

Leçon 10 : observabilité et gouvernabilité

5/5/2021

Th. Villhaupt



Plan :

1. Définition obs. pour
2. critères
3. fonction de transfert

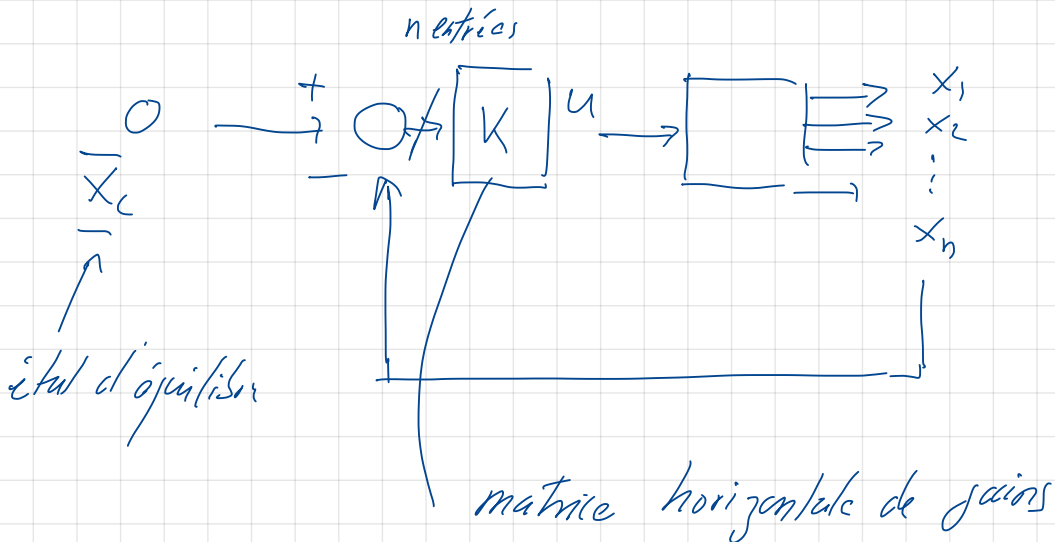
$$z = P x \quad P \text{ matrice de changement de coordonnées}$$

état $x \rightarrow$ état z

équivalence des représentations d'état

4. formes canoniques
observable
commandable

3. Régulateur d'état



$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \quad k_i \in \mathbb{R}$$

Définition:

observabilité:

$$\forall T$$

$$\underline{x}_0 = f(\{u(t)\}, \{y(t)\}) ?$$

$$t \in [0; T]$$

$\Rightarrow$ idée est-il possible de reconstruire la condition initiale en utilisant uniquement l'entrée et la sortie?

gouvernabilité:

$$\forall \underline{x}_0$$

$$\forall \underline{x}_T$$

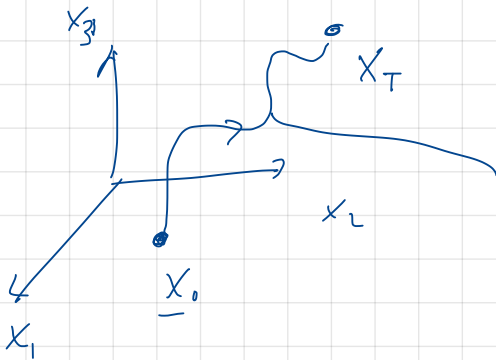
$$\forall T$$

$\Rightarrow \{u(t)\}$ qui transforme

$$x(0) = \underline{x}_0$$

$$\tilde{a} \quad x(T) = \underline{x}_T$$

$$\{\underline{x}(t)\} \quad t \in [0; T]$$



Critères

1°/ observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Thm: Syst. observable $\Leftrightarrow$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{matrix} = n$$

$\xleftarrow{\quad n \quad}$

intuition

$$y = Cx \quad \dim x = 2$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad C = [c_1 \quad c_2]$$

