 s + 1)}{40\tau_1 s^3 + 22\tau_1 s^2 + \tau_1(1 + 0,58K_R)s + 0,58K_R} \quad (6.18)$$

d'où

$$K_{BF} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{BF}(s) = 1 \quad (6.19)$$

Une comparaison des équation (6.11) et (6.19) montre bien que le terme I régulateur permet l'élimination du statisme ; en effet, $K_{BF} = 1$ signifie ici que, grâce à la commande PI , une augmentation de 1 [°C] de la valeur de consigne $T_c(t)$ implique également, au nouvel état stationnaire, une augmentation de 1 [°C] de la grandeur commandée $T(t)$.

La réponse $T(t)$ à un saut unité de $T_c(t)$ pour différents régulateurs P et PI est donnée à la figure 6.20.

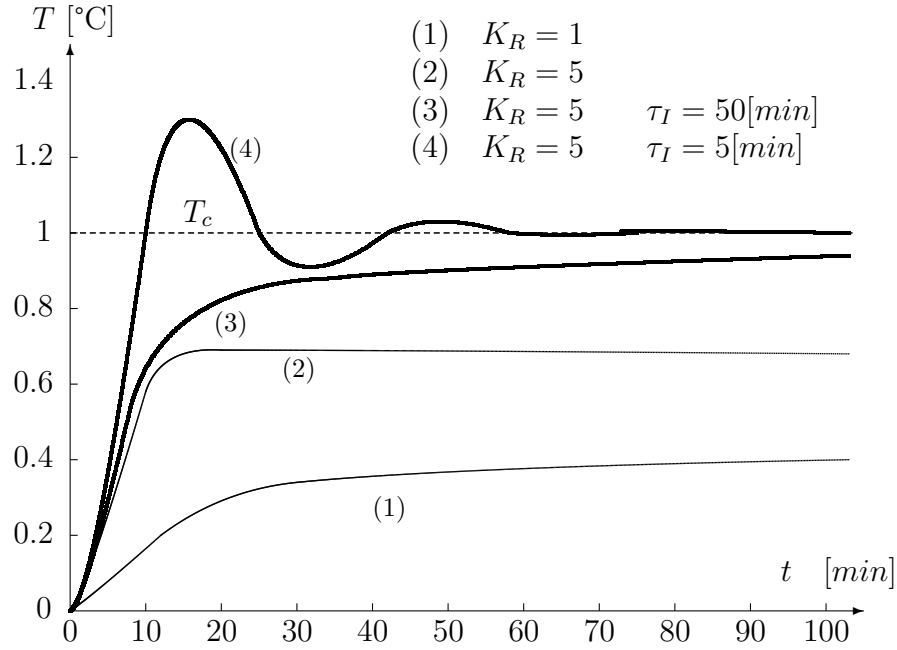


Figure 6.20. Réponse du système bouclé à un saut de consigne pour différents régulateurs P et PI .

6.7.3 Effet de la perturbation $T_e(t)$ sur $T(t)$

Pour les valeurs numériques de la section 6.2, l'équation (6.8) donne pour un régulateur PI :

$$G_{BF}(s) = \frac{T(s)}{T_e(s)} \Big|_{BF} = \frac{\tau_1 s(2s + 1)}{40\tau_1 s^3 + 22\tau_1 s^2 + \tau_1(1 + 0,58K_R)s + 0,58K_R} \quad (6.20)$$

d'où

$$K_{BF} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{BF}(s) = 0 \quad (6.21)$$

Une comparaison des équation (6.12) et (6.21) montre que le terme I du régulateur permet l'élimination du statisme ; en effet , dans le cas du régulateur PI , lorsque $t \rightarrow \infty$, la perturbation constante T_e n'influence plus la grandeur commandée $T(t)$.

La réponse $T(t)$ à un saut unité de $T_e(t)$ pour différents régulateurs P et PI est donnée à la figure 6.21.

A la figure 6.21, laquelle des courbes (3) et (4) représente la réponse la plus rapide ? Quelle conclusion en tirer pour le choix de τ_1 ?

6.8 Commande proportionnelle-intégrale-dérivée

6.8.1 Fonction de transfert PID

La sortie $N(t)$ d'un régulateur PID dépend de son entrée $e(t)$ selon l'équation suivante :

$$N(t) = K_R \left[e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' + \tau_D \frac{d}{dt} e(t) \right] \quad (6.22)$$

terme P terme I terme D Remarque : le gain K_R multiplie les trois termes du régulateur PID .

La transformée de Laplace de l'équation (6.22) permet d'obtenir la fonction de transfert du régulateur PID :

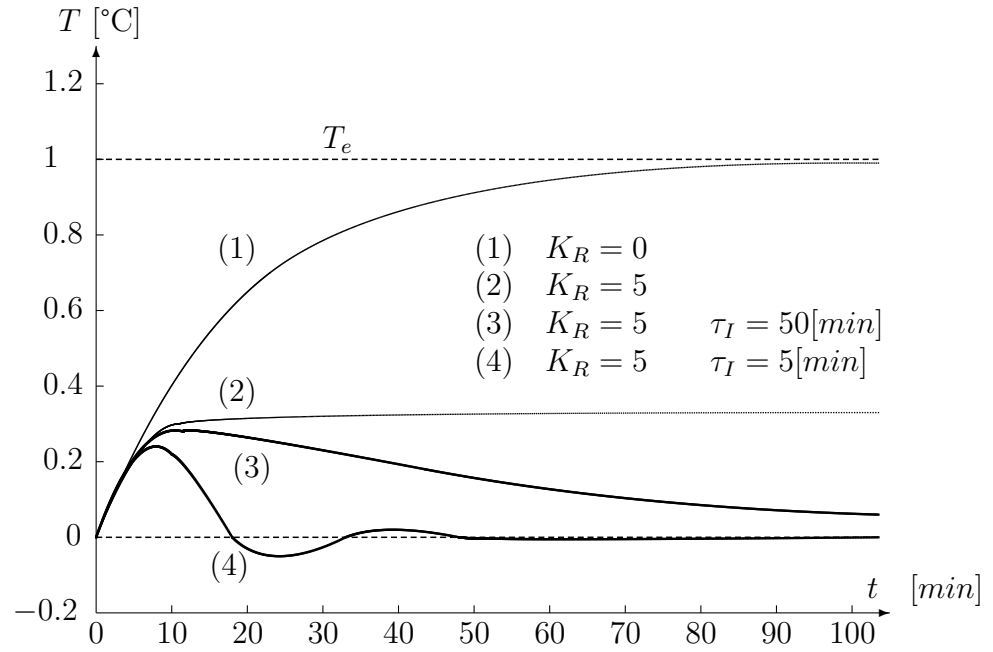


Figure 6.21. Réponse du système bouclé à un saut de perturbation pour différents régulateurs P et PI .

$$G_R(s) = \frac{N(s)}{E(s)} = K_R \left[1 + \frac{1}{\tau_1 s} + \tau_D s \right] = K_R \left[\frac{\tau_1 \tau_D s^2 + \tau_1 s + 1}{\tau_1 s} \right] \quad (6.23)$$

Cependant, le terme $\tau_D s$ n'est pas réalisable physiquement car le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur (cf. section 3.6.2) ; c'est pourquoi, en pratique, on utilisera l'approximation suivante :

$$G_R(s) = \frac{N(s)}{E(s)} = K_R \left[1 + \frac{1}{\tau_1 s} + \frac{\tau_D s}{\alpha s + 1} \right] \quad (6.24)$$

avec $\alpha \ll \tau_D$

6.8.2 Effet de la consigne $T_c(t)$ sur $T(t)$

Pour les valeurs numériques de la section 6.2, l'équation (6.7) donne pour un régulateur PID :

$$G_{BF}(s) = \frac{T(s)}{T_c(s)} \Big|_{BF} = \frac{0,58K_R(1 + \tau_1 s + \tau_1 \tau_D s^2)}{40\tau_1 s^3 + 22\tau_1 s^2 + \tau_1(1 + 0,58K_R)s + 0,58K_R} \quad (6.25)$$

d'où

$$K_{BF} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{BF}(s) = 1 \quad (6.26)$$

La réponse $T(t)$ à un saut unité de $T_c(t)$ pour différents régulateurs PI et PID est donnée à la figure 6.22.

6.8.3 Effet de la perturbation $T_e(t)$ sur $T(t)$

Pour les valeurs numériques de la section 6.2, l'équation (6.8) donne pour un régulateur PID :

$$G_{BF}(s) = \frac{T(s)}{T_e(s)} \Big|_{BF} = \frac{\tau_1 s(2s + 1)}{40\tau_1 s^3 + 22\tau_1 s^2 + \tau_1(1 + 0,58K_R)s + 0,58K_R} \quad (6.27)$$

d'où

$$K_{BF} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{BF}(s) = 0 \quad (6.28)$$

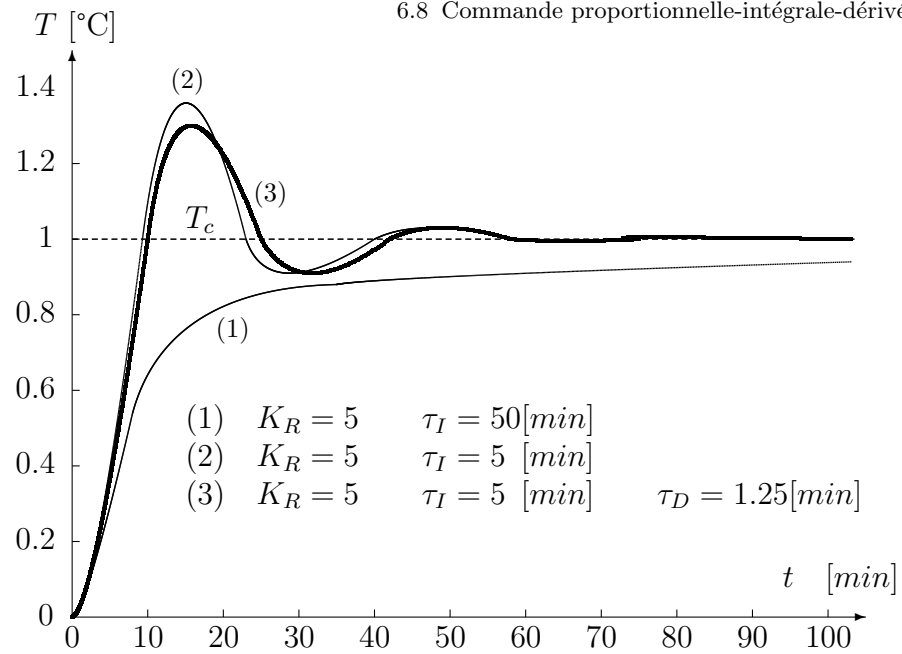


Figure 6.22. Réponse du système bouclé à un saut de consigne pour différents régulateurs PI et PID .

La réponse $T(t)$ à un saut unité de $T_e(t)$ pour différents régulateurs PI et PID est donnée à la figure 6.23.

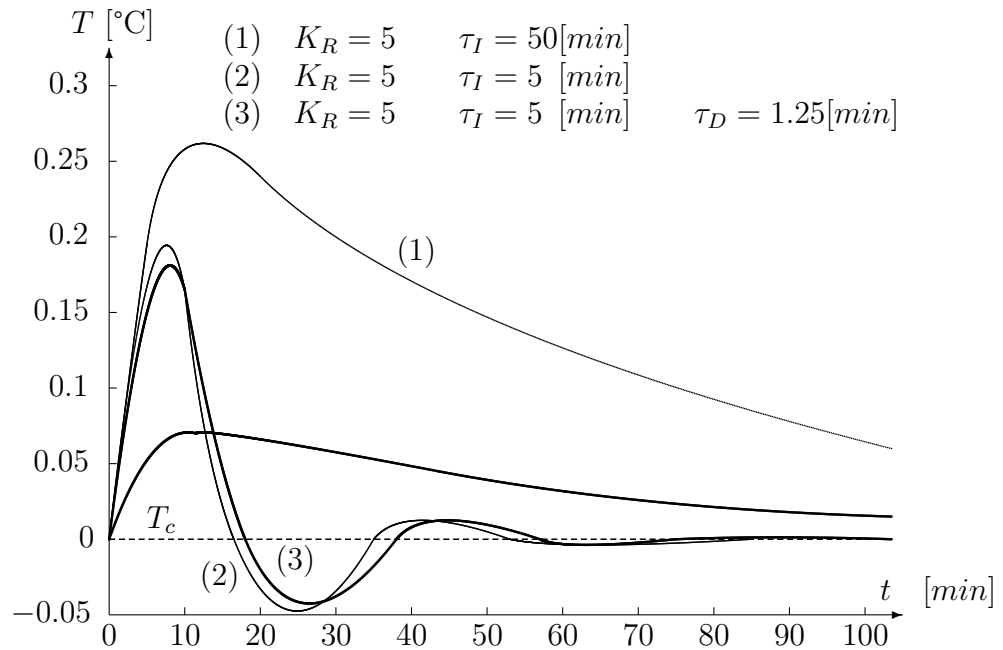


Figure 6.23. Réponse du système bouclé à un saut de perturbation pour différents régulateurs PI et PID .

6.8.4 Effets des termes P, I et D du régulateur PID

- a) Effet du terme P Élément de base de la loi de commande, il permet une réponse rapide, proportionnelle à l'erreur instantanée.

Si on augmente K_R :

- réduction de l'erreur statique (cf. fig. 6.16),
- système bouclé plus rapide mais aussi un peu plus oscillant (cf. fig. 6.15)
- saturation possible du régulateur (cf. §6.4.3).

Avantage

$N(t)$ varie proportionnellement à l'erreur $e(t)$: plus l'erreur est importante, plus l'action corrective sera grande. *Inconvénient* Une erreur statique est présente pour un changement durable de consigne ou une perturbation durable (cf. §6.4.2).

- b) Effet du terme I *Avantage* Il élimine le statisme grâce à l'intégration de l'erreur $e(t)$, ce qui permet de définir automatiquement une commande a priori adaptée au nouvel état stationnaire (cf. section 6.5). *Inconvénients* Le système bouclé peut devenir plus oscillant (cf. fig. 6.20 et fig. 6.21).

« **Integral Windup** » : le terme intégral $\int_0^t e(t')dt'$ peut devenir très grand suite à de grandes perturbations de longue durée, ou lors d'une opération de démarrage ; il s'ensuit une saturation de la commande $N(t)$. Afin d'éviter ce problème ou dès que la sortie du régulateur sature.

- c) Effet du terme D *Avantages* Augmente la sensibilité du régulateur en intriduisant une correction prédictive basée sur $de(t)/dt$ (cf. section 6.6).

Augmente la stabilité du système bouclé grâce à l'effet de prévision, permettant ainsi l'emploi de plus grandes valeurs de K_R . *Inconvénients*

Amplifie le bruit de mesure car le terme D utilise la dérivée du signal de mesure $M(t)$, $de(t)/dt = (d/dt)[M_c(t) - M(t)]$. Si le signal $M(t)$ est bruité, l'opérateur dérivation amplifiera ce bruit qui, bien que très petite amplitude, peut avoir une dérivée très grande (fluctuations très rapides).

6.9 Dimensionnement des régulateurs P , PI ET PID

6.9.1 Caractéristiques souhaitées du système bouclé

On aimerait que le système en boucle fermée :

- répondre rapidement à des changements de la grandeur de consigne $T_c(t)$,
- rejette bien les perturbations $T_e(t)$,
- évite le statisme,
- soit un peu sensible aux variations du processus et aux erreurs de mesure,
- n'ait pas un signal de commande excessif, afin d'éviter la saturation du régulateur.

6.9.2 Dimensionnement du régulateur (choix de K_R , τ_I et τ_D)

On peut dimensionner un régulateur sur la base d'une analyse temporelle (cf. cette section), ou d'une analyse fréquentielle (pas abordé dans ce cours).

Pour le choix des paramètres du régulateur sur la base d'une analyse temporelle, deux classes de méthodes ont été développés :

- a) Les méthodes basées sur un test expérimental en *boucle fermée*, par exemple la méthode empirique du paragraphe 6.9.3
- b) Les méthodes basées sur l'identification en *boucle ouverte* du système à commander :
 - la méthode de Ziegler Nichols (cf. §6.9.4),
 - la spécification du système bouclé (cf. §6.9.5).

