

heson11 - Observateurs

26 mai 2001

Ph. Teilhaupt



Plan :

- motivations
 - observateur $\equiv$ copie du système simulé en
parallèle avec le système à commander
+ mécanisme de convergence.

construction
mathématique
 - observateur / régulateur
 - principe de séparation
-

motivation

1) beaucoup d'états
peu de mesures

$$\dim x = 500$$

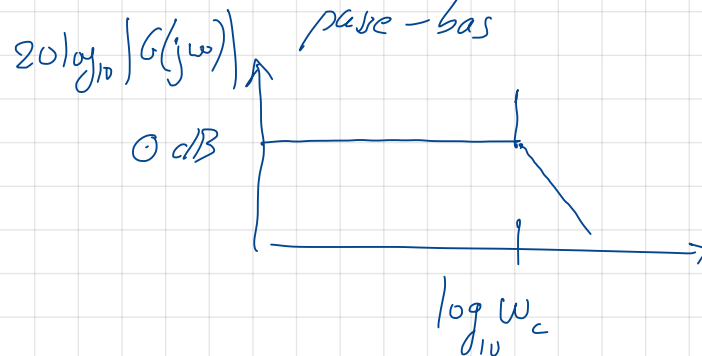
$$\dim y = 1$$

2) les mesures ont du bruit
incertitudes sur les mesures

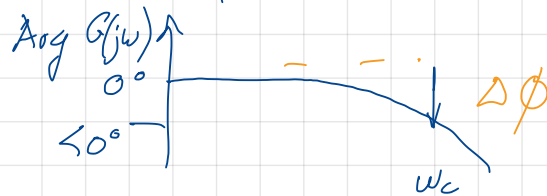
$\Rightarrow$ nécessité de filtrer

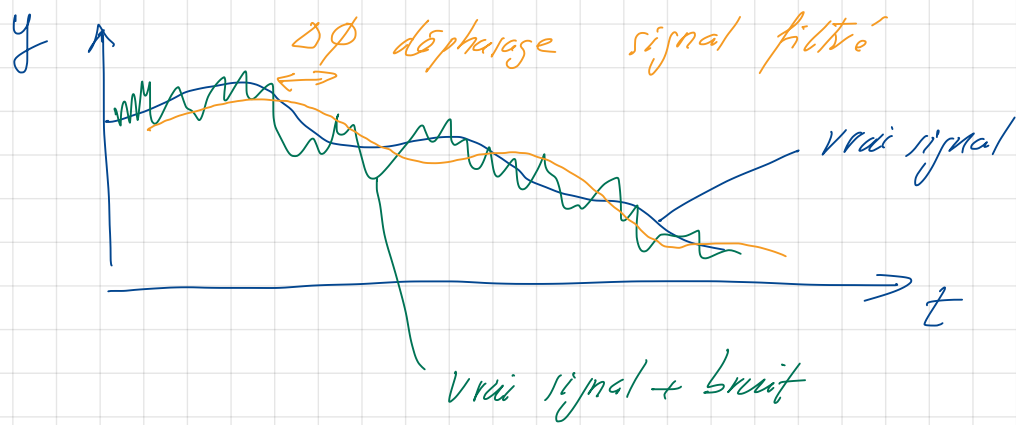
solution simple : filtrer avec un filtre
passe-bas

$|G(s)|$ est le
filtre



cette solution ne convient pas, car on est
toujours en retard





$$y(t)$$

$$y_b(t) = y(t) + n(t)$$

$n(t)$ signal stochastique
(toutes les fréquences)

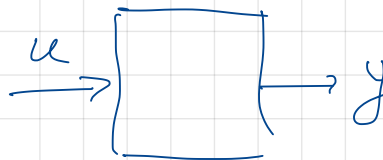
$$\hat{y}(t)$$

y estimé par FILTRAGE PASE-BAS

Inconvénient : On est en retard.

2) suite éliminer le retard tout en éliminant le bruit et ainsi estimer $\hat{y}$ de manière plus efficace.

Systeme à commander en représentation d'état:



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (n \text{ grand})$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

modèle de la réalité.

Pour être efficace, il faut une très bonne connaissance de la réalité, un bon modèle.

[On suppose que A, B, C sont parfaitement connues.]

