Introduction à la commande des systèmes dynamiques
11. observateur

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Contenu

Motivation 1, réduire le nombre de capteurs

Etats et sorties

- Lorsqu'il y a beaucoup d'états, il n'est pas possible de mettre un capteur par état
- Les états peuvent être difficiles d'accès (capteur de température à l'intérieur d'un chauffe eau par exemple, l'eau est divisée en plusieurs couches isothermes)
- Les capteurs sont onéreux

Motivation 2, le bruit dans les mesures

Nécessité d'un filtrage

- Les mesures sont bruitées
- Ces hautes fréquences doivent être supprimées en conservant les mesures
- Un filtre classique introduit un délai
- Que faire ?

Solution

Estimateur / observateur

Un observateur permet de réduire le bruit sans introduire de délai entre les mesures bruitées.

Structure mathématique

Hypothèses

Les matrices A, B, C, et D sont connues parfaitement.

Copie du système en représentation d'état, qui est *simulé*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du \end{aligned}$$

La variable $\hat{x}$ est l'estimation de l'état x. Les équations différentielles ci-dessus sont simulées dans un ordinateur qui fonctionne en parallèle avec le vrai système !

Structure mathématique

... et faire converger l'observateur sur le système ...

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du\end{aligned}$$

Remarques

- Vecteur vertical de gains $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- La sortie du vrai système y (bruitée) est comparée à la sortie filtrée $\hat{y} = C\hat{x}$
- La convergence est assurée si L est bien choisi

Placement des valeurs propres

On a vu le placement de valeurs propres par la méthode des formes canoniques pour le régulateur d'état.

Vecteur de gains du régulateur d'état

$$K = \begin{pmatrix} \bar{a}_n - a_n & \bar{a}_{n-1} - a_{n-1} & \ldots & \bar{a_1} - a_1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}$$

lorsque...

- Polynôme caractéristique $\lambda(A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$
- Polynôme caractéristique désiré $\bar{\lambda} = \lambda^n + \bar{a}_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n$
- Système est gouvernable, c.-à-d. la matrice $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & \ldots A^{n-1}B \end{pmatrix}$ est inversible
- Matrice de gouvernabilité de la forme canonique $\mathcal{C}_c$

Placement des valeurs propres

Vecteurs de gain de l'observateur

$$L^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_n - a_n & \bar{a}_{n-1} - a_{n-1} & \dots & \bar{a_1} - a_1 \end{pmatrix} (\mathcal{O}_c)^T (\mathcal{O}^T)^{-1}$$

lorsque...

- Polynôme caractéristique $\lambda(A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$
- Polynôme caractéristique désiré $\bar{\lambda} = \lambda^n + \bar{a}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n$
- Système est observable, c.-à-d la matrice $\mathcal{O}^T = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \ldots (A^T)^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible
- Matrice d'observabilité de la forme canonique $\mathcal{O}_c$

Placement des valeurs propres

Justification

Théorème de la dualité

(A, B) gouvernable $\Leftrightarrow (B^T, A^T)$ observable

Démonstration

Directement des définitions de la matrice de gouvernabilité et d'observabilité en utilisant les critères des rangs.

Principe de séparation

Le régulateur et l'observateur fonctionnent de concert

On remplace x par $\hat{x}$ et on a

$$u = -K\hat{x}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax - BK\hat{x} \\
y &= Cx - DK\hat{x} \\
\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} - BK\hat{x} + L(y - \hat{y}) \\
\hat{y} &= C\hat{x} - DK\hat{x}
\end{aligned}$$

Principe de séparation

Principe de séparation

Les valeurs propres du système complet sont l'union des valeurs propres de l'observateur et de celles fixées par le gain K *comme si le système n'avait pas eu d'observateur*, c.-à-d. $u = -Kx$.
(Démonstration dans la série d'exercices.)