6.9.3 Méthode empirique en boucle fermée

Cette approche considère le système en *boucle fermée* et propose la procédure suivante [cf. C.L. Smith, 2000] :

- Implanter un régulateur PI de manière à obtenir une réponse oscillatoire comme illustré à la figure 6.24. On suggère d'utiliser $K_{R0} = 2/K$ où K représente le gain statique $\Delta M/\Delta N$ du système à commander ; si l'oscillation n'est pas suffisamment marquée, augmenter $K_{R,0}$.

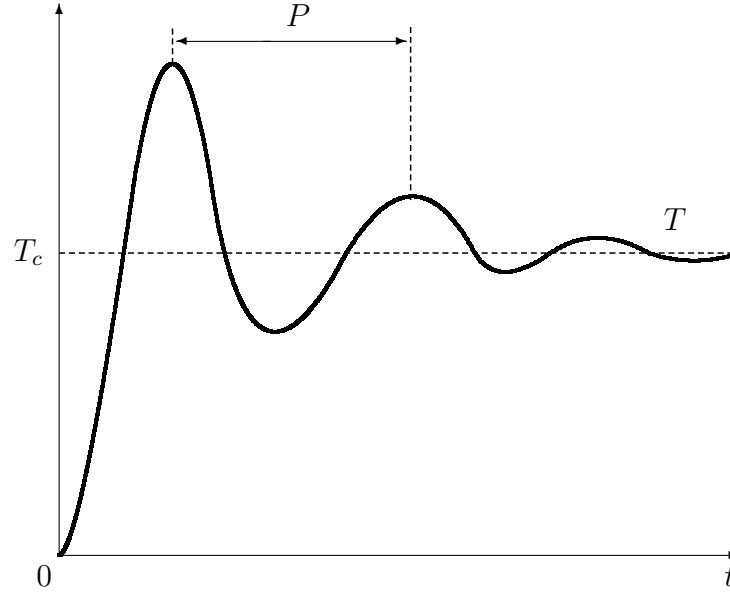


Figure 6.24. Réponse du système commandé par un régulateur PI (paramètre K_{R0} et $\tau_{I,0}$).

- Observer la période d'oscillation P (fig. 6.24) et calculer

$$\tau_I = \frac{P}{1,3 + 0,2\left(\frac{P}{\tau_{I,0}}\right)}$$

$$\tau_D = 0,25\tau_I$$

- Avec un régulateur PI ou PID et les valeurs de τ_I et τ_D ci-dessus, ajuster K_R de manière à obtenir la performance souhaitée comme illustrée à la figure 6.25.

Avec cette méthode, τ_I et τ_D sont calculés sur la base des caractéristiques du système à commander alors que K_R dépend des objectifs de commande. L'avantage de cette méthode en boucle fermée est qu'elle considère *tous* les éléments de la boucle de commande.

6.9.4 Méthode de Ziegler-Nichols

Cette méthode considère la réponse indicielle du système en *boucle ouverte*, avec ouverture de la boucle au niveau de la sortie du régulateur (fig. 6.26).

On positionne le régulateur en mode « manuel » (cf. §6.1.1). On impose un saut ΔN sur $N(t)$ et on observe la réponse $M(t)$. Cette réponse (actionneur, processus et capteur) est approchée par celle d'un système du premier ordre avec un retard pur :

$$\frac{M(s)}{N(s)} = G(s) \simeq \frac{K \exp(-\theta s)}{\tau s + 1} \quad (6.29)$$

A l'aide d'une analyse graphique, on déduit les paramètres K , τ et θ du système à commander et de là ceux du régulateur à concevoir. τ représente la **constante de temps dominante** du système dynamique, c'est-à-dire

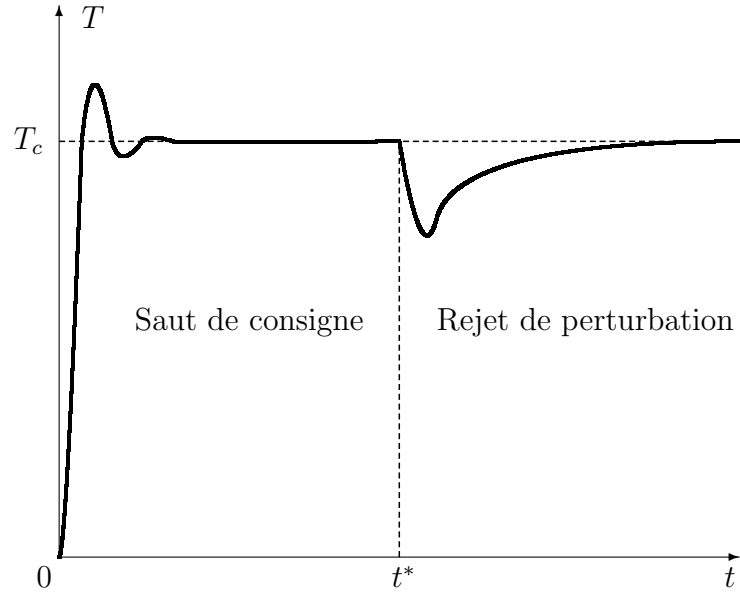


Figure 6.25. Réponse du système commandé par un régulateur PID pour un saut de consigne au temps 0 et une perturbation au temps t^* . La performance est ajustée à l'aide du gain du régulateur K_R .

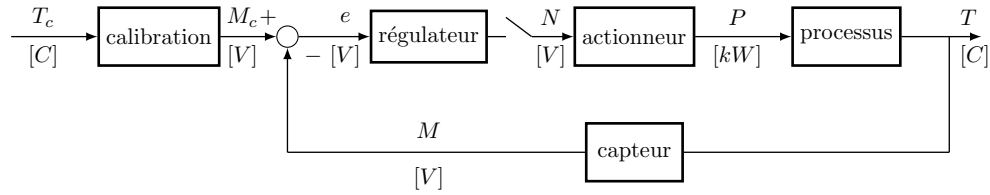


Figure 6.26. Schéma fonctionnel du système en boucle ouverte pour le test de la réponse indicielle.

la constante de temps du système du *premier ordre* qui approche le mieux possible la réponse du système. On distingue les cas de systèmes avec ou sans nouvel état stationnaire :

- a) pour un système avec nouvel état stationnaire (fig. 6.27) :

$$K = \Delta M / \Delta N, \tau \text{ et } \theta \text{ directement du graphique}$$

- b) pour un système intégrateur, sans nouvel état stationnaire (fig. 6.28) : m et θ directement du graphique

Le choix des paramètres du régulateur se fait sur la base des relations empiriques suivantes :

- a) Régulateur P

$$K_R = \frac{N}{\theta m} = 0,9 \frac{\tau}{\theta K}$$

- b) Régulateur PI

$$K_R = 0,9 \frac{N}{\theta m} = 0,9 \frac{\tau}{\theta K}$$

- c) Régulateur PID

$$K_R = 1,2 \frac{N}{\theta m} = 1,2 \frac{\tau}{\theta K}$$

$$\tau_I = 2\theta$$

$$\tau_D = 0,5\theta$$

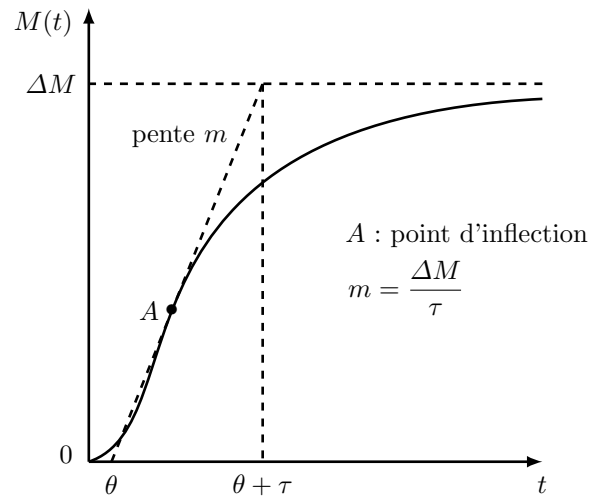


Figure 6.27. Réponse indicielle d'un système sans terme intégrateur.

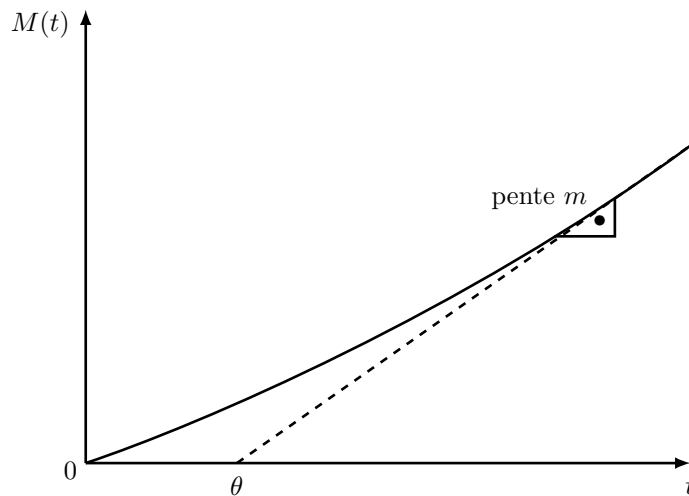


Figure 6.28. Réponse indicielle d'un système avec terme intégrateur.

- d) Corrections finales Le système bouclé obtenu avec cette méthode possède une réponse oscillatoire avec un rapport d'amortissement d'environ 4 (rapport des amplitudes de deux oscillations successives). Si un système bouclé *non oscillant* est souhaité, on propose de réduire de moitié le gain K_R et d'augmenter τ_I et τ_D d'un facteur 2.

Avantages de la méthode de Ziegler-Nichols

- Un *seul* test en boucle *ouverte* est nécessaire,
- ce test est simple et rapide.

Inconvénients de la méthode de Ziegler-Nichols

- Analyse en boucle ouverte, c'est-à-dire sans tenir compte du régulateur (si ce dernier a des imprécisions de calibration, la qualité de la commande en souffrira),
- sensible aux erreurs d'appréciation (dans la détermination de la pente m et du retard pur θ),
- ne s'applique pas aux systèmes qui oscillent (en boucle ouverte) ni aux systèmes du premier ordre sans retard pur (Car $\theta = 0$).

6.9.5 Spécification du système bouclé

La réponse en boucle fermée la plus simple correspond à celle d'un système du premier ordre.

$$G_{BF}(s) = \frac{1}{\tau_{BF}s + 1} \quad (6.30)$$

Comme l'équation (6.30) peut également s'écrire :

$$G_{BF}(s) = \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)} \quad (6.31)$$

on peut combiner ces deux relations pour exprimer $G_R(s)$ en fonction de $G(s)$ et $\tau_{BF}(s)$:

$$G_R(s) = \frac{G_{BF}(s)}{G(s)[1 - G_{BF}(s)]} = \frac{1}{G(s)\tau_{BF}s} \quad (6.32)$$

Ce régulateur possède un terme intégral de façon à éliminer le statisme (gain *unité* spécifié pour $G_{BF}(s)$). On considère plusieurs cas spéciaux.

- Si le système à commander est strictement du premier ordre avec

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{K}}{\tau s + 1} \quad G_{BF}(s) = \frac{1}{\tau_{BF}s + 1}$$

on obtient :

$$G_R(s) = \frac{\tau s + 1}{K\tau_{BF}s} \quad (6.33)$$

L'équation (6.33) est celle d'un régulateur *PI* avec

$$K_R = \frac{1}{K} \frac{\tau}{\tau_{BF}} \quad (6.34)$$

$$\tau_I = \tau \quad (6.35)$$

On remarque que plus la constante temps du système bouclé est petite, plus le gain du régulateur sera élevé.

- Si le système à commander possède la fonction de transfert :

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{K}}{s(\tau s + 1)} \quad G_{BF}(s) = \frac{1}{\tau_{BF}s + 1}$$

l'équation (6.32) donne :

$$G_R(s) = \frac{\tau s + 1}{K\tau_{BF}s} \quad (6.36)$$

qui est l'équation d'un intégrateur *PD* avec

$$K_R = \frac{1}{K\tau_{BF}} \quad (6.37)$$

$$\tau_D = \tau \quad (6.38)$$

- Si le système à commander est de la forme

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{K}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad G_{BF}(s) = \frac{1}{\tau_{BF}s + 1}$$

l'équation (6.32) donne :

$$G_R(s) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}{K\tau_{BF}s} \quad (6.39)$$

qui est l'équation d'un régulateur PID avec

$$K_R = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K\tau_{BF}} \quad (6.40)$$

$$\tau_I = \tau_1 + \tau_2 \quad (6.41)$$

$$\tau_D = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \quad (6.42)$$

- Pour le système à commander

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{K}}{s} \quad G_{BF}(s) = \frac{1}{\tau_{BF}s + 1}$$

l'équation (6.32) donne le régulateur proportionnel

$$G_R(s) = \frac{1}{K\tau_{BF}} \quad (6.43)$$

- Si le système à commander est de la forme

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{K}}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

il est possible de dimensionner un régulateur PI en spécifiant la fonction de transfert

$$G_{BF}(s) = \frac{1}{\tau_{BF}s + 1} e^{-\theta s}$$

En effet, en approximant le retard pur comme suit :

$$e^{-\theta s} \simeq (1 - \theta s)$$

on obtient en suivant la démarche suivante proposée (cf. éq. 6.30 - 6.32) :

$$G_R = \frac{\tau s + 1}{K(\tau_{BF} + \theta)}$$

c'est-à-dire :

$$K_R = \frac{\tau}{K(\tau_{BF} + \theta)} \tau_I = \tau$$

Choix du système bouclé

Dans tous les cas précédents, nous avons choisi un système bouclé du premier ordre paramétré uniquement par τ_{BF} ($K_{BF} = 1$ afin d'éviter un statisme). Si nécessaire, il est également possible de spécifier un système bouclé du deuxième ordre, lequel sera alors paramétré par τ_1 et τ_2 ou alors τ et ξ (cf. section 5.5).

Comme un des objectifs de la commande est d'accélérer la réponse du système dynamique, on choisit généralement τ_{BF} inférieure à la constante de temps dominante du système à commander. On propose souvent la relation empirique suivant $\tau_{BF} = \tau/2$.

6.9.6 Exemple

Conception d'un régulateur PID pour le système de la figure 6.29

- a) Méthode de la réponse indicielle de Ziegler-Nichols En *boucle ouverte*, la fonction de transfert entre $N(s)$ et $T(s)$ s'écrit :

$$\frac{T(s)}{N(s)} = \left(\frac{2}{0, 2s + 1} \right) \left(\frac{5}{2s + 1} \right) = \frac{10}{(2s + 1)(0, 2s + 1)} \quad (6.44)$$

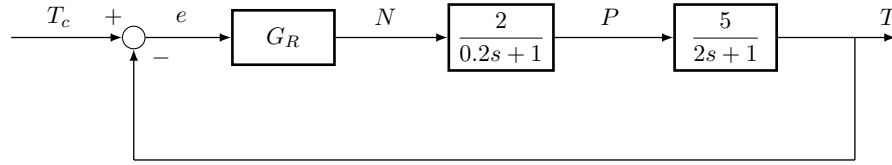


Figure 6.29. Schéma fonctionnel d'un système bouclé.

