

Leçon 2 : phénomènes et modélisation

$$\frac{CSD - SIE}{\delta}$$

3/2/21

Ph. Millhaupt



II Modélisation

1. Exemples
2. Points communs
3. Représentation d'état
 $\equiv$ définition syst. dynamique
4. Boîtes noires et modèles.

1.1 Champs et irrigation



$$K \sqrt{2g |h_1 - h_2|}$$

paramètres: A_1 : surface du champ

A_2 : surface section de la cuve

K : facteur de conversion

variables: h_1 : hauteur de l'eau dans le champ. ($\sim$ humidité)

h_2 : " " " " le réservoir.

V : débit de la place

u : " de pompage

$$\dot{h}_1 = \frac{\Delta h_1}{\Delta t}$$

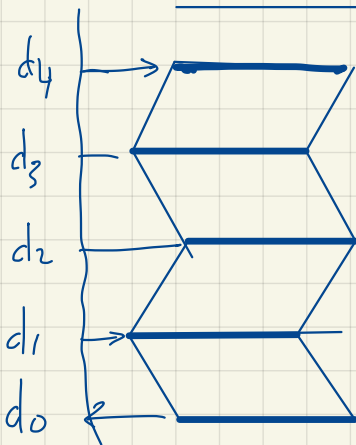
modèle:

$$A_1 \dot{h}_1 = ?$$

//

$$A_2 \dot{h}_2 = u \quad ?$$

1.2 structure anti-symique



$$m \ddot{d}_4 = F_4 = k (d_3 - d_4)$$

$$m \ddot{d}_3 = ?$$

$$m \ddot{d}_2 = ?$$

$$m \ddot{d}_1 = ?$$

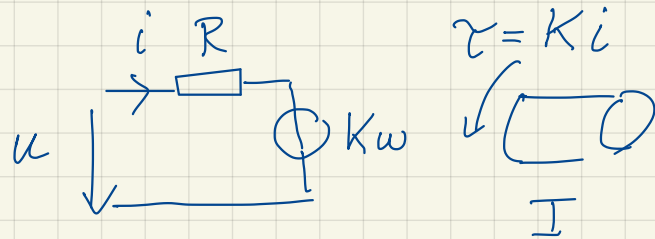
+ F

- F

Paramètres: k : constante de rigidité $[N/m]$
 m : masse $[kg]$

Variables: d_i : déplacements F : force du mécanisme anti-sismique
 d_0 : position de la fondation

1.3 moteur électrique



$$\omega = \dot{\theta}$$

paramètres
 J : inertie
 R : résistance électrique
 K : constante de couple et de tension induite
 ω : vitesse angulaire $[rad/s]$

variables: i : courant $[A]$
 u : tension $[V]$
 θ : position angulaire $[rad]$

modèle:

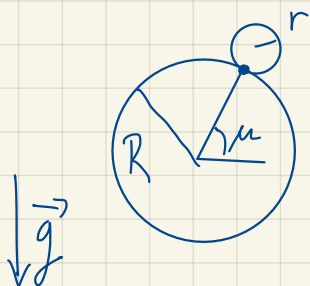
b : coefficient de frottement visqueux
 $[N \cdot s / rad]$

$$\begin{cases} J \dot{\omega} = Ki - b\omega + \tau_{perturbé} \\ u = Ri + Kw \\ \omega = \dot{\theta} \end{cases}$$

en position angulaire: $J \ddot{\theta} = \frac{K}{R} u - \left(\frac{K^2}{R} + b \right) \dot{\theta} + \tau_{perturbé}$

en vitesse: $J \dot{\omega} = \frac{K}{R} u - \left(\frac{K^2}{R} + b \right) \omega + \tau_{perturbé}$

1.4 Bille sur roue



μ : angle du point de contact

θ : angle de la roue

ϕ : angle de la bille

roulement sans glissement

$$\mu = \frac{r}{R} \phi + \theta$$

$$\begin{bmatrix} I_R + m(r+R)^2 & \frac{r}{R} m(r+R)^2 \\ \frac{r}{R} m(r+R) & I_r + \frac{r^2}{R^2} m(r+R)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}$$