[On effectue une copie des équ. diff. que l'on simule en parallèle du système à régler
les états de cette simulation $\hat{x}$ ne sont pas les états du système à commander: x

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A \hat{x} + Bu \\ \hat{y} = C \hat{x} \end{cases}$$

u est accessible dans la réalité (syst à commander)
on utilise la même entrée pour le système simulé.

$\uparrow$
estimation de la sortie

Si $x_0 \neq \hat{x}_0$, l'observateur (*) n'a pas de mécanisme pour faire converger $\{\hat{x}(t)\} \rightarrow \{x(t)\}$

A cette fin, on introduit (une matrice / un vecteur) de gains L

$$\dim L = n \times 1$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad l_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, n.$$

Observateur de Luenberger

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Thm: Lorsque $\operatorname{Re}(\lambda(A-LC)) < 0$,
 $\hat{x} \rightarrow x$, exponentiellement.

Démonstration:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - Ly - L C \hat{x}$$

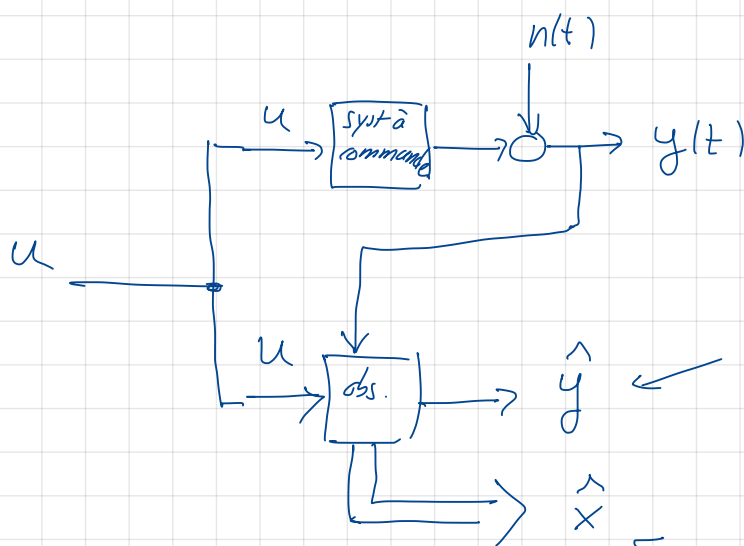
$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{(A-LC)}_{\text{matrice}} \hat{x} + Bu - Ly$$

si cette matrice a toutes ses valeurs propres à parties réelles négatives le système converge.

$$e = x - \hat{x}$$

$$\dot{e} = (A-LC)e$$

$e \rightarrow 0$ exponentiellement.



objectif 2) $n(t)$ a moins d'effet sur $\hat{y}$ que sur y .

objectif 1)
estimation de x

3. observateur / régulateur

On effectue une régulation d'état à l'aide du vecteur de gains $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

— régulation d'état classique sous hypothèse d'un système gouvernable

$$u = -Kx$$

$$u = -[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$K = (\bar{a}_n - a_n \ \dots \ \bar{a}_1 - a_1) C_c^{-1}$$

$$C_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

polynôme caractéristique désiré:

$$\bar{\lambda} = \lambda^n + \bar{a}_1 \lambda^{n-1} + \bar{a}_2 \lambda^{n-2} + \dots + \bar{a}_n$$

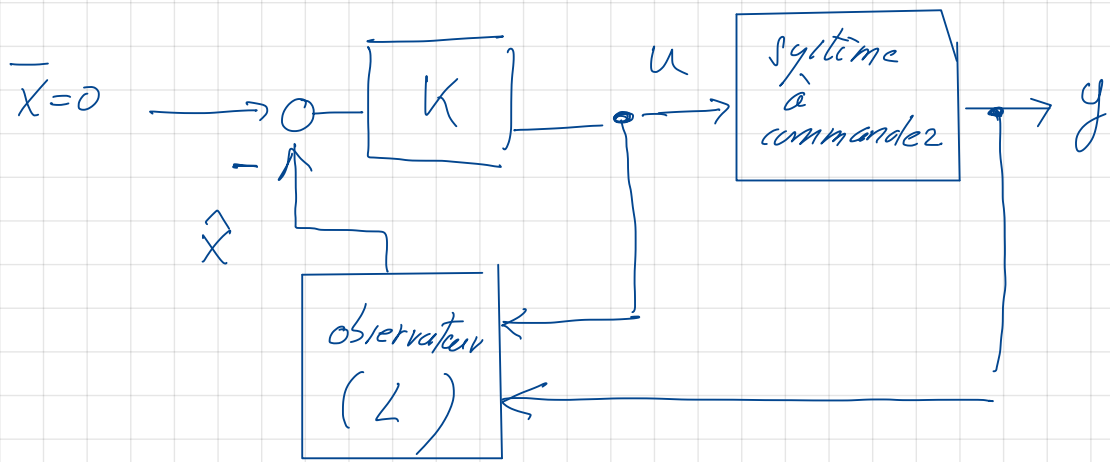
Valeurs propres désirées $\bar{\lambda}_i \in \mathbb{C}^-$