La figure 6.30 montre la réponse indicielle de ce système, ainsi que celle d'une approximation du premier ordre. On peut y déduire graphiquement la pente m ainsi que le retard pur θ . Pour cet exemple simple, ces deux valeurs peuvent également se calculer analytiquement comme suit :

- On approche le système du deuxième ordre par un système du premier ordre avec le retard pur, θ , comme indiqué par l'équation (6.29) :

$$\frac{T(s)}{N(s)} \simeq \left(\frac{K}{\tau s + 1} \right) \exp(-\theta s) \quad (6.45)$$

- On détermine le retard pur θ en comparant les deux équations précédentes : on fixe $K = 10, \tau = 2$ et on demande :

$$\exp(-\theta s) \simeq \frac{1}{0,2s + 1} \quad (6.46)$$

Un développement en série de Taylor donne pour chacun des termes :

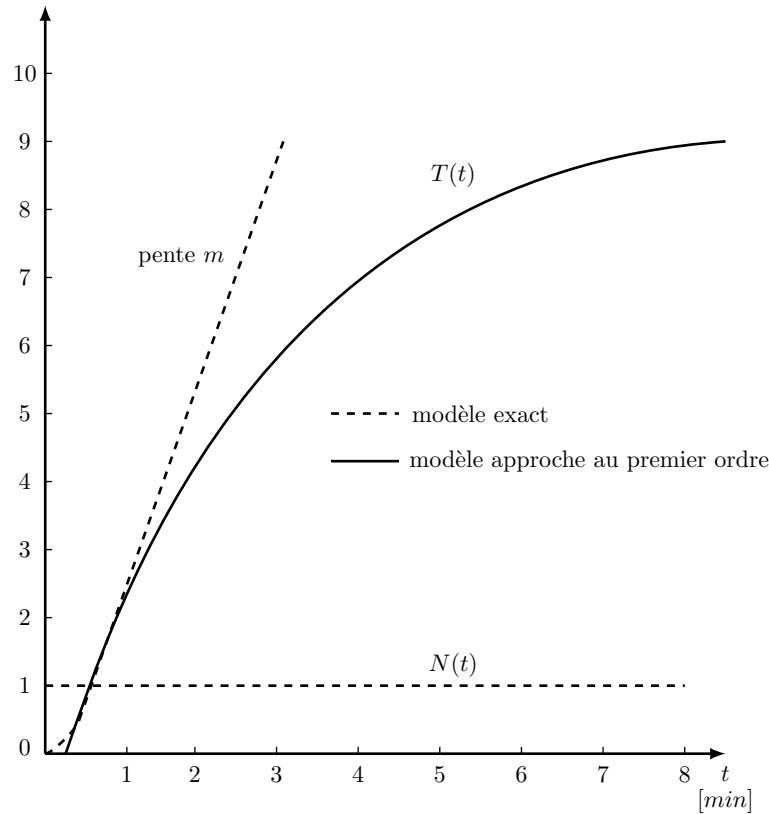


Figure 6.30. Réponse indicielle du système à commander.

$$\exp(-\theta s) = 1 - \theta s + \frac{(\theta s)^2}{2!} - \frac{(\theta s)^3}{3!} + \dots \frac{1}{0,2s + 1} = 1 - 0,2s + \frac{(0,2s)^2}{2!} - \frac{(0,2s)^3}{6} + \dots$$

Ainsi, en première approximation, c'est-à-dire en ne retenant que la partie linéaire des développements en série, l'approximation (6.46) est valable pour :

$$\theta = 0,2[\text{min}]$$

On obtient finalement le régulateur *PID* suivant (cf. §6.9.4) :

$$K_R = 0,6 \frac{\tau}{\theta K} = 0,6 \frac{2}{0,2 \cdot 10} = 0,6 \left[\frac{V}{C} \right]$$

$$\tau_I = 4\theta = 4 \cdot 0,2 = 0,8[\text{min}]$$

$$\tau_D = \theta = 0,2[\text{min}]$$

b) Spécification du système bouclé

Pour un système bouclé qui soit environ deux fois plus rapide que le système à commander ($\tau_1 = 2, \tau_2 = 0,2$), on choisit :

$$\tau_{BF} = \frac{\tau_1}{2} = 1[\text{min}]$$

Les équations (6.40) et (6.42) permettent alors d'évaluer :

$$K_R = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K \tau_{BF}} = \frac{2 + 0,2}{10 \cdot 1} = 0,22 \left[\frac{V}{C} \right]$$

$$\tau_I = \tau_1 + \tau_2 = 2 + 0,2 = 2,2[\text{min}]$$

$$\tau_D = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{2 \cdot 0,2}{2 + 0,2} = 0,18[\text{min}]$$

En comparant les valeurs obtenues sous point a) et b), on remarque bien que celles-ci n'ont qu'une valeur indicative. Les paramètres définitifs seront de préférence choisis sur l'installation en observant son comportement en asservissement et en régulation.

6.10 Exercices résolus

Exercice 1

Un système à commander a été approché par la fonction de transfert suivantes :

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{2e^{-s}}{3s + 1}$$

Calculer les paramètres d'un régulateur *PID* pour ce processus.

Solution

Système à commander du premier ordre avec retard pur :

$$K = 2, \tau = 3, \theta = 1$$

En utilisant la méthode de la réponse indicielle de Ziegler-Nichols :

$$K_R = \frac{1,2\tau}{\theta K} = \frac{1,2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 1,8 \quad \tau_I = 2\theta = 2 \quad \tau_D = 0,5\theta = 0,5$$

Exercice 2

Soit le système bouclé suivant :

a) Déterminer le régulateur qui donne la fonction de transfert G_{BF} .

- b) Discuter la réalisation pratique d'un tel régulateur pour $G_{BF} = 1$ (cas idéal) et $G_{BF} = 1/(\tau_{BF}s + 1)^2$

Solution

- c) Régulateur

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{Y_c(s)} &= G_{BF} = \frac{K_{OM}G_R G_{OC}G_P}{1 + G_R G_{OC}G_P G_{OM}} \\ G_{BF}(1 + G_R G_{OC}G_P G_{OM}) &= K_{OM}G_R G_{OC}G_P \\ G_R &= \frac{G_{BF}}{G_{OC}G_P(K_{OM} - G_{BF}G_{OM})}\end{aligned}$$

- d) Réalisation pratique

- Pour le cas idéal ($G_{BF} = 1$) avec des fonctions de transfert du premier ordre pour l'organe de mesure, l'organe de commande et le processus, on obtient :

$$\begin{aligned}G_{OC} &= \frac{K_{OC}}{\tau_{OC}s + 1} & G_{OM} &= \frac{K_{OM}}{\tau_{OM}s + 1} & G_P &= \frac{K_P}{\tau_P s + 1} \\ G_R &= \frac{(\tau_{OC}s + 1)(\tau_P s + 1)}{K_{OC}K_P K_{OM}(1 - \frac{1}{\tau_{OM}s + 1})} = \frac{(\tau_{OC}s + 1)(\tau_P s + 1)(\tau_{OM}s + 1)}{K_{OC}K_P K_{OM}\tau_{OM}s}\end{aligned}$$

numérateur : degré 3, dénominateur : degré 1 $\Rightarrow G_R(s)$ pas réalisable

- Pour la fonction de transfert $G_{BF} = 1/(\tau_{BF}s + 1)^2$, on a :

$$\begin{aligned}G_R &= \frac{(\tau_{OC}s + 1)(\tau_P s + 1)}{(\tau_{BF}s + 1)^2 K_{OC}K_P K_{OM}(1 - \frac{1}{(\tau_{BF}s + 1)^2(\tau_{OM}s + 1)})} \\ &= \frac{(\tau_{OC}s + 1)(\tau_P s + 1)(\tau_{OM}s + 1)(\tau_{BF}s + 1)^2}{(\tau_{BF}s + 1)^2 K_{OC}K_P K_{OM}[(\tau_{BF}s + 1)^2(\tau_{OM}s + 1) - 1]}\end{aligned}$$

numérateur : degré 5, dénominateur : degré 5 $\Rightarrow G_R(s)$ réalisable

Exercice 3

Soit le système bouclé suivant :

Indiquer la *démarche* à suivre pour mettre au point un régulateur de type PID qui élimine le statisme suite à un changement de consigne.

Solution

$$G_{BF} = \frac{G_R \frac{K}{s(\tau s + 1)^2}}{1 + G_R \frac{K}{s(\tau s + 1)^2}} = \frac{G_R K}{s(\tau s + 1)^2 + G_R K} \quad (1)$$

Il n'y aura pas de statisme si $\lim_{s \rightarrow 0} G_{BF}(s) = 1$, ce qui sera le cas pour tout régulateur de type *PID*, c'est-à-dire *P*, *PI*, *PD* ou *PID*. Il n'y a pas de statisme avec un régulateur *P* car le système à commander contient un terme intégrateur.

Le système à commander n'ayant pas de retard pur, il n'est pas possible d'utiliser la méthode de Ziegler-Nichols basée sur la réponse indicielle. On peut par contre utiliser la méthode empirique en boucle fermée de la section 6.9.3.

Exercice 4

Un processus à commander est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = 2u \quad \dot{y}(0) = y(0) = 0$$

Les organes de mesure et de commande sont de nature statique et possèdent les caractéristiques suivantes :
Dimensionner un régulateur tel que le système bouclé se comporte comme $G_{BF}(s) = 1/(0,2s + 1)$.

Solution

Dynamique du procédé

$$s^2Y(s) + 2sY(s) = 2U(s) \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s(s+2)}$$

Organe de mesure. D'après le graphe :

$$K_{OM} = \frac{\Delta M}{\Delta y} = \frac{5-0}{10-0} = 0,5$$

Organe de mesure statique : $G_{OM}(s) = K_{OM}$ Organe de commande. D'après le graphe :

$$K_{OC} = \frac{\Delta u}{\Delta N} = \frac{40-0}{5-1} = 10$$

Organe de commande statique : $G_{OC} = K_{OC}$

Fonction de transfert en boucle fermée

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{K_{OM}G_RK_{OC}G}{1 + G_RK_{OC}GK_{OM}}$$

ce que donne :

$$\frac{1}{0,2s+1} = \frac{0,5G_R10\frac{2}{s(s+2)}}{1 + 0,5G_R10\frac{2}{s(s+2)}}$$

d'où l'on tire :

$$G_R = \frac{s}{2} + 1$$

On a ainsi un régulateur PD avec $K_R = 1$ et $\tau_D = 0,5$

Exercice 5

L'équation dynamique d'une cuve de mélange de volume variable est donnée par l'équation

$$S\dot{h}(t) = q_e(t) - q_s(t) \quad h(0) = 1m$$

où h représente le niveau dans la cuve, q_e et q_s les débits volumiques d'entrée et de sortie et S la section de la cuve cylindrique. On désire commander le niveau h par rétroaction en ajustant le débit q_e .

L'organe de mesure est de nature statique avec un gain $\Delta M/\Delta h$ de $2,5[V/m]$. L'organe de commande est approché par une fonction de transfert du premier ordre avec une constante de temps de $0,1[min]$. La caractéristique statique a été modélisée comme suit :

$$q_e = -0,04N^2 + N + 14$$

où q_e est exprimé en $[l/min]$ et N en $[V]$.

- Evaluer la fonction de transfert $M(s)/N(s)$ correspondant à $\bar{N} = 1V$ et sachant que $S = 0,1[m]^2$.
- Dimensionner un régulateur de type PID (c'est-à-dire avec 1,2, ou 3 termes) pour ce système.

Solution

a) Cuve

$$sSH(s) - Sh(0) = Q_e(s) - Q_s(s)H(s) = \frac{Q_e(s)}{sS} - \frac{Q_s(s)}{sS} + \frac{1}{s}$$

Organe de mesure

$$\frac{M(s)}{H(s)} = K_{OM} = 2,5 \frac{V}{m}$$

Notons que l'on doit utiliser ce gain statique pour convertir la valeur de consigne en une grandeur comparable à celle qui sort de l'organe de mesure.

Organe de commande

Le gain statique de l'organe de commande vaut pour $\bar{N} = 1$:

$$K_{OC} = \left. \frac{dq_e}{dN} \right|_{\bar{N}=1} = -0,08\bar{N} + 1 = 0,92 \frac{l}{\min V}$$

Ainsi :

$$G_{OC}(s) = \frac{0,92}{0,1s + 1}$$

Fonction de transfert $M(s)/N(s)$

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{H(s)} \frac{H(s)}{Q_e(s)} \frac{Q_e(s)}{N(s)} = 2,5 \cdot \frac{1}{Ss} \cdot \frac{0,92}{0,1s + 1} = \frac{23}{s(0,1s + 1)} [V/V]$$

- Régulateur Comme le système à commander possède déjà un terme intégrateur, on utilise un régulateur P ou PD .

On peut par exemple spécifier la fonction de transfert du système bouclé comme étant du premier ordre avec $K_{BF} = 1$ et $\tau_{BF} = \tau/2 = 0,05min$. On obtient ainsi un régulateur PD avec (équations 6.37 et 6.38) :

$$K_R = \frac{1}{K\tau_{BF}} = \frac{1}{23 \cdot 0,05} = 0,87 [V/V] \tau_D = \tau = 0,1min$$

Pour un régulateur P , les relations empiriques de Ziegler-Nichols nous indiquent de diminuer sensiblement le gain du régulateur :

$$K_R = 0,87 \cdot \frac{0,9}{1,2} = 0,65 [V/V]$$

Exercice 6

Soit deux réservoirs cylindriques de section respectives A et B . Les écoulements par les vannes réductrices sont proportionnels aux différences de pression amont/aval de ces vannes, le coefficients de proportionnalité étant égal à $1/R$.

- Déterminer les fonctions de transfert

$$G_1(s) = \frac{H_1(s)}{Q_e(s)}, G_2(s) = \frac{H_2(s)}{Q_e(s)}$$

- Pour le système $G_1(s)$, déterminer le régulateur le plus simple parmi P, PD, PI, PID qui garantisse l'absence de statisme dans la variable commandée.
- Est-ce qu'un régulateur de même structure permet d'éliminer le statisme pour le système $G_2(s)$?

Solution

a) Modèle dynamique

$$A \frac{dh_1}{dt} = q_e - \frac{1}{R}(h_1 - h_2) \quad (1)$$

$$B \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{R}(h_1 - h_2) - \frac{1}{R}h_2 \quad (2)$$

A l'état d'équilibre stationnaire :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{q}_e - \frac{1}{R}(h_1 - h_2) \\ 0 &= \frac{1}{R}(h_1 - h_2) - \frac{1}{R}h_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \bar{h}_1 = 2R\bar{q}_e \\ \bar{h}_2 = R\bar{q}_e \end{cases}$$

Transformation de Laplace (avec des conditions initiales nulles en variables écart) :

$$AsH_1(s) = Q_e(s) - \frac{1}{R}[H_1(s) - H_2(s)] \quad (3)$$

$$BsH_2(s) = \frac{1}{R}[H_1(s) - H_2(s)] - \frac{1}{R}H_2(s) \quad (4)$$

$$(4) \quad \rightarrow \quad \frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{1}{BRs + 2} \quad (5)$$

$$(3) + (5) \quad \rightarrow \quad G_1(s) = \frac{H_1(s)}{Q_e(s)} = \frac{R(BRs + 2)}{ABR^2s^2 + R(2A + B)s + 1} \quad (6)$$

$$G_2(s) = \frac{H_2(s)}{Q_e(s)} = \frac{R}{ABR^2s^2 + R(2A + B)s + 1} \quad (7)$$

b) h_1 sans statisme

Soit $G_R(s)$ la fonction de transfert du régulateur. En boucle fermée, on aura :

$$G_{BF}(s) = \frac{G_R(s)G_1(s)}{1 + G_R(s)G_1(s)} \quad (8)$$

Avec $G_R(s)G_1(s) = N(s)/D(s)$, (8) devient :

$$G_{BF}(s) = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

L'absence de statisme est garantie pour $K_{BF} = 1$, c'est-à-dire pour :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{D(s) + N(s)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{s \rightarrow 0} sD(s) = 0$$

Comme $D(s) = D_R(s)D_1(s) = D_R(s)[ABR^2s^2 + R(2A + B)s + 1]$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sD(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{s \rightarrow 0} sD_R(s) = 0$$

Il est donc nécessaire d'avoir un terme intégral dans le régulateur \rightarrow régulateur PI

c) h_2 sans statisme

Même développement que ci-dessus. Comme $G_1(s)$ et $G_2(s)$ possèdent le même dénominateur, le résultat est identique \rightarrow régulateur PI .

Exercice 7

La réponse indicielle d'un système dynamique a été mesurée comme suit :

Pour ce système dynamique :

- Evaluer son gain statique et sa constante de temps dominante.
- Dimensionner un régulateur PI .
- Le système commandé résultant est-il stable ? sans statisme ? (le justifier sans calcul).
- Quel est l'effet du retard pur sur la stabilité du système bouclé ?