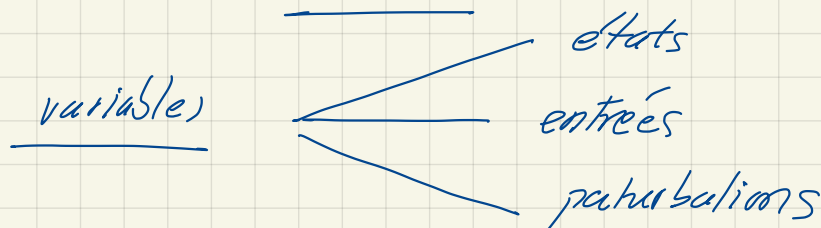
$$= \begin{bmatrix} -mg(r+R) \cos\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right) + \tau \\ -mg(r+R) \frac{r}{R} \cos\left(\frac{r}{R}\phi + \theta\right) \end{bmatrix}$$

Paramètres: m : masse I_R : inertie roue
 g : gravité
 I_r : inertie bille

Variables: $\theta, \dot{\theta}$
 $\phi, \dot{\phi}$
 τ : couple (moment de force) pour bayer,
maintenir en équilibre

2. Points communs:

paramètres et variables



et 1 variable (homogène) dont la progression est
uniforme : c'est la variable chronologique, le temps t

Les variables obéissent aux équ. différentielles

On introduit autant de variables que l'ordre du système d'équations différentielles : ce sont les variables d'état.

les variables qui n'obéissent pas à des équations diff. explicites servent les entrées et les perturbations.

2.1 champ et irrigation

$$\begin{aligned}x_1 &= h_1 \\x_2 &= h_2\end{aligned}$$

mais on aurait pu choisir

$$\begin{aligned}x_1 &= h_2 \\x_2 &= h_1\end{aligned}$$

pire encore

$$\begin{aligned}x_1 &= h_1 - h_2 \\x_2 &= h_1 + h_2\end{aligned}$$

2.2 immeuble

$$\begin{aligned}x_1 &= d_1 & x_5 &= d_3 \\x_2 &= \dot{d}_1 & x_6 &= \dot{d}_3 \\x_3 &= d_2 & x_7 &= d_4 \\x_4 &= \dot{d}_2 & x_8 &= \dot{d}_4\end{aligned}$$

2.3 moteur

en position :

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \omega$$

en vitesse :

$$x_1 = \omega$$

2.4 bille sur roue

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta, & x_2 &= \dot{\theta} \\x_3 &= \phi, & x_4 &= \dot{\phi}\end{aligned}$$

3. Représentation d'état : n : ordre du syst. (complet)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

modèle (linéaire)

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = A \underline{x} + B_u u + B_v v$$

↑
entrée

↑
perturbation

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$B_u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$B_v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

Modèle non linéaire :
d'état

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

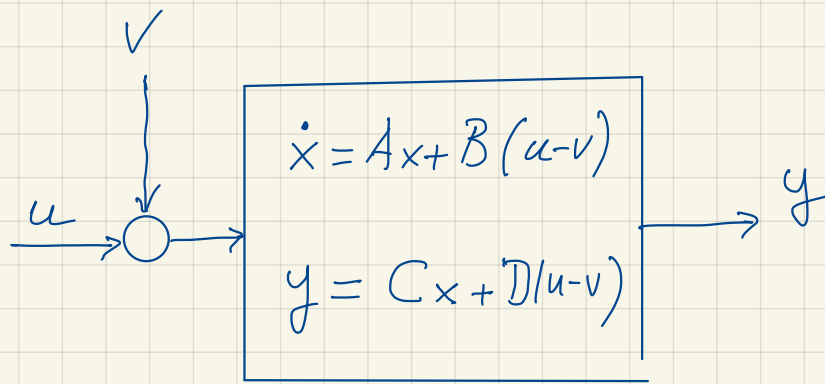
$$\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, u, v)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}, u, v) \\ f_2(\underline{x}, u, v) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}, u, v) \end{bmatrix}$$

notation "allégée"
(on ne souligne plus x)

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_v v$$

Déf: Les variables d'état représentent les conditions initiales, tout ce qui est nécessaire de connaître des variables à l'instant t .



$$C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad D \in \mathbb{R}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$c_i \in \mathbb{R}$$

$$b_i \in \mathbb{R}$$