$y = 3$ il y a plusieurs possibilités pour x_1 et x_2

$$C = [1 \quad 2]$$

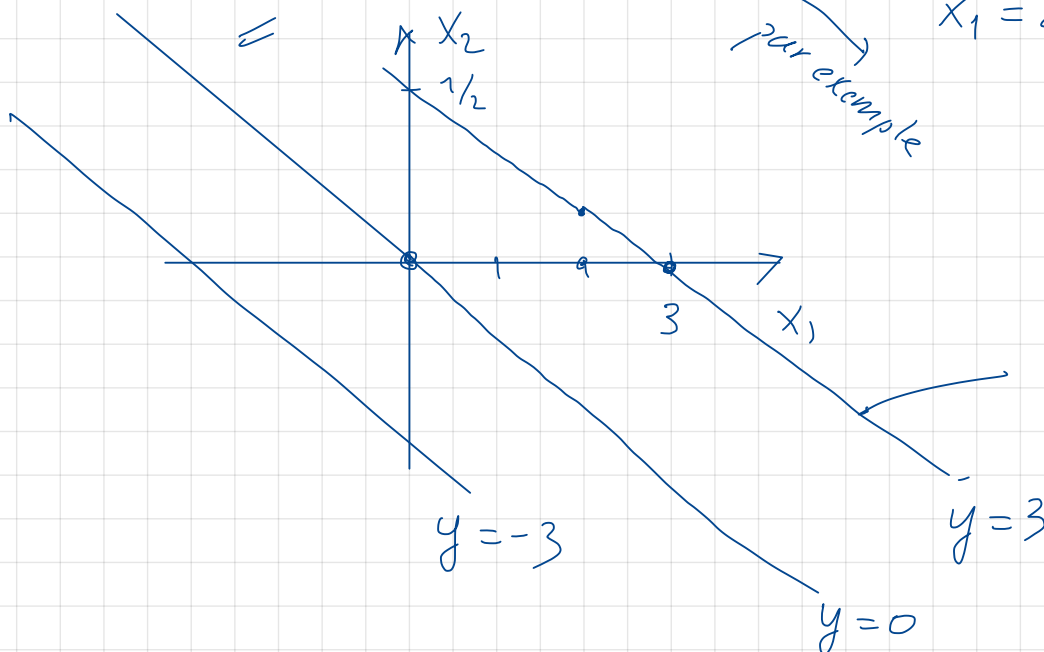
$$y = 3 = x_1 + 2x_2$$

par exemple

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 0$$

par exemple

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$



$$\{x \mid y = Cx\}$$

Système dynamique

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad \dim x_k = 2.$$

$$y_k = Cx_k$$

$$y_{k+1} = Cx_{k+1} = CAx_k + CBu_k$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} - CBu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx_k \\ CAx_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} x_k$$

$$x_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} - CBu_k \end{bmatrix}$$

$h=0 \rightarrow$ condition initiale

$$x_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 - CBu_0 \end{bmatrix}$$

c'est possible uniquement si la matrice d'observabilité est de plein rang.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } O = n$$