Solution

a)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gain statique } K = 3,8 \\ \text{Retard pur } \theta = 6,7s \\ \text{Constante de temps } = 6,7s \end{array} \right\} G(s) = \frac{3,8e^{-6,7s}}{6,7s + 1}$$

b) Régulateur PI

$$K_R = 0,9 \frac{\tau}{\theta K} = 0,9 \frac{6,7}{6,7 \cdot 3,8} = 0,24$$

$$\tau_I = 3,33\theta = 3,33 \cdot 6,7 = 22,3s$$

- Système commandé est
stable (rapport d'amortissement de 4)
sans statisme (terme intégral)
- Une augmentation du retard pur réduit K_R . Pour un régulateur donné, une augmentation du retard pur diminue la marge de stabilité.

6.11 Symbole utilisés

<i>AUTO</i>	mode automatique	
<i>BF</i>	boucle fermée	
<i>BO</i>	boucle ouverte	
<i>BP</i>	bande proportionnelle (= $100/K_R$)	
c_p	chaleur spécifique	[J/kg°C]
d	perturbation	
e	erreur ou écart de commande	
\bar{e}	erreur statique ou statisme	
G	fonction de transfert	
h	hauteur	[m]
K	gain statique	
<i>MAN</i>	mode manuel	
m	pente $\Delta M/\tau$	[V/s]
M	signal électrique de mesure normé	[V]
N	signal électrique de commande normé	[V]
P	puissance de chauffage	[kW]

q	débit volumique	$[m^3/s]$
RT	régulateur de température	
t	temps	$[s]$
T	température	$[^{\circ}C]$
τ_{lim}	période à la limite de la stabilité	$[s]$
TT	transmetteur de température	
u	signal d'entrée	
V	volume	$[m^3]$
y	signal de sortie	
ϵ	largeur d'hystérésis	$[V]$
ξ	coefficients d'amortissement	
ρ	masse volumique	$[kg/m^3]$
τ	constante de temps	$[s]$
τ_I	constante de temps d'intégration	$[s]$
τ_D	constante de temps de dérivation	$[s]$
θ	retard pur	$[s]$

Indices et autres symboles

X_{BF}	X du système en boucle fermée
X_{BO}	X du système en boucle ouverte
X_c	X de consigne
X_e	X d'entrée
X_L	X de la perturbation (« load »)
X_{lim}	X à la limite de la stabilité
X_{man}	X mode manuel
X_{max}	maximum de X
X_{min}	minimum de X
X_{OC}	X de l'organe de commande
X_{OM}	X de l'organe de mesure
X_P	X du processus
X_R	X du régulateur
$X_{réel}$	X réel (en valeur absolue)
X_s	X de sortie
\bar{X}	X à l'état stationnaire
\bar{X}_{ref}	X l'état stationnaire de référence
δX	variation de X ; variable écart $X(t) - \bar{X}$
ΔX	variation de X

Stabilité et performance des systèmes bouclés

7.1 Définition et critère de stabilité

7.1.1 Définition

Stabilité BIBO (Bounded Input, Bounded Output)

Un système linéaire est stable si et seulement si sa réponse à toute entrée bornée reste bornée.

Un **signal borné** est un signal dont la valeur en fonction du temps ($t \geq 0$) reste entre une limite inférieure finie et une limite supérieure finie. Par exemple, un saut unité, une sinusoïde ou $s(t) = \exp(-2t)$ représentent des signaux bornés. Par contre une rampe ou $s(t) = \exp(2t)$ sont des signaux non bornés.

Cette définition indique que si, par exemple, la réponse d'un système à un saut unité est $y(t) = \exp(2t)$, le système est **instable** (entrée bornée résultant en une sortie non bornée).

7.1.2 Critère de stabilité

Un système est stable si et seulement si toutes les racines de son équation caractéristique ont une partie réelle négative. Ce critère représente une condition nécessaire et suffisante.

La stabilité d'un système linéaire peut donc être déduite de la position de ses pôles dans le plan complexe, comme indiqué à la figure 7.1.

Nous allons démontrer ce critère de stabilité à partir de la définition de la stabilité BIBO. Pour cela, considérons un système bouclé dont le schéma fonctionnel est donné à la figure 7.2.

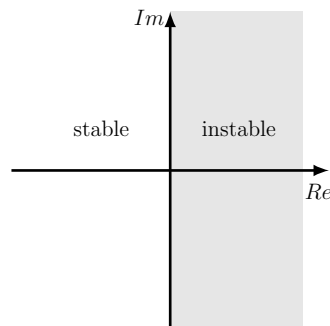


Figure 7.1. Domaine de stabilité (axe imaginaire non compris).

La réponse du système pour des conditions initiales nulles est la somme des effets des variations de consigne y_c et de perturbation d :

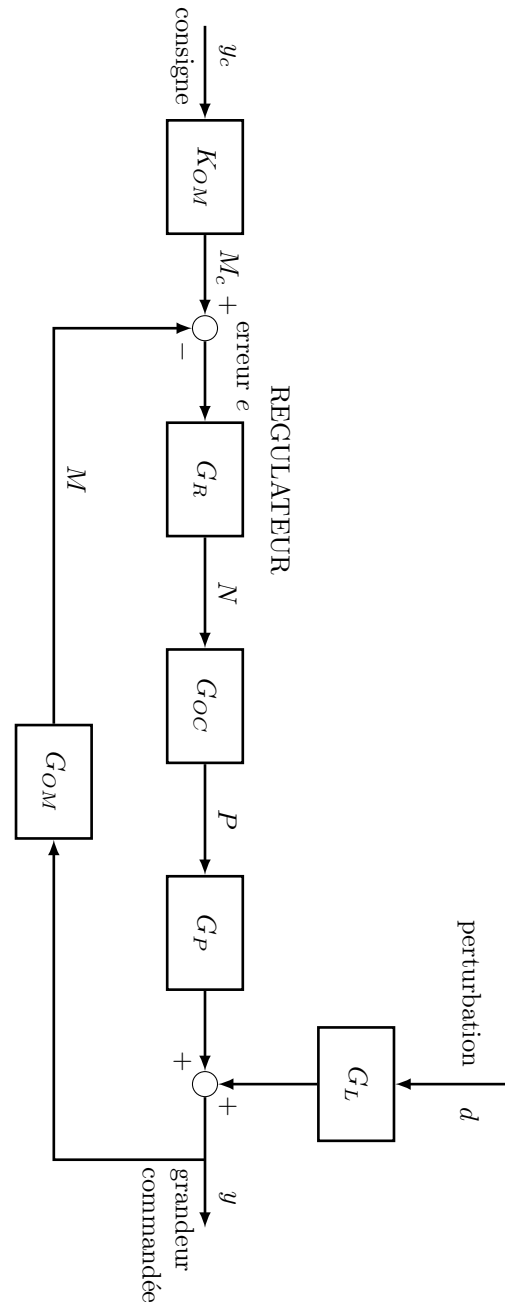


Figure 7.2. Schéma fonctionnel d'un système bouclé.

$$Y(s) = \frac{K_{OM}G_R(s)G_{OC}(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_{OC}(s)G_P(s)G_{OM}(s)}Y_c(s) + \frac{G_L(s)}{1 + G_R(s)G_{OC}(s)G_P(s)G_{OM}(s)}D(s) \quad (7.1)$$

La fonction de transfert de la boucle comprend tous les éléments contenus dans la boucle et s'écrit donc :

$$G_B(s) \equiv G_R(s)G_{OC}(s)G_P(s)G_{OM}(s)$$

si bien que l'équation (7.1) devient :

$$Y(s) = \frac{K_{OM}G_R(s)G_{OC}(s)G_P(s)}{1 + G_B(s)}Y_c(s) + \frac{G_L(s)}{1 + G_B(s)}D(s)$$

On peut expliciter les fonctions de transfert en fonction des pôles et des zéros :

$$\left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BF} = \frac{K_{OM}G_R(s)G_{OC}(s)G_P(s)}{1 + G_B(s)} = C \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad n \geq m$$

$$\left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BF} = \frac{G_L(s)}{1 + G_B(s)} = C' \frac{(s - z'_1)(s - z'_2) \dots (s - z'_m)}{(s - p'_1)(s - p'_2) \dots (s - p'_n)} \quad n' \geq m'$$

où p_i, p'_i, z_i et z'_i peuvent être réels ou complexes.

Etudions le comportement du système bouclé soumis à une excitation bornée de $y_c(t)$. Les conclusions seront les mêmes pour une variation bornée de $d(t)$. Calculons, par exemple, la réponse du système bouclé à un saut unité de y_c , c'est-à-dire $Y_c(s) = 1/s$.

$$Y(s) = \frac{C}{s} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (7.2)$$

$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

La transformation de Laplace inverse donne :

$$y(t) = A_0 + A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t) + \dots + A_n \exp(p_n t)$$

Séparons les pôles réels et les pôles complexes :

a) p_i réel

La fonction $y_i(t) = A_i \exp(p_i t)$ est décroissante pour $p_i < 0$ et croissante pour $p_i \geq 0$. La réponse $y_i(t)$, et par conséquent aussi $y(t)$, sera non bornée et ainsi le système *instable* pour $p_i > 0$.

Si $p_i = 0$, le dénominateur de $Y(s)$ possédera un terme en s^2 , lequel générera un terme en t pour $y_i(t)$.

Il s'ensuit que la réponse $y(t)$ sera nécessairement non bornée et le système *instable* pour $p_i = 0$.

b) p_i, p_{i+1} conjugués complexes :

$$p_i = a_i + j b_i$$

$$p_{i+1} = a_i - j b_i$$

$$y_i(t) + y_{i+1}(t)$$

$$= (\alpha_i + j \beta_i) \exp[(a_i + j b_i)t] + (\alpha_i - j \beta_i) \exp[(a_i - j b_i)t]$$

$$= \alpha_i \exp(a_i t) [\exp(j b_i t) + \exp(-j b_i t)]$$

$$+ j \beta_i \exp(a_i t) [\exp(j b_i t) - \exp(-j b_i t)]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\alpha_i \exp(a_i t) \cos(b_i t) - 2\beta_i \exp(a_i t) \sin(b_i t) \\
&= 2 \exp(a_i t) [\alpha_i \cos(b_i t) - \beta_i \sin(b_i t)]
\end{aligned}$$

Si $a_i > 0$, alors $y_i(t) + y_{i+1}(t)$ croît sans limite, donc aussi $y(t)$, et le système est *instable*. De même, si $a_i = 0$, l'excitation bornée $u(t) = A \sin(b_i t)$ va générer une réponse $y(t)$ non bornée car le dénominateur de $Y(s)$ possédera un terme en $(s^2 + b_i^2)^2$, mettant ainsi en évidence l'instabilité du système.

Il importe encore de vérifier que ces conclusions sur la stabilité ne dépendent pas du choix de l'excitation $y_c(t)$, pour autant que celle-ci soit bornée. Cette vérification se base sur la décomposition en éléments simples de la réponse $Y(s)$:

- Si l'excitation $y_c(t)$ est bornée et possède une limite pour $t \rightarrow \infty$ alors, en vertu du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_c(s) \neq \pm \infty$$

Il s'ensuit que $Y_c(s)$ contiendra au plus *un* pôle à $s = 0$. Cela nous ramène au cas considéré dans l'équation (7.2).

- Si l'excitation est bornée mais ne possède pas de limite pour $t \rightarrow \infty$, par exemple la sinusoïde $\sin(\omega t)$, on aura $y_c(t) = \exp(j\omega t)$. Comme les pôles de l'excitation (partie réelle nulle) ne correspondent pas à ceux du système (pour lequel $a_i < 0$), la réponse possédera un terme de même type, $\exp(j\omega t)$, et sera donc bornée.

Remarques

- La stabilité d'un système *linéaire* est complètement déterminée par ses pôles.
- Ces conditions de stabilité restent valables même si tous les pôles ne sont pas distincts.

7.1.3 Exemples

Exemple 1

Considérons le système intégrateur du §5.4.3 (cuve avec débit de fuite constant) dont la fonction de transfert est :

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{Ss}$$

Pour un saut échelon de $q_e(t)$ d'amplitude b , la sortie devient :

$$h(t) = \frac{b}{S} t$$

Ainsi, puisqu'une entrée bornée produit une réponse non bornée, le système est *instable*. On peut également le vérifier en évaluant le pôle du système ($p_1 = 0$).

Exemple 2

Etudions la stabilité du système bouclé donné à la figure 7.2 avec :

$$\begin{aligned}
G_R(s) &= K_R & G_{OC} &= \frac{1}{2s+1} \\
G_P(s) &= G_L(s) = \frac{1}{5s+1} & G_{OM}(s) &= \frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

La fonction de transfert $Y(s)/Y_c(s) \Big|_{BF}$ donne :

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{Y_c(s)} \Big|_{BF} &= \frac{K_R / ((2s+1)(5s+1))}{1 + K_R / ((2s+1)(5s+1)(s+1))} \\
&= \frac{K_R(s+1)}{10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + K_R}
\end{aligned}$$

avec l'équation caractéristique suivante :

$$10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + K_R = 0$$

Pour déduire la stabilité de ce système, il faut trouver les racines d'une équation cubique en s . Il existe des programmes de manipulations symboliques (par exemple MAPLE ou MATHEMATICA) qui permettent de résoudre analytiquement de telles équations. On peut aussi les résoudre numériquement, par exemple avec Matlab ; on obtient ainsi, pour différentes valeurs de K_R :

$K_R = 2$	$s_1 = -1,25$	$s_2 = -0,22 + 0,44j$	$s_3 = -0,22 - 0,44j$
6	-1.48	$-0,11 + 0,68j$	$-0,11 - 0,68j$
15	-1.76	$0,03 + 0,95j$	$0,03 - 0,95j$

Le système bouclé est donc stable pour $K_R = 2$ et $K_R = 6$ et instable pour $K_R = 15$. Cela se voit bien en

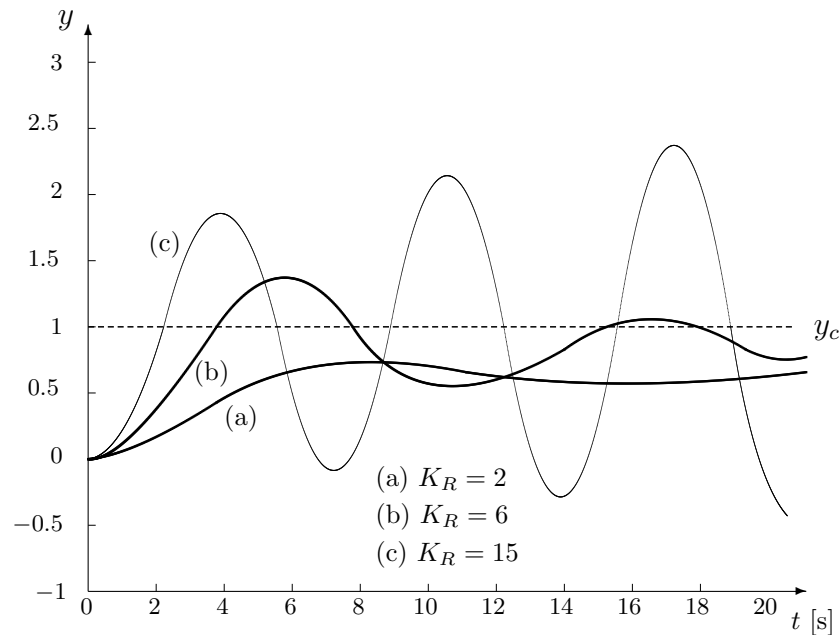


Figure 7.3. Réponse du système bouclé en fonction du gain du régulateur.

représentant la réponse du système à un saut unité de y_c (7.3).

Pour $K_R = 15$, le système est instable car la réponse est une oscillation caractérisée par une amplitude croissante, c'est-à-dire un signal non borné. En pratique, un signal ne peut grandir indéfiniment. Certaines limitations physiques telles les saturations feront que le système atteindra un cycle limite (oscillation d'amplitude entretenue). Cependant, le système linéaire est bien instable (tendance de la sortie à croître indéfiniment).

L'objectif de la commande est d'assurer une bonne performance du système bouclé tout en garantissant bien sûr sa stabilité. D'où l'importance du choix des paramètres du régulateur.