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=1}^n (\lambda - \bar{\lambda}_i) \rightarrow \bar{a}_i, i=1, \dots, n.$$

Cependant x n'est pas mesuré, pas accessible

Solution: Remplacez x par $\hat{x}$!

Régulation à $\bar{x}=0$



4. principe de séparation

Thm: Les valeurs propres du système observateur + régulateur d'état + système à commander est l'union des valeurs propres du système à commander régulé par le régulateur d'état sans observateur et celles de l'observateur en boucle ouverte.

$$\lambda(A-BK) \cup \lambda(A-LC)$$

= valeurs propres de l'observateur/régulateur (Δ)

$$\begin{aligned} \textcircled{\Delta} \rightarrow & \begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} \\ y = Cx \end{cases} & (u = -K\hat{x}) \\ \rightarrow & \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} + L(Cx - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Etat étendu $x_e = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$

$\dim x_e = 2n.$

① $\begin{cases} \dot{x}_e = A_e \cdot x_e \end{cases}$

$$A_e = \begin{bmatrix} A & -BK \\ +LC & A-BK-LC \end{bmatrix}$$

Thm de séparation

$$\lambda(A_e) = \lambda(A-BK) \cup \lambda(A-LC)$$

Démonstration : exercice X.2

Détermination de L :

Placement des valeurs propres de l'observateur

Thm de dualité

gouvernabilité : $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$

observabilité : $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^T = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} \stackrel{||}{=} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C} \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Thm de dualité

A un système gouvernable (A, B) , il y correspond le système observable $(A^T, B^T = C)$

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \end{array} \right. & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = A^T z + B^T u_2 \\ y_2 = B^T z \end{array} \right. \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gouvernable} & & \text{observable} \end{array}$$

Également à un système observable (A, C) , il y correspond le système gouvernable $(A^T, B = C^T)$

Utilisons ceci pour obtenir une formule pour L .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{système à commander} \\ \text{sous hypothèse d'observabilité} \end{array}$$

il est possible de calculer les gains L en construisant le système fictif gouvernable associé $A^T \quad C^T = B$.

$\Rightarrow$

$$L^T = (\bar{a}_n - a_n \quad \dots \quad \bar{a}_1 - a_1) C_c^{-1}$$

$\uparrow$

$$C_c = O_c^T \quad C = O^T$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

formule pour L :

$$L^T = (\bar{a}_n - a_n \quad \dots \quad \bar{a}_1 - a_1) O_c^T (O^T)^{-1}$$

↑
gain de l'observateur

$\bar{a}_i$ coefficients du polynôme caract. désiré pour l'observateur.

a_i coefficients du pol. car. $|\lambda I - A|$

O_c : matrice d'observabilité du système canonique

$$\begin{bmatrix} C_c \\ C_c A_c \\ \vdots \\ C_c A_c^{n-1} \end{bmatrix}$$

O : matrice d'observabilité

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Formule d'Ackermann (pour déterminer K) (et L par dualité)

marcne à suivre:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

1°) constituer $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$

2°) inverser: C^{-1}

3°) retenir que la dernière ligne $e_n^T C^{-1}$

$$e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

4°) choisir les valeurs propres désirées $\lambda_i \in \mathbb{C}^-$

5°) développer $\lambda^n + \bar{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_n$

$$K = e_n^T C^{-1} \left(A^n + \bar{a}_1 A^{n-1} + \bar{a}_2 A^{n-2} + \dots + \bar{a}_n I \right)$$