$\Leftrightarrow$ observable

gouvernabilité

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \end{array} \right.$$

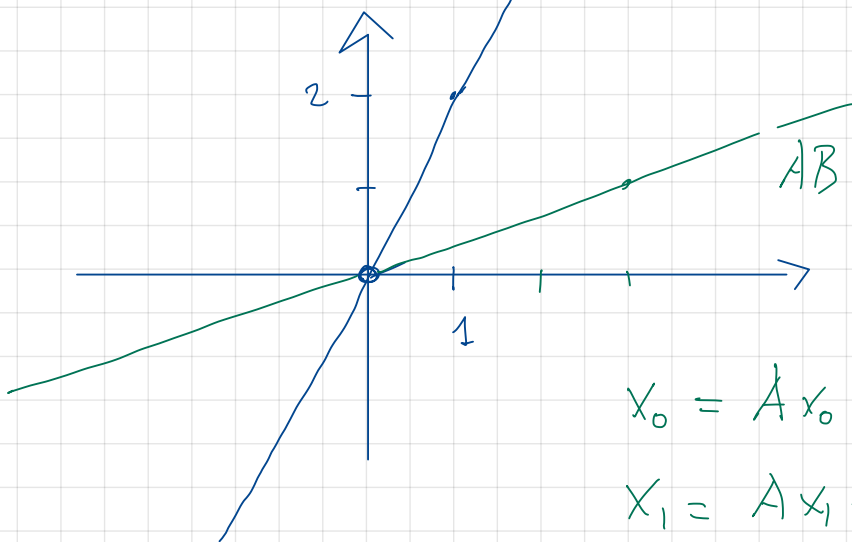
$x_0 \rightarrow x_T$ en choisissant $\{u(t)\}_{t \in [0; T]}$

critère

(1) est gouvernable $\Leftrightarrow$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{h+1} = Ax_h + Bu_h \end{array} \right.$$



$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = Ax_0 + Bu_0$$

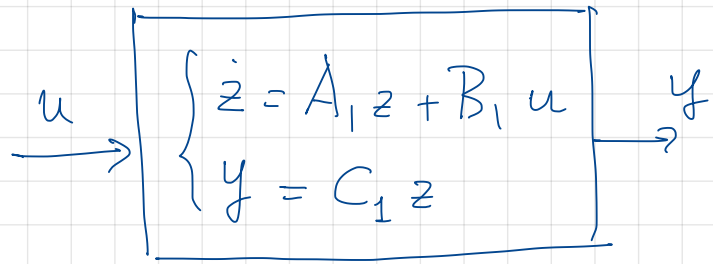
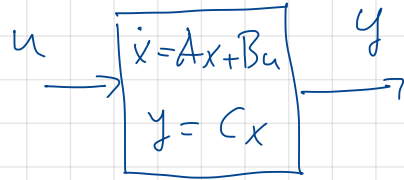
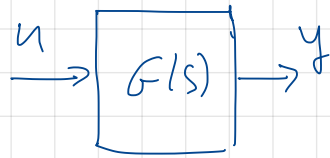
$$x_1 = Ax_1 + Bu_1 = ABx_0 + Bu_1$$

$$x_T = \dots$$

dérivent une fonction de $x(T)$ et $x(0)$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

3. fonction de transfert



$$z = P x$$

changement de coordonnées
qui ne change pas la fonction
de transfert

P doit être inversible

$$x = P^{-1} z$$

bijection entre x et z .

Correspondances entre A, B et C
et A_1, B_1 et C_1 ?

$$z = P x$$

$$\dot{z} = P \dot{x} = P (A x + B u) = P A P^{-1} z + P B u$$

$$y = C x = C P^{-1} z$$

$$\begin{cases} \dot{z} = A_1 z + B_1 u \\ y = C_1 z \end{cases} = \begin{cases} P A P^{-1} z + P B u \\ C P^{-1} z \end{cases}$$

Définition: transformation d'équivalence $z = P x$

$$\begin{cases} A_1 = P A P^{-1} \\ B_1 = P B \\ C_1 = C P^{-1} \end{cases}$$

Est-ce que $G(s)$ est la même ?

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX = AX + BU \\ y = CX \end{cases} \quad \begin{cases} (sI - A)X = BU \\ Y = CX \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_1(s) &= C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 \\ &= CP^{-1} (sPP^{-1} - PAP^{-1})^{-1} PB \\ &= CP^{-1} (P(sI - A)P^{-1})^{-1} PB \\ &= C \underbrace{P^{-1}P}_I (sI - A)^{-1} \underbrace{P^{-1}P}_I B \\ &= C (sI - A)^{-1} B = G(s) \end{aligned}$$

Astuce
 $I = PP^{-1}$

$$I = P^{-1}P$$

3. formes canoniques

Quel est le choix de P qui donne les propriétés clairement visibles ?
 (ob. /ouv.)