7.2 Critère de stabilité de Routh-Hurwitz

Pour l'exemple simple de la figure 7.2, il est nécessaire de calculer les racines d'un polynôme cubique en s . La question se pose de savoir s'il est possible d'évaluer la stabilité d'un système linéaire sans devoir calculer ses pôles. Cela est possible avec critère de Routh-Hurwitz.

7.2.1 Principe

Le critère de Routh-Hurwitz est une technique analytique pour déterminer si toutes les racines d'un polynôme sont à parties réelles négatives et *et ceci sans les calculer*. Nous verrons également le critère de Nyquist dans le chapitre suivant qui a le même avantage de ne pas nécessiter le calcul explicite des racines du polynôme. Le critère de Nyquist est un critère avec une interprétation graphique qui permet de donner des marges (des "distances" à l'instabilité). Le critère de Routh-Hurwitz est purement algébrique et il ne permet pas de mesurer facilement "la distance" à l'instabilité. Il donne une réponse tout ou rien concernant la stabilité. Si l'on applique ce critère à l'équation caractéristique polynomiale d'un système, il devient aisé d'analyser sa stabilité.

Soit l'équation caractéristique sous sa forme polynomiale générale :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (7.3)$$

Supposons $a_n > 0$ (pour le cas où $a_n < 0$, on multiplie l'équation par -1).

On peut montrer qu'une première condition *nécessaire* (mais non suffisante) pour la stabilité est :

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 > 0$$

Afin d'obtenir une condition également suffisante, on construit le **tableau de Routh** de la manière suivante :

ligne 1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
3	b_1	b_2	b_3	\dots
4	c_1	c_2	\dots	
\vdots	\vdots			
$n+1$	z_1			

où

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}; & b_2 &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}; & \dots \\
 c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}; & c_2 &= \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}; & \dots \\
 &\vdots & & &
 \end{aligned}$$

Pour que toutes les racines de l'équation caractéristique (7.3) aient une partie réelle négative, il est *nécessaire* et *suffisant* que tous les éléments de la première colonne du tableau de Routh soient positifs.

7.2.2 Exemples

Exemple 1

Reprenons l'équation caractéristique cubique de l'exemple 2 du §7.1.3 :

$$10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + K_R = 0$$

Étudions la stabilité du système bouclé à l'aide du critère de Routh-Hurwitz.

1. Conditions nécessaires :

$$10, 17, 8 \text{ et } (1 + K_R) > 0 \implies K_R > -1$$

2. Tableau de Routh :

ligne 1	10	8
2	17	$1 + K_R$
3	$\frac{136 - 10K_R}{17}$	
4	$1 + K_R$	

Conditions nécessaire et suffisantes :

$$\frac{136 - 10K_R}{17} > 0 \implies K_R < 13,6$$

$$1 + K_R > 0 \implies K_R > -1$$

Le système est donc stable pour $-1 < K_R < 13,6$.

Justifier intuitivement ces deux bornes pour K_R .

Exemple 2

Le système avec l'équation caractéristique suivante est-il stable ?

$$s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 1 = 0$$

Conditions nécessaire :

$$1, 5, 3, 0, 1 > 0$$

Le coefficient du terme en s est nul ; le système est donc instable.

Exemple 3

Etudier la stabilité du système bouclé de la figure 7.2 pour :

$$\begin{aligned} G_R(s) &= K_R & G_{OC}(s) &= 2 \\ G_P(s) &= \frac{4 \exp(-s)}{5s + 1} & G_{OM}(s) &= 0,25 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique devient :

$$\begin{aligned} 1 + G_B(s) &= 1 + \frac{2K_R 4 \exp(-s) 0,25}{5s + 1} = 0 \\ \Leftrightarrow 5s + 1 + 2K_R \exp(-s) &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Comme l'équation caractéristique n'est pas de nature polynomiale, le critère de Routh-Hurwitz n'est pas applicable. Néanmoins, il est possible d'approcher un retard pur de façon à obtenir une équation caractéristique de type polynomial comme indiqué ci-dessous.

7.2.3 Approximation d'un retard pur

Lorsque l'équation caractéristique comporte un facteur de la forme $\exp(-\theta s)$, il est possible de l'approcher par une équation rationnelle à l'aide d'un développement en série de Taylor :

$$\exp(-\theta s) = 1 - \theta s + \frac{\theta^2 s^2}{2!} - \frac{\theta^3 s^3}{3!} + \dots \quad (\text{expression exacte de la série})$$

ou encore :

$$\exp(-\theta s) = \frac{\exp(-(\theta/2)s)}{\exp((\theta/2)s)} = \frac{1 - (\theta/2)s + (\theta^2/8)s^2 - (\theta^3/48)s^3 + \dots}{1 + (\theta/2)s + (\theta^2/8)s^2 + (\theta^3/48)s^3 + \dots} \quad (7.5)$$

On peut donc choisir comme approximation rationnelle de $\exp(-\theta s)$:

$$\begin{aligned} \exp(-\theta s) &\simeq (1 - \theta s) && \text{(zéro positif : } z_1 = 1/\theta) \\ \exp(-\theta s) &= \frac{1}{\exp(\theta s)} \simeq \frac{1}{1 + \theta s} && \text{(pôle négatif : } p_1 = -1/\theta) \\ \exp(-\theta s) &= \frac{\exp(-(\theta/2)s)}{\exp((\theta/2)s)} \simeq \frac{1 - (\theta/2)s}{1 + (\theta/2)s} && \begin{aligned} &\text{(zéro positif : } z_1 = 2/\theta) \\ &\text{(pôle négatif : } p_1 = -2/\theta) \end{aligned} \end{aligned}$$

Cette dernière approximation est connue sous le nom d'**approximation de Padé** du premier ordre.

Exemple

En utilisant l'approximation de Padé du premier ordre, l'équation caractéristique (7.4) donne l'expression rationnelle suivante :

$$\begin{aligned} 5s + 1 + 2K_R \left(\frac{1 - 0,5s}{1 + 0,5s} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2,5s^2 + (5,5 - K_R)s + (1 + 2K_R) &= 0 \end{aligned}$$

1. Conditions nécessaires pour la stabilité :

$$\begin{aligned} 5,5 - K_R > 0 &\Rightarrow K_R < 5,5 \\ 1 + 2K_R > 0 &\Rightarrow K_R > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Tableau de Routh

$$\begin{array}{c|cc} \text{ligne 1} & 2,5 & 1 + 2K_R \\ 2 & 5,5 - K_R & \\ 3 & 1 + 2K_R & \end{array}$$

Conditions nécessaires et suffisantes :

$$\begin{aligned} 5,5 - K_R > 0 &\Rightarrow K_R < 5,5 \\ 1 + 2K_R > 0 &\Rightarrow K_R > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En première approximation, le système est donc stable pour $-0,5 < K_R < 5,5$. La condition exacte de stabilité de ce système ($-0,5 < K_R < 4,25$) peut être obtenue à l'aide du critère de stabilité de Bode (pas abordé dans ce cours).

Déterminer la condition de stabilité du système précédent en utilisant une approximation de Padé du deuxième ordre pour le retard pur.

7.3 Performance d'un système bouclé

7.3.1 Objectifs de la commande

Mentionnons certains objectifs importants quant à la performance d'un système bouclé (cf. §6.9.1) :

- La stabilité du système bouclé doit être garantie.
- La réponse à des changements de consigne doit être rapide et fiable (problème d'asservissement).
- L'effet des perturbations sur la grandeur commandée doit être minimal (problème de régulation).
- Le statisme est à minimiser.

- e) On doit également éviter de trop grandes variations de la grandeur de commande qui risqueraient de provoquer une saturation du régulateur.
- f) Le système bouclé doit être **robuste**, c'est-à-dire peu sensible aux changements du point de fonctionnement, aux erreurs de modèle, aux bruits de mesure et aux perturbations.

7.3.2 Asservissement et régulation

Etudions les fonctions de transfert en boucle fermée pour les problèmes d'asservissement et de régulation. Afin de simplifier les notations, et sans perte de généralité, considérons la situation suivante, très courante dans la pratique : organe de mesure de nature statique avec :

$$G_{OM}(s) = K_{OM}$$

Avec la fonction de transfert du système à commander

$$G(s) = G_{OC}(s)G_P(s)K_{OM}$$

les fonctions de transfert pour les problèmes d'asservissement et de régulation peuvent s'écrire :

$$\left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BF} = \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)} \quad (7.6)$$

et

$$\left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BF} = \frac{G_L(s)}{1 + G_R(s)G(s)} \quad (7.7)$$

On obtient une commande parfaite, c'est-à-dire $Y(s)/Y_c(s)|_{BF} = 1$ (suivi de consigne idéal) et $Y(s)/D(s)|_{BF} = 0$ (régulation parfaite) en choisissant $G_R(s)$ très grand malheureusement, cela n'est pas possible pour toutes les valeurs de s , pour des raisons de causalité, de stabilité et d'amplification de bruit. Cependant, le cas $s \rightarrow 0$ permet d'éliminer l'erreur statique. On montre que le statisme peut être éliminé de la façon suivante :

- a) en asservissement : si le produit $G_R(s)G(s)$ contient au moins un terme intégrateur.
- b) en régulation : si le produit $G_R(s)G(s)$ contient au moins un terme intégrateur de plus que $G_L(s)$.

Exemples

1.

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}; \quad G_L(s) = \frac{K_L}{\tau_L s + 1}; \quad G_R(s) = K_R$$

$$\left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BF} = \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)} = \frac{K_R K / (\tau s + 1)}{1 + K_R K / (\tau s + 1)} = \frac{K_R K}{\tau s + 1 + K_R K}$$

$$\left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BF} = \frac{G_L(s)}{1 + G_R(s)G(s)} = \frac{K_L / (\tau_L s + 1)}{1 + K_R K / (\tau s + 1)} = \frac{K_L (\tau s + 1) / (\tau_L s + 1)}{\tau s + K_R K}$$

Comportement à l'état stationnaire, c'est-à-dire pour $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BF} = \frac{K_R K}{1 + K_R K} \neq 1 \quad \Rightarrow \text{statisme}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BF} = \frac{K_L}{1 + K_R K} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{statisme}$$

2.

$$G(s) = \frac{K}{s}; \quad G_L(s) = \frac{K_L}{s}; \quad G_R(s) = K_R$$

$$\left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BF} = \frac{K_R K / s}{1 + K_R K / s} = \frac{K_R K}{s + K_R K}$$

$$\left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BF} = \frac{K_L/s}{1 + K_R K/s} = \frac{K_L}{s + K_R K}$$

Le comportement en régime permanent :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left. \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \right|_{BF} = \frac{K_R K}{K_R K} = 1 \Rightarrow \text{pas de statisme}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{BF} = \frac{K_L}{K_R K} \neq 0 \Rightarrow \text{statisme}$$

Répéter les calculs des exemples précédents en utilisant un régulateur *PI*. Vérifier bien qu'il n'y a pas de statisme.

7.4 Exercices résolus

Exercice 1

Pour quelles valeurs de α le système dynamique non linéaire suivant est-il localement stable autour du point de fonctionnement ($\bar{u} = 1, \bar{x} = 1$) :

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x^2 = u \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$$

Solution

Approximation linéaire (en variable écart) :

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x^2 = u \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

Equation caractéristique :

$$s^2 + \alpha s + 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}$$

Le système est stable si $\Re\{s_{1,2}\} < 0$, donc pour $\alpha > 0$.

On peut également utiliser le critère de Routh-Hurwitz. La condition nécessaire (et également suffisante pour un système d'ordre 2, voir exercice 3) est que tous les coefficients de l'équation soient positifs, d'où $\alpha > 0$.

Exercice 2

Soit le système dynamique stable

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 5u \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

que l'on commande avec un régulateur de type *PID*.

- Déterminer les conditions de stabilité lorsque le système est bouclé avec un régulateur *P*.
- Idem pour un régulateur *PI*.

Solution

- Régulateur *P* : $u = K_R(y_c - y)$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + (2 + 5K_R)y = 5K_R y_c$$

Condition de stabilité : $2 + 5K_R > 0 \quad K_R > -0,4$

- Régulateur *PI*

$$U(s) = \frac{K_R(\tau_I s + 1)}{\tau_I s} = 0$$

$$\tau_I s^3 + 3\tau_I s^2 + (2 + 5K_R)\tau_I s + 5K_R = 0$$

Routh-Hurwitz :

$$\begin{array}{c|cc} 1 & \tau_I & (2 + 5K_R)\tau_I \\ 2 & 3\tau_I & 5K_R \\ 3 & (2 + 5K_R)\tau_I - \frac{5}{3}K_R & \end{array}$$

$$\text{Conditions} \quad \tau_I > 0 \quad 5K_R(3\tau_I - 1) + 6\tau_I > 0$$

Remarques

On peut obtenir la condition de stabilité du système bouclé avec un régulateur P à partir de celles obtenues pour un régulateur PI comme suit :

Pour $\tau_I > 1/3$, la dernière condition devient :

$$5K_R > -\frac{6\tau_I}{3\tau_I - 1}$$

d'où l'on tire, pour $\tau_I \rightarrow \infty$ (régulateur P) :

$$K_R > -\frac{2}{5} = -0,4$$

Exercice 3

Montrer que la condition nécessaire de stabilité selon Routh-Hurwitz est également suffisante dans le cas d'un système d'ordre 2.

Solution

Soit $a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

Conditions nécessaires : $a_2, a_1, a_0 > 0$

Tableau de Routh-Hurwitz :

$$\begin{array}{c|cc} 1 & a_2 & a_0 \\ 2 & a_1 & \\ 3 & a_0 & \end{array}$$

Conditions nécessaires et suffisantes : $a_2, a_1, a_0 > 0$

Exercice 4

Le système dynamique

$$G(s) = \frac{3se^{-2s}}{5s^2 + 3s + 1}$$

est commandé par un régulateur proportionnel.

- Utiliser une approximation de Padé de premier ordre pour approcher le retard pur et déterminer la condition de stabilité du système bouclé.
- Comparer la région de stabilité avec celle obtenue pour le système sans retard pur.

Solution

a) Equation caractéristique du système bouclé :

$$1 + G_B(s) = 1 + \frac{3K_R s e^{-2s}}{5s^2 + 3s + 1}$$

$$\Leftrightarrow 5s^2 + 3s + 1 + 3K_R s e^{-2s} = 0$$

Padé 1^{er} ordre :

$$e^{-2s} \simeq \frac{1-s}{1+s}$$

$$\rightarrow 5s^3 + (8 - 3K_R)s^2 + (4 + 3K_R)s + 1 = 0$$

Routh-Hurwitz :

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 4 + 3K_R \\ 2 & 8 - 3K_R & 1 \\ 3 & \frac{27 + 12K_R - 9K_R^2}{8 - 3K_R} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Conditions : } 8 - 3K_R > 0 & \Leftrightarrow K_R < 2,67 \\ 27 + 12K_R - 9K_R^2 > 0 & \Leftrightarrow -1,19 < K_R < 2,52 \end{array}$$

La vraie condition de stabilité du système bouclé (sans approximation ; étude dans le domaine fréquentiel) est en fait :

$$-1,20 < K_R < 1,78$$

b) Equation caractéristique du système sans retard pur :

$$5s^2 + 3(1 + K_R)s + 1 = 0$$

Condition de stabilité : $K_R > -1$.

On voit que la présence du retard pur limite fortement le domaine de stabilité du système bouclé.

Exercice 5

Montrer que le statisme peut être éliminé de la façon suivante :

- a) en asservissement, si le produit $G_R(s)G(s)$ contient au moins un terme intégrateur,
- b) en régulation, si le produit $G_R(s)G(s)$ contient au moins un terme intégrateur de plus que $G_L(s)$.

Solution

Exprimons $G_B(s) = G_R(s)G(s)$ et $G_L(s)$ comme suit :

$$G_B(s) = \frac{G'_B(s)}{s^\alpha} \quad G_L(s) = \frac{G'_L(s)}{s^\beta} \quad \alpha, \beta : \text{entiers}$$

où $G'_B(s)$ et $G'_L(s)$ ne contiennent pas de termes en $\frac{1}{s}$.

a) En asservissement :

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{G'_B(s)/s^\alpha}{1 + G'_B(s)/s^\alpha} = \frac{G'_B(s)}{s^\alpha + G'_B(s)}$$

En régime permanent ($s \rightarrow 0$), $G'_B(0)$ est fini. Il s'ensuit :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{G'_B(0)}{s^\alpha + G'_B(0)} = 1 \quad (\text{pas de statisme})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s^\alpha = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha > 0$$

b) En régulation

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G'_L(s)/s^\beta}{1 + G'_B(s)/s^\alpha} = \frac{s^{\alpha-\beta}G'_L(s)}{s^\alpha + G'_B(s)}$$

En régime permanent ($s \rightarrow 0$), $G'_B(0)$ et $G'_L(0)$ sont finis. Il s'ensuit :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{AG'_L(0)}{B + G'_B(0)} = 0 \quad (\text{pas de statisme})$$

avec $A = \lim_{s \rightarrow 0} s^{\alpha-\beta}$

$$B = \lim_{s \rightarrow 0} s^\alpha$$

pour $A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \beta$

ou A fini, $B \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq \beta, \alpha < 0$

ou $A \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty$ avec $\alpha < \alpha - \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha, \beta < 0, \alpha < \beta$

Donc, pour ne pas avoir de statisme en régulation, il faut avoir $\alpha > \beta$ ou alors $\alpha, \beta < 0$ (cas très particuliers).

Exercice 6

Soit le système bouclé de la figure 7.2 avec

$$G_R = K_R; G_{OC} = 2; G_P = \frac{0,4(s-a)}{(2s+1)(10s+1)}; G_L = \frac{K_L}{5s+1}; G_{OM} = \frac{1}{s+1}$$

- Déterminer si la présence d'un zéro positif ($\alpha > 0$) influence la stabilité du système bouclé.
- Montrer que la valeur de K_L n'influencera pas la stabilité du système bouclé.

Solution

La stabilité est analysée à partir de l'équation caractéristique :

$$1 + G_R G_{OC} G_P G_{OM} = 1 + \frac{0,8K_R(s-a)}{(2s+1)(10s+1)(s+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 20s^3 + 32s^2 + (13 + 0,8K_R)s + (1 - 0,8K_Ra) = 0$$

- L'équation caractéristique du zéro a , lequel influencera donc la stabilité du système bouclé. La condition de stabilité selon Routh-Hurwitz donne :

1	20	13 + 0,8K _R
2	32	1 - 0,8K _R a
3	12,375 + 0,8K _R + 0,5K _R a	
4	1 - 0,8K _R a	

$$\rightarrow 12,375 + (0,8 + 0,5a)K_R > 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_R > -\frac{12,375}{0,8 + 0,5a}$$

$$1 - 0,8K_Ra > 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_R < 1,25/a$$

Donc, la condition de stabilité en fonction de a est la suivante :

$$-\frac{12,375}{0,8 + 0,5a} < K_R < \frac{1,25}{a}$$

- Comme la fonction de transfert de la perturbation n'intervient pas dans l'équation caractéristique, la valeur de K_L n'influencera pas la stabilité du système bouclé.

7.5 Symboles utilisés

d	perturbation	
e	erreur ou écart de commande	
$G(s)$	fonction de transfert	
h	hauteur	$[m]$
Im	axe imaginaire du plan complexe	
j	$\sqrt{-1}$	
K	gain statique	
m	degré du numérateur d'une fonction de transfert	
M	signal électrique de mesure normé	$[V]$
n	pôle d'une fonction de transfert	
N	signal électrique de commande normé	$[V]$
p	pôle d'une fonction de transfert	
q_e	débit volumique d'entrée	$[m^3/s]$
Re	axe réel du plan complexe	
s	variable complexe de Laplace	
S	Surface de section	$[m^2]$
t	temps	$[s]$
$y(t)$	Signal temporel de sortie (terme général)	
z	zéro d'une fonction de transfert	
θ	retard pur	$[s]$
τ	constante de temps	$[s]$
ω	pulsation	$[rad/sec]$

Indices

X_B	X de la boucle de commande
X_{BF}	X du système en boucle fermée
X_c	X de consigne
X_L	X de la perturbation (« load »)
X_{OC}	X de l'organe de commande
X_{OM}	X de l'organe de mesure
X_P	X du processus
X_R	X du régulateur

Diagramme de Nyquist

8.1 Introduction et objectifs

Ce chapitre décrit le critère de Nyquist. Ce critère permet de déterminer si un système est stable en boucle fermée sans devoir calculer les racines du polynôme du dénominateur de la boucle fermée. Il donne également des marges de stabilité comme la marge de gain et la marge de phase. Le critère utilise la réponse harmonique $K(i\omega)G(i\omega)$ en boucle ouverte afin de déduire la stabilité en boucle fermée.

Nous avons vu au chapitre précédant que la stabilité est déterminée par la position des pôles (zéros du polynôme au dénominateur de la fonction de transfert). Lorsque ceux-ci sont tous dans le demi-plan gauche du plan complexe, la stabilité est garantie (on dit même que la stabilité est de type exponentiel). Lorsqu'un seul de ces pôles est dans le demi-plan droit, le système entrée-sortie représenté par la fonction de transfert est instable.

Un tel critère nécessite ainsi la capacité de calculer les pôles un à un, et ainsi de tous les calculer étant donné qu'un seul d'entre eux peut être responsable du comportement instable.

Dans ce chapitre, nous allons indirectement garantir que tous les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée (asservissement et régulation) se situent du bon côté du plan complexe, le demi-plan gauche, sans devoir calculer individuellement les pôles en boucle fermée.

L'analyse du comportement en boucle fermée est effectuée *sur la connaissance de la boucle ouverte uniquement*. Il faut faire très attention au fait que se sont les données de la boucle ouverte (sous la forme de la connaissance des polynômes des numérateurs et des dénominateurs des fonctions de transfert du régulateur et du système à régler) qui sont utilisées à des fins de conclure sur la stabilité du montage en boucle fermée. Ceci conduit malheureusement à une potentielle source de confusion.

Le critère de Nyquist repose sur un peu d'analyse complexe, et en particulier du théorème de Cauchy. Nous utiliserons le principe de l'argument appliqué à une transformation méromorphe particulière.

Nous ferons donc un rappel de la différence entre polynôme, fonction rationnelle, fonction entière, fonction méromorphe et fonction analytique, avant de présenter la transformation particulière donnant naissance au critère de stabilité.

Le critère est finalement appliqué, en guise d'illustration, au système bille sur une roue.

8.2 Boucle ouverte et boucle fermée

Il est important de rappeler les concepts de boucle ouverte et de boucle fermée. Notons que bien qu'il existe essentiellement deux formes de boucle fermée (celle d'asservissement et celle de régulation), toutes deux possèdent le même polynôme au dénominateur ce qui entraîne que la stabilité de l'une est automatiquement garantie dès lors que les racines de ce polynôme sont toutes dans C_- .

8.2.1 Boucle ouverte

La boucle ouverte est la mise en série du régulateur $K(s)$ et du système à régler $G(s)$ ne supprimant la rétroaction $e(t) = y_c(t) - y(t)$ entre la grandeur de sortie $y(t)$ du système à régler $G(s)$ et l'entrée $e(t)$ du régulateur $K(s)$. Il n'y a pas d'influence du système à régler $G(s)$ sur le régulateur $K(s)$. Ce dernier opère en sorte en aveugle par rapport à la grandeur à commander y (la sortie du système à régler $G(s)$).

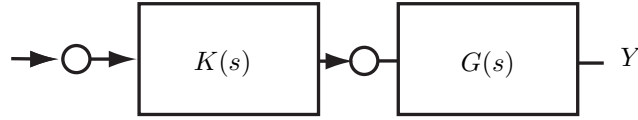


Figure 8.1. Schéma de commande en boucle ouverte qui consiste dans la mise en série du régulateur et du système à régler.

Parmi les fonctions de transfert en boucle ouverte impliquant le système à commander $G(s)$ on peut distinguer la fonction de transfert du système à commander $G(s)$ et la mise en série de la fonction de transfert du système à commander et du régulateur, ce qui donne $K(s)G(s)$.

La fonction de transfert du système à commander $G(s)$

C'est la fonction de transfert définissant le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie $Y(s)$ sur celle de l'entrée $U(s)$

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Le système à régler obéit à des équations différentielles ordinaires qui lient l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$, et par conséquent $G(s)$ est une fraction rationnelle donnée sous la forme d'une fraction entre deux polynômes en s . Par convention, le polynôme au numérateur sera noté $B(s)$ et celui du dénominateur $A(s)$ et ainsi

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

La mise en série $K(s)G(s)$ entre le régulateur et le système à commander

Par définition c'est le produit

$$K(s)G(s)$$

où $K(s)$ est la fonction de transfert du régulateur donné comme le rapport de la transformation de Laplace de la grandeur de commande (sortie de $K(s)$) sur la transformation de Laplace de l'erreur (entrée de $K(s)$).

$$K(s) := \frac{U(s)}{E(s)}$$

Comme le régulateur est également décrit par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, la fonction de transfert $K(s)$ est une fraction rationnelle. Le polynôme du numérateur sera par convention $S(s)$ et celui du dénominateur $R(s)$:

$$K(s) = \frac{S(s)}{R(s)}$$

Pôles en boucle ouverte

Ce sont les zéros du polynôme $A(s)R(s)$.

8.2.2 Boucle fermée

La boucle fermée apparaît dès qu'il existe une influence de la grandeur à commander sur la grandeur d'entrée du régulateur. Parmi toutes celles possibles, on distingue essentiellement deux fonctions de transfert particulières, celle d'asservissement (poursuite de la consigne) et celle de régulation (rejet de perturbation). Grâce au principe de superposition, les deux apparaissent dans le même schéma fonctionnel.

Fonctions de transfert en boucle fermée

Il y a deux fonctions de transfert en boucle fermée, celle d'asservissement

$$G^{y_c \rightarrow y} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{B(s)S(s)}{A(s)R(s) + B(s)S(s)} \quad (8.1)$$

et celle de régulation

$$G^{v \rightarrow y} = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{B(s)}{A(s)R(s) + B(s)S(s)} \quad (8.2)$$

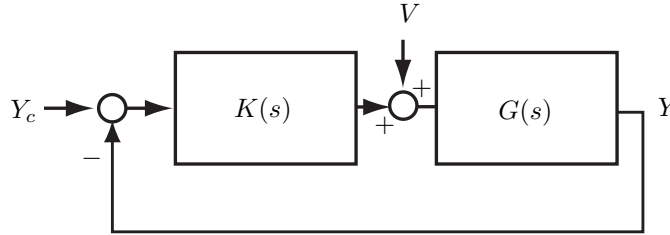


Figure 8.2. Schéma de commande en boucle fermée. La fraction $Y(s)/V(s)$ est décrit par la fonction de transfert en boucle fermée de régulation (8.2) et la fraction $Y(s)/Y_c(s)$ est donné par la fonction de transfert en boucle fermée d'asservissement (8.1).

Pôles en boucle fermée

Les deux fonctions de transfert en boucle fermée, celle d'asservissement et celle de régulation, ont le même polynôme au dénominateur

$$A(s)R(s) + B(s)S(s)$$

qui détermine ainsi les pôles en boucle fermée.

8.3 Principe et critères de Nyquist

Un critère graphique est présenté qui permet de vérifier la stabilité en boucle fermée sans calculer les racines du polynôme du dénominateur $AR + BS$ des fonctions de transfert en boucle fermée. A cette fin, il suffit d'examiner la boucle ouverte en dessinant dans le plan complexe \mathbb{C} la courbe

$$K(i\omega)G(i\omega)$$

pour ω qui varie $\omega \in [-\infty; +\infty]$. Ceci décrit une courbe fermée dans le plan complexe qui peut encercler ou non le point -1 . Comme les coefficients des polynômes apparaissant dans $K(s)$ et $G(s)$ (c.-à-d. les polynômes A , B , R et S), la courbe est symétrique par rapport à l'axe réel.

La stabilité est déterminée par le nombre de fois que la courbe $K(i\omega)G(i\omega)$ encercle le point -1 .

Les hypothèse de stabilité de la boucle ouverte conditionne le type de critère utilisé, le critère de Nyquist simplifié et celui généralisé. Une esquisse de la démonstration du critère généralisé sera effectuée.

8.3.1 Critère de Nyquist simplifié

Theorem 3. (CRITÈRE DE NYQUIST SIMPLIFIÉ) *Hypothèse : Le système en boucle ouverte $K(s)G(s)$ est stable. Sous cette hypothèse, le système est BIBO stable en boucle fermée si et seulement si $K(i\omega)G(i\omega)$ n'encercle pas le point -1 .*

Enonçons le critère généralisé. Une esquisse de la démonstration sera donnée ensuite. L'avantage du critère simplifié est qu'il n'est pas nécessaire de comptabiliser le nombre d'encerclements du point -1 . L'inconvénient est qu'il ne s'applique uniquement aux systèmes stables en boucle ouverte.

8.3.2 Critère de Nyquist généralisé

Theorem 4. (CRITÈRE DE NYQUIST GÉNÉRALISÉ) *Le système $K(s)G(s)$ possède P pôles instables (pôles instables de la boucle ouverte). Le système en boucle fermée est stable, si et seulement si $K(i\omega)G(i\omega)$ encercle le point -1 un nombre de fois correspondant à P dans le sens trigonométrique positif.*

8.4 Un peu d'analyse complexe...

Dans cette section, nous laissons provisoirement de côté le critère de Nyquist et nous étudions des éléments d'analyse complexe essentiel pour sa justification.

8.4.1 Polynômes

Definition 5. (POLYNÔMES) *Un polynôme est une somme finie de monômes*

$$F(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

8.4.2 Fonction entière

Definition 6. (FONCTION ENTIÈRE) *Une fonction entière est une somme infinie de monômes, dont la somme est convergente partout (pour tout $s \in \mathbb{C}$)*

Exemple :

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

Condition \Leftrightarrow pour la convergence dans tout \mathbb{C}

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (|a_i|)^{\frac{1}{i}} = 0 \quad (8.3)$$

8.4.3 Fonction analytique

Definition 7. (FONCTION ANALYTIQUE) *Une fonction analytique est localement une fonction entière Dans un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$*

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s_0)(s - s_0)^i \quad \forall s_0 \in \mathcal{V} \quad a_i(s_0) \in \mathbb{C}$$

- La série converge dans un disque centré en s_0 de rayon $r(s_0)$
(qui peut être petit)
- Le disque de convergence doit être inclut dans \mathcal{V}

8.4.4 Fonction méromorphe

Définition 8. (FONCTION MÉROMORPHE) *C'est une fraction de deux fonctions entières.*

Définition 9. (FONCTION MÉROMORPHE, DÉFINITION ALTERNATIVE PLUS GÉNÉRALE) *C'est une fonction localement définie par une fraction de deux fonctions analytiques.*

8.4.5 Exemples de fonctions méromorphes

Polynôme

$$s + 3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Fraction de deux polynômes

$$\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

A l'aide de fonctions entières bien connues

La fonction sinus est une fonction entière car elle se développe en une série en la variable s qui converge partout. C'est par conséquent une fonction méromorphe. Le sinus est également la différence entre deux exponentielles complexes pondérées ce qui donne une autre démonstration de cette propriété du sinus.

$$\frac{\sin(s)}{s^2 + s + 1} \quad \frac{e^s}{\cos(s)}$$

A l'aide du critère de convergence pour les fonctions entières

Lorsque on effectue une somme infinie de la variable s élevée en puissances successives, les coefficients devant chaque terme peuvent entraîner la convergence pour toute les valeurs de la variable s . Un fonction entière est alors obtenue. Celle-ci n'admet pas nécessairement une description par une fonction bien connue (contrairement à l'exponentielle ou le sinus). Par exemple,

$$\frac{2s + 3}{\sum_0^\infty a_i s^i} \quad a_i = \frac{i + 2}{(\ln(i + 2))^{i+2}} \quad (8.4)$$

est une fonction méromorphe étant donné que la série au dénominateur est une fonction entière. Ce sont les a_i qui ont la propriété (8.3) ce qui garantit cette propriété. Il n'existe pas de fonction connue qui décrive la fraction (8.4). La théorie de ce chapitre s'applique à cette fraction étant donné que c'est une fonction méromorphe.

8.4.6 Transformation définie par une fonction méromorphe

Examinons l'effet d'une application qui prend comme source les points d'un plan complexe et qui les applique dans un autre plan complexe. Soit donc

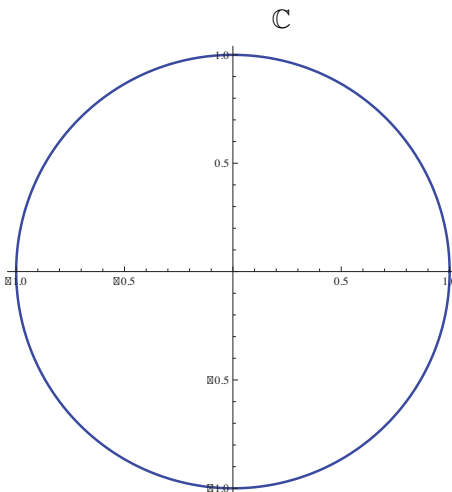
$$H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction méromorphe.

8.4.7 Courbe Γ

Une courbe Γ dans le plan complexe est choisie qui effectue une boucle simple en se refermant sur elle-même. Cette courbe est orientée. Nous choisirons l'orientation comme le sens trigonométrique positif (c'est le sens relatif qui a de l'importance, donc le choix d'une orientation est importante mais sa direction est un choix arbitraire).

$$\Gamma = e^{i\alpha} \quad \alpha \in [0; 2\pi] \quad (8.5)$$



8.4.8 Image de Γ par la fonction méromorphe

Lorsque les points $s \in \Gamma$ varient il est possible de dessiner l'image de ces points par l'application méromorphe, c.-à-d. l'ensemble

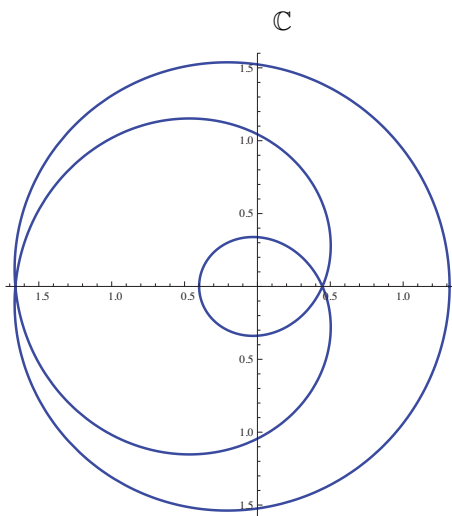
$$H(\Gamma) := \{H(s) | s \in \Gamma\}$$

qui est une nouvelle courbe qui se referme sur elle-même mais qui n'effectue pas nécessairement une boucle simple. En effet, comme l'application H peut être surjective, il est possible que cette courbe repasse par les même points. Elle peut effectuer plusieurs boucles.

Par exemple, lorsque

$$H(s) = \frac{(s + 1.1)^2 + 0.2^2}{(s + 0.5)^3} \quad (8.6)$$

l'image de la courbe Γ donnée par le cercle (8.5), à savoir $H(\Gamma)$ est donnée ci-dessous



8.4.9 Nombre d'encerclements de l'origine et singularités

Supposons que Γ soit décrit par un paramètre $\alpha \in [0; 1]$

$$\Gamma = \gamma(\alpha) \quad \alpha \in [0; 1]$$

Comme la courbe se referme sur elle-même $\gamma(0) = \gamma(1)$ et puisque la courbe est simple $\gamma(\alpha_1) \neq \gamma(\alpha_2)$ lorsque $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1]$.

Etant donné que H peut être surjective, on peut avoir

$$\exists \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad H(\gamma(\alpha_1)) = H(\gamma(\alpha_2))$$

Définition 10. (NOMBRE D'ENCERCLEMENTS N) On appelle N le nombre de fois que la courbe encercle l'origine 0 lorsque $\alpha \in [0; 1]$ pour une courbe Γ paramétrée par α .

Pour la courbe Γ donnée par (8.5), α appartient à l'intervalle $[0; 2\pi[$ et on a $e^{i0} = e^{i2\pi}$.

Définition 11. (Z ET P) Comme H est une fonction méromorphe donnée par le quotient de deux fonctions entières, on appelle Z le nombre de zéros du numérateur de H contenu à l'intérieur de Γ . On appelle P le nombre de pôles de H (zéros du dénominateur) contenu à l'intérieur de Γ .

L'équation $N = Z - P$

Nous avons un théorème important :

Theorem 5. La courbe $H(\Gamma)$ encerle $N = Z - P$ fois l'origine O où Z désigne le nombre de zéros et P le nombre de pôles de H contenus à l'intérieur de Γ .

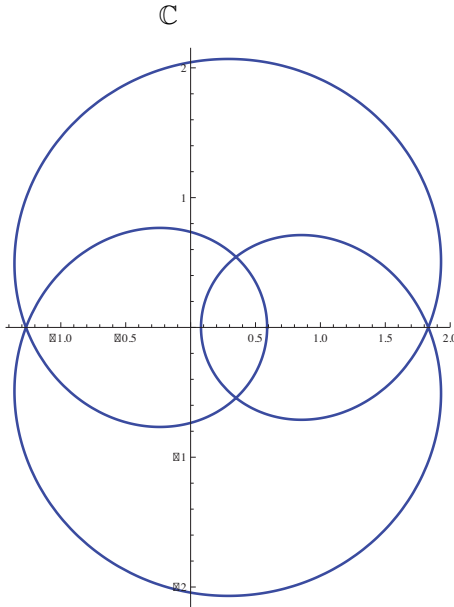
Reprenons l'exemple avec la courbe Γ donnée par (8.5) et la fonction $H(s)$ donnée par (8.6). Z est le nombre de zéros de $H(s)$ à l'intérieur du contour Γ . Comme le numérateur de $H(s)$ est $(s + 1.1)^2 + 0.2^2$, nous avons deux zéros, en $-1.1 \pm 0.2i$ qui sont tous les deux à l'extérieur de Γ car leur module vaut 1.18 qui est supérieur au rayon 1 du cercle Γ . Par conséquent $Z = 0$. En ce qui concerne P , le nombre de pôles de $H(s)$ à l'intérieur de Γ , le dénominateur de Γ a trois racines qui sont toutes en -0.5 , et donc à l'intérieur du cercle unité. En conséquence, $P = 3$. La conclusion est que la courbe $H(\Gamma)$ doit encercler $N = Z - P = -3$ fois l'origine du plan complexe. C'est ce que nous avons constaté en examinant la courbe juste en dessous de l'équation (8.6).

8.4.10 Exemples supplémentaires

Conservons les mêmes pôles qu'auparavant et changeons le numérateur afin d'avoir un zéro unique juste à l'intérieur de Γ . Ceci donne

$$\frac{s + 0.99}{(s + 0.5)^3}$$

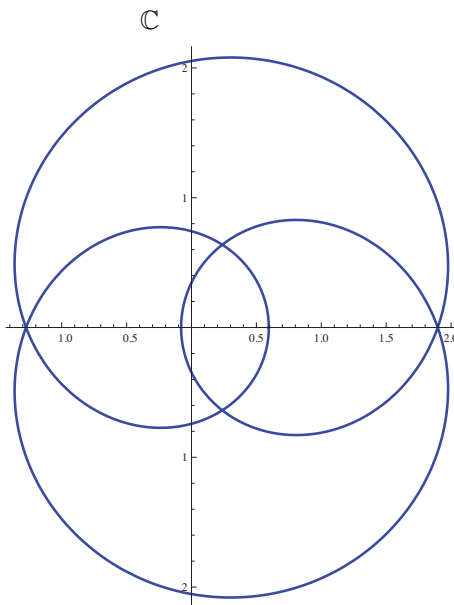
et conduit à la courbe image



La courbe n'encercle que deux fois l'origine car cette fois $N = 1 - P = -2$.

Finalement, déplaçons le zéro juste à l'extérieur de la courbe Γ , autrement dit juste à l'extérieur du cercle unité avec

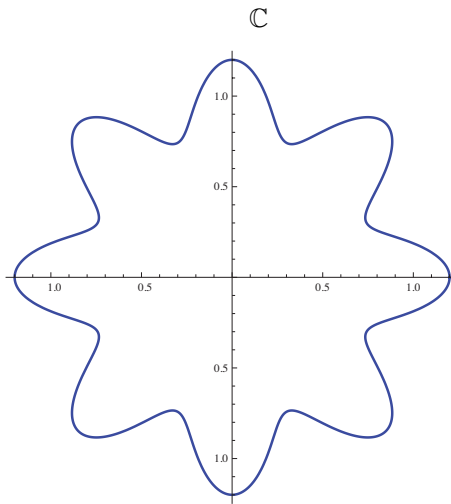
$$\frac{s + 1.01}{(s + 0.5)^3}$$



et on constate que la courbe encercle trois fois dans le sens trig. — puisque nous avons à nouveau $N = Z - P = 0 - 3 = -3$.

Nous pouvons prendre des courbes Γ plus compliquées comme par exemple

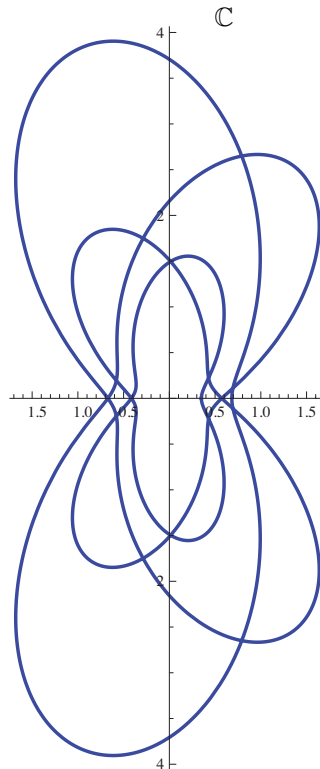
$$\Gamma = (1 + 0.2 \cos(8\omega))e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



et avec comme transformation

$$H(s) = \frac{1}{(s + 0.1)^4}$$

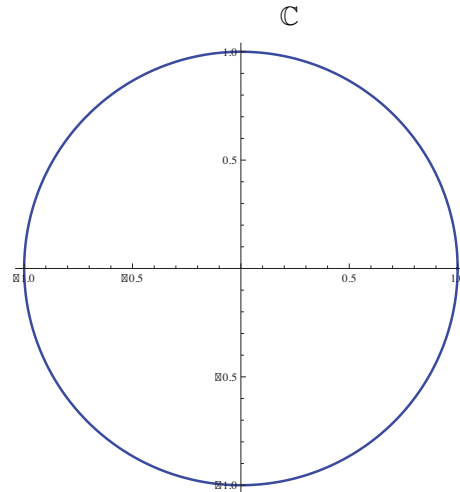
ce qui conduit à la courbe image



qui encercle bien l'origine un nombre de fois compatibles avec la théorie $N = Z - P = 0 - 4 = -4$.

Prenons encore quelques cas où la transformation $H(s)$ est plus compliquée que la fraction de deux polynôme, ceci afin d'effectuer des dessins plus complexes. Cette fois la théorie permet de générer un grand nombre de boucles puisque $Z = N - P$ et en emprisonnant beaucoup de zéros ou de pôles on effectuera beaucoup de tours autour de l'origine. Reprenons le cercle comme courbe initiale

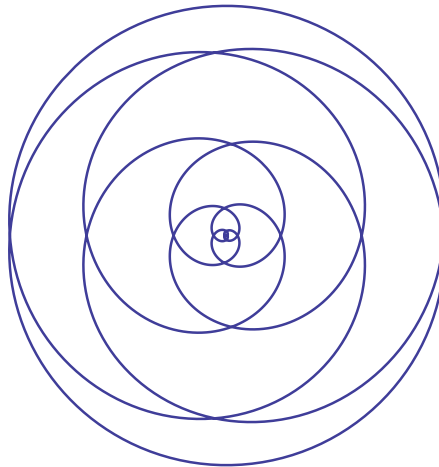
$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



et prenons une fonction sinus de la variable complexe s . Cette fonction possède un nombre infini de zéros.

$$\frac{\sin(22s)}{0.5s - 1}$$

On s'attend alors que la courbe image $H(\Gamma)$ tourne un nombre infini de fois autour de l'origine et c'est ce qui se produit en examinant la figure



8.4.11 Principe de l'argument

Le nombre d'encerclements de l'origine par la transformation d'une courbe fermée peut être justifié par le principe de l'argument dont voici une esquisse. L'idée clé est que seuls les zéros et les pôles situés à l'intérieur de la courbe contribuent à l'argument de la fonction $H(s)$ modulo 2π lorsqu'on considère la variation de l'angle du vecteur reliant un pôle ou un zéro et le point de la courbe paramétré par α . Lorsque le point sur Γ effectue un tour complet, l'angle du vecteur entre ce point et un pôle ou zéro sera un multiple de 2π si celui-ci est à l'intérieur de la courbe Γ ou non. Si c'est un pôle il contribuera -2π , si c'est un zéro, il contribuera $+2\pi$. Tous les pôles et zéros situés à l'extérieur de Γ ne contribueront pas.

Contour Γ et fonction méromorphe $H(s)$

Soit Γ un contour dans le plan complexe qui entoure une région simplement connexe ayant ainsi un intérieur et un extérieur.

La courbe Γ est paramétrée par, par exemple, $\alpha \in [0; 2\pi]$. Soit $H(s)$ une fonction méromorphe qui sera prise, sans perte de généralité, comme une fraction rationnelle contenant

- m zéros $z_i, i = 1, \dots, m$
- n pôles $p_i, i = 1, \dots, n$
- les Z premiers zéros sont à l'intérieur de Γ
- les P premiers pôles sont à l'intérieur de Γ

Principe de l'argument de Cauchy

Theorem 6. (PRINCIPE DE L'ARGUMENT DE CAUCHY)

$$\arg H(\Gamma) = 2\pi(Z - P)$$

Z est le nombre de zéros de $H(s)$ à l'intérieur de Γ

P est le nombre de pôles de $H(s)$ à l'intérieur de Γ

le signe $+$ correspond à la même orientation que celle de Γ

Esquisse de démonstration :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \\ \arg(H(\Gamma)) &= \sum_{i=1}^Z \arg(\Gamma - s_i) + \sum_{i=Z+1}^m \arg(\Gamma - s_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^P \arg(\Gamma - p_i) - \sum_{i=P+1}^n \arg(\Gamma - p_i) \\ &= \sum_{i=1}^Z \arg(\Gamma - s_i) - \sum_{i=1}^P \arg(\Gamma - p_i) \\ \arg(H(\Gamma(\omega)))_{\alpha \in [0, 2\pi]} &= 2\pi(Z - P) \end{aligned}$$

8.5 Démonstration du critère de Nyquist généralisé

Le critère de Nyquist provient de l'application du nombre d'encerclements de l'origine pour un choix de la courbe Γ qui encercle l'ensemble du demi plan droit \mathbb{C}_+ .

La courbe Γ est choisie ainsi comme l'axe imaginaire (qui encercle le demi-plan complexe \mathbb{C}_+

$$\Gamma = \{i\omega, \omega \in]-\infty; +\infty[\}$$

La fonction de transformation est

$$H(s) = 1 + K(s)G(s)$$

En appliquant la méthode de la section précédente, on arrive aux conclusions que le nombre d'encerclements N de la courbe $1 + K(i\omega)G(i\omega)$, $\omega \in]-\infty; +\infty[$ est donné par

$$N = Z - P$$

où

N	Nombre d'encerclements de $1 + K(i\omega)G(i\omega)$ autour de 0
Z	Nombre de zéros de $1 + K(s)G(s)$ dans \mathbb{C}_+
P	Nombre de pôles de $1 + K(s)G(s)$ dans \mathbb{C}_+

étant donné que la courbe Γ entoure tout \mathbb{C}_+ .

Un examen attentif de l'expression $1 + K(s)G(s)$ donne

$$\begin{aligned} 1 + K(s)G(s) &= 1 + \frac{S(s)B(s)}{R(s)A(s)} \\ &= \frac{A(s)R(s) + B(s)S(s)}{A(s)R(s)} \end{aligned}$$

et on peut réécrire le tableau ainsi

N	Nombre d'encerclements de $1 + K(i\omega)G(i\omega)$ autour de 0
Z	Nombre de zéros de $A(s)R(s) + B(s)S(s)$ dans \mathbb{C}_+
P	Nombre de zéros de $A(s)R(s)$ dans \mathbb{C}_+

En remarquant que les zéros du polynôme $A(s)R(s)$ sont les pôles de $K(s)G(s)$ (les pôles de la boucle ouverte, cf. sections 8.2.1 et 8.2.1) et que les zéros de $A(s)R(s) + B(s)S(s)$ sont les pôles des fonctions de transfert en boucle fermée (cf. sections 8.2.2 et 8.2.2), le tableau s'écrit

N	Nombre d'encerclements de $1 + K(i\omega)G(i\omega)$ autour de 0
Z	Nombre de pôles de la boucle fermée dans \mathbb{C}_+
P	Nombre de pôles de la boucle ouverte dans \mathbb{C}_+

Finalement, regarder le nombre d'encerclements de l'origine par $1 + K(i\omega)G(i\omega)$ revient au même à regarder le nombre d'encerclements du point -1 par la courbe $K(i\omega)G(i\omega)$.

N	Nombre d'encerclements de $K(i\omega)G(i\omega)$ autour de -1
Z	Nombre de pôles de la boucle fermée dans \mathbb{C}_+
P	Nombre de pôles de la boucle ouverte dans \mathbb{C}_+

ce qui donne le critère de Nyquist généralisé. En posant $P = 0$ (valable uniquement à condition d'avoir le système en boucle ouverte stable), le critère de Nyquist simplifié est obtenu.

8.6 Exemples

8.6.1 Critère de Nyquist simplifié

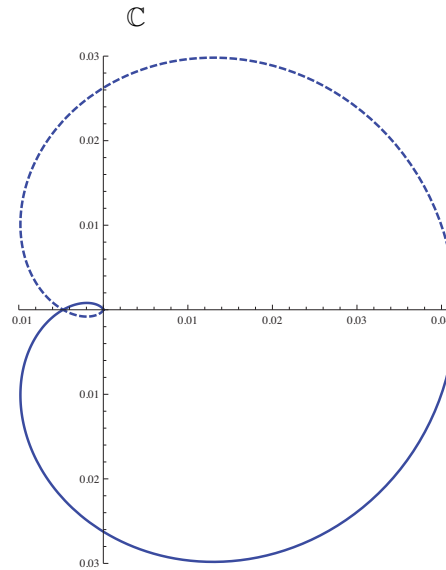
La courbe Γ est choisie comme l'axe imaginaire en laissant de côté tous les pôles situés sur l'axe imaginaire.

$$\Gamma = \{i\omega \in \mathbb{C} | \omega \in \mathbb{R}, \omega \in]-\infty; +\infty[\} \quad (8.7)$$

Par exemple, lorsque $H(s) = 1 + K(s)G(s)$, il revient au même de regarder le nombre d'encerclements de l'origine de $H(\Gamma)$ que le nombre d'encerclements de -1 par $K(\Gamma)G(\Gamma)$. Prenons

$$K(s)G(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \quad (8.8)$$

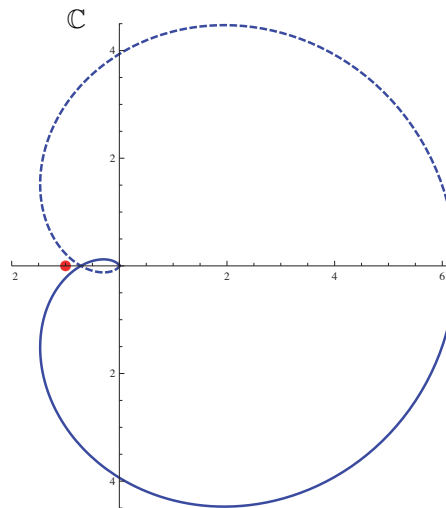
l'image de l'axe imaginaire donné par Γ défini par (8.7) devient



Les pôles en boucle ouverte de $K(s)G(s)$ donnés par les zéros du dénominateur de (8.8) qui sont -2 , -3 , -4 et aucun n'est instable (aucun n'est situé dans \mathbb{C}^+). On peut donc appliquer le critère de Nyquist simplifié en posant $P = 0$. En examinant la figure ci-dessus on constate que la courbe n'encercle pas le point -1 . Ainsi $N = 0$. De là, la conclusion que $Z = N + P = 0 + 0 = 0$. Il n'y a donc pas de pôle instable de la boucle fermée. Prenons comme autre exemple

$$\begin{aligned} K(s)G(s) &= \frac{150}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \\ &= \frac{150}{(s+2)(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{150}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} \end{aligned}$$

On a représenté le point -1 en rouge. Bien que celui-ci se rapproche de la courbe $K(s)G(s)$, il n'est toujours pas entouré et le critère de Nyquist prédit la stabilité de la boucle fermée.



Vérifions que tous les pôles de la boucle fermée sont stables. Rappelons que ce calcul n'est pas nécessaire pour appliquer le critère de Nyquist.

$$\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{150}{s^3 + 9s^2 + 26s + 174}$$

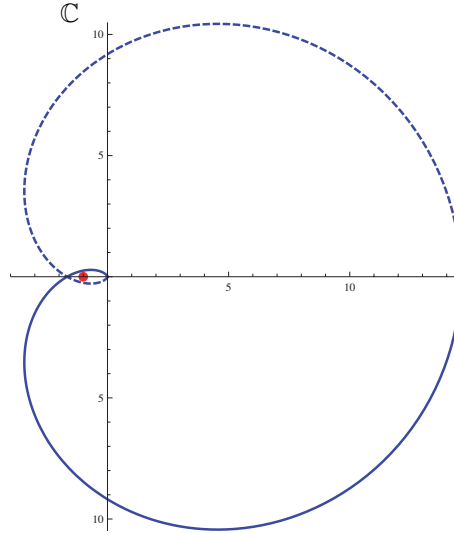
$$\begin{aligned}
A(s)R(s) + B(s)S(s) &= s^3 + 9s^2 + 26s + 174 \\
&= (s + 8.38)(s + 0.31 + 4.55j)(s + 0.31 - 4.55j) \\
&= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)
\end{aligned}$$

Les pôles en boucle fermée sont tous dans le demi-plan gauche ($p_i \in \mathbb{C}_-, i = 1, 2, 3$). Le critère de Nyquist a prédit correctement la stabilité de la boucle fermée.

Prenons un autre exemple, mais cette fois-ci avec un gain statique de la boucle ouverte supérieur

$$\begin{aligned}
K(s)G(s) &= \frac{350}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \\
&= \frac{350}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} \\
&= \frac{350}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}
\end{aligned}$$

En examinant la courbe $K(i\omega)G(i\omega)$ pour $\omega \in [-\infty; +\infty]$, on se rend compte que le point -1 est encerclé une fois. Ceci prédit un pôle instable de la boucle fermée



Vérifions cette prédiction en calculant les pôles de la boucle fermée.

$$\begin{aligned}
\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} &= \frac{350}{s^3 + 9s^2 + 26s + 374} \\
A(s)R(s) + B(s)S(s) &= s^3 + 9s^2 + 26s + 374 \\
&= (s - 10.1)(s + 0.55 + 6.06j)(s + 0.55 - 6.06j) \\
&= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)
\end{aligned}$$

Le pôle $p_1 = 10.1$ conduit à une instabilité car il appartient à \mathbb{C}_+

8.6.2 Critère de Nyquist généralisé

8.6.3 Exemple : bille sur une roue

La fonction de transfert de la bille sur la roue est donnée par

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 0.1}$$

et nous choisissons le régulateur initial sous la forme

$$K(s) = K(1 + 4s)$$

Calcul du nombre de pôle instable de la boucle ouverte :

— 1 pôle instable $p_1 = \sqrt{0.1}$. Ainsi $P = 1$

Le critère de stabilité de Nyquist généralisé détermine N :

— $P = 1$ (1 pôle instable en boucle ouverte)

$Z = 0$ (0 pôles de la boucle fermées dans \mathbb{C}_+)

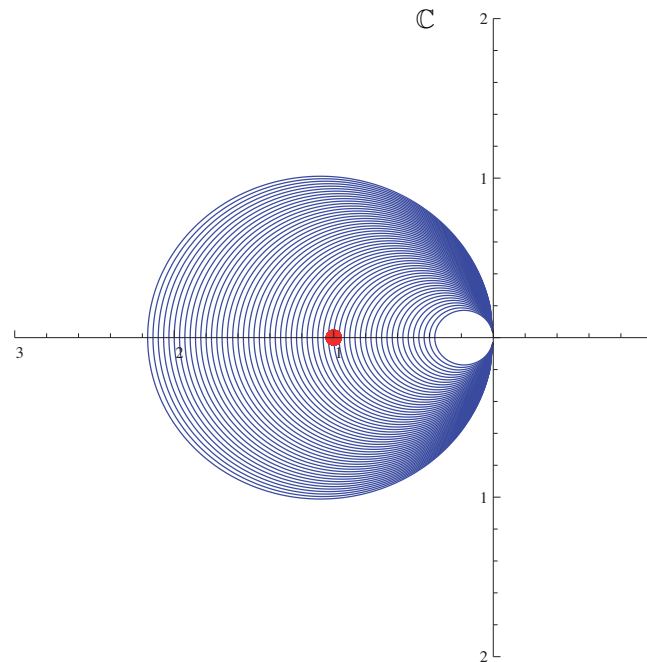
Calculons N (le nombre de tours autour de -1).

$$N = Z - P$$

$$-1 = 0 - 1$$

— $K(j\omega)G(j\omega)$ doit encercler le point -1 une fois pour assurer la stabilité en boucle fermée

Au fur et à mesure que K augmente...



Ainsi il existe un gain suffisamment grand pour lequel on entoure le point -1 conduisant à la stabilité de la boucle fermée. Objectif atteint.

8.7 Conclusion

Un critère de stabilité essentiellement graphique et qui exploite la boucle ouverte en fréquence $K(i\omega)G(i\omega)$ a été présenté et développé dans ce chapitre. Le critère de stabilité possède les propriétés suivantes :

— Pas besoin de calculer les pôles en boucle fermée.

(Pas besoin de calculer les racines de $AR + BS$ avec $K = \frac{R}{S}$ et $G = \frac{B}{A}$.)

— Utilisation uniquement du transfert en boucle ouverte.

(Utilisation directe de KG) et évalué sur l'axe imaginaire. Autrement dit il nécessite la connaissance de $K(i\omega)G(i\omega)$ et non toute la connaissance du transfert $K(s)G(s)$.)

- Il faut seulement connaître le nombre de pôles instables de la boucle ouverte.
(Le nombre de racines instables de AR .)
- Rend possible la synthèse en “sculptant” la boucle ouverte.

Index

- élément de base, 53
- équations différentielles
 - immeuble, 64
- analyse temporelle, 101
 - gain statique, 101
 - gain statique K , 101
 - l'équation caractéristique, 102
 - pôles, 102
 - salle chauffée, 102
 - zéros, 102
- anneau intègre, 61
- approximation linéaire d'un modèle non linéaire, 41
 - Dynamique de population, 44
 - Oscillateur de Van der Pol, 44
 - Procédure de linéarisation, 42
- approximation linéaire d'un modèle non linéaire
 - point de fonctionnement, 42
- approximation linéaire d'un modèle non linéaire
 - point d'équilibre, 42
- associativité, 58
- bille sur roue, 24
 - modélisation, 35
- boucle
 - fermée, 183
 - ouverte, 182
- calcul opérationnel, 59
- commande automatique, 20
 - boucle de rétroaction, 21
 - Problème d'asservissement, 22
 - Problème de régulation, 22
- commande dérivée, 148
- commande intégrale, 147
- commande proportionnelle, 142
 - effet de la perturbation $T_e(t)$, 145
- commande proportionnelle-intégrale, 148
 - effet de la consigne T , 148
 - effet de la perturbation $T_e(t)$, 149
- Commande proportionnelle-intégrale-dérovée
 - effet de la perturbation $T_e(t)$, 150
- commande proportionnelle-intégrale-dérovée, 149
 - effet de la consigne $T_c(t)$, 150
- commandes élémentaires, 131
 - commande en boucle fermée, 131
 - commande en boucle ouverte, 131
- commutativité, 58
- corps de fraction, 61
- critère
 - fonction entière, 184
- critère de Nyquist, 183
- Critère de stabilité de Routh-Hurwitz, 171
- critère de stabilité de Routh-Hurwitz
 - approximation d'un retard pur, 173
- diagramme
 - Nyquist, 181
- dimensionnement des régulateurs P , PI et PID
 - méthode de Ziegler-Nichols, 153
- dimensionnement des régulateurs P , PI et PID , 152
 - constante de temps dominante, 153
 - spécification du système bouclé, 156
- distributivité, 58
- fonction de transfert, 80
 - en boucle fermée, 183
 - fonction de transfert, 80
- fonction du temps, 51
- identité neutre, 55
- immeuble, 23, 63
 - équations différentielles, 64
 - modèle, 64
 - modélisation, 34
- impulsion de Dirac, 56
- irrigation, 22
 - modélisation, 33
- modélisation, 33
 - bille sur roue, 35
 - immeuble, 34

- irrigation, 33
- moteur électrique, 33
- modèle
 - immeuble, 64
- modèle d'état, 28
 - état, 28
 - concept d'état, 28
 - cuve de mélange, 22
 - modèle d'état, 29
 - vecteur d'état, 28
- modèles mathématiques, 25
 - modèle de connaissance, 25
 - modèle de représentation, 25
- moteur électrique, 23
 - modélisation, 33
- Nyquist, 181
- opérateur
 - dérivée, 60
 - intégral, 59
 - neutre, 59
- performance d'un système bouclé, 174
 - asservissement et régulation, 175
- pincipe
 - de superposition, 51
- position des pôles et réponse temporelle, 121
- position des pôles et réponse temporelle
 - dominant, 122
 - mode, 121
 - signal instable, 121
 - signal stable, 121
 - stable, 122
- principe de superposition, 51
- produit de convolution, 58
- propriétés de la transformation de Laplace, 74
 - Dérivation, 77
 - grammaire, 77
 - intégration temporelle, 75
 - translation dans le domaine de Laplace, 75
 - translation dans le temps, 76
 - valeur finale, 76
 - valeur initiale, 77
- propriétés de la transformation de Laplace
 - dérivation temporelle, 74
- régulation de température, 135
- réponse
 - impulsionnelle, 57
 - indicielle, 52
- résolution
 - d'équations différentielles, 61
- simulation, 37
 - intégration numérique, 37
 - pas d'intégration, 37
 - Runge-Kutta, 38
 - simulation, 37
- stabilité et performance des systèmes bouclés
 - critère de stabilité, 167
 - stabilité BIBO (Bounded Input, Bounded Output) , 167
- stabilité et performance des systèmes bouclés, 167
- structure anti-sismique, 63
- système, 51
 - linéaire, 51
- système du deuxième ordre, 115
 - réponse indicielle, 116
 - systèmes oscillants et non oscillants, 118
- système du deuxième ordre
 - identification de la fonction de transfert, 118
- système du premier ordre, 107
 - réponse harmonique, 110
 - réponse impulsionnelle, 109
 - réponse indicielle, 107
- système dynamique, 11
 - causalité, 19
 - les entrées , 18
 - les paramètres , 18
 - les perturbations , 18
 - linéarité, 19
 - relation chronologique, 12
 - stationnarité, 19
 - système linéaire continu, 14
 - systèmes monovariabiles, 20
 - systèmes multivariabiles , 20
- système intégrateur, 113
- système dynamique
 - entrées, perturbations, paramètres , 18
- table
 - de correspondance des opérateurs, 63
- théorème
 - fondamental, 60
- transformée de Laplace de signaux choisis, 71
 - dictionnaire de la transformation de Laplace, 74
 - impulsion de Dirac, 72
 - réponse impulsionnelle, 73
 - rampe, 72
 - saut unité, 71
 - sinus et cosinus, 72
- transformation de Laplace inverse, 83
 - éléments simples, 83
 - la méthode des résidus, 85
- transformée de Laplace de signaux choisis
 - exponentielle, 72