Remarque A et A_1 ont le même poly. caractéristique

$$\lambda(A) = |\lambda I - A| \quad (\text{matlab: } \text{poly}(A))$$

$$\begin{aligned} \lambda(A_1) &= |\lambda PP^{-1} - PAP^{-1}| = |P| |\lambda I - A| |P^{-1}| \\ \left(|P^{-1}| = \frac{1}{|P|} \right) &= |\lambda I - A| \end{aligned}$$

forme canonique observable

dim = 3
n = 3

sans pôle
de généralité

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_o = \begin{bmatrix} \odot & \odot & \odot \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$$

forme canonique gouvernable

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

le critère est clairement satisfait

$$C_c = \begin{bmatrix} B_c & A_c B_c & A_c^2 B_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \odot \\ 1 & \odot & \odot \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } C_c = n, \quad |C_c| \neq 0$$

$$O_c = \begin{bmatrix} C_c \\ C_c A_c \\ C_c A_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \odot \\ 1 & \odot & \odot \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } O_c = n, \quad |O_c| \neq 0$$

4. Régulateur d'état

Tout l'état x est mesuré
et accessible

Notation: changer le polynôme caractéristique.

Par exemple, un système instable $\lambda_i \in \mathbb{C}^+$
le rendre stable.

Précis: placer les valeurs propres à
un endroit désiré.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx$$

$$\dim u = 1$$

$$\dim x = n$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

$$\begin{aligned} u &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 \quad \dots \quad -k_n x_n \\ &= -\sum_{i=1}^n k_i x_i \end{aligned}$$

Comment déterminer les gains $k_i \in \mathbb{R}$?

afin que le polynôme caractéristique résultant
aie ses racines aux emplacements
désirés.

$\dim x = 3$

$$\overline{\lambda} = \lambda^3 + \overline{a}_1 \lambda^2 + \overline{a}_2 \lambda + \overline{a}_3$$

$\uparrow$ polynôme caractéristique souhaité.

Commençons par la forme canonique gouvernable et changeons ses valeurs propres

$$\bar{\lambda} = (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2)(\lambda - \bar{\lambda}_3)$$

$\bar{\lambda}_i \in \mathbb{C}$, valeurs propres désirées.

$$\dot{z} = A_c z + B_c u$$

$$u = -K_c z$$

$$\lambda(A_c) = \lambda(A)$$

$$\dot{z} = A_c z + B_c (-K_c z) = \underbrace{(A_c - B_c K_c)}_{\bar{A}_c} z$$

$$B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 - k_{c1} & -a_2 - k_{c2} & -a_1 - k_{c3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\bar{a}_3 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{bmatrix}$$

$$-a_3 - k_{c1} = -\bar{a}_3$$

$$-a_2 - k_{c2} = -\bar{a}_2$$

$$-a_1 - k_{c3} = -\bar{a}_1$$

$\rightarrow$

$\rightarrow$

$\rightarrow$

$$\begin{cases} k_{c1} = \bar{a}_3 - a_3 \\ k_{c2} = \bar{a}_2 - a_2 \\ k_{c3} = \bar{a}_1 - a_1 \end{cases}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} \bar{a}_3 - \bar{a}_3 & \bar{a}_2 - a_2 & \bar{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

On aimerait déterminer P qui transforme le système initial A, B, C vers la forme canonique A_c, B_c, C_c .

afin de déterminer K qui agit sur x et non K_c qui agit sur z .

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Kx \end{cases}$$

$$A_c = PAP^{-1}$$

$$B_c = PB$$

$$C_c = CP^{-1}$$

(calculer) la matrice de gouvernabilité dans les deux cas, canonique, et- original.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

matlab: `ctrb(A, B)`

$$\mathcal{C}_c = \begin{bmatrix} B_c & A_c B_c & A_c^2 B_c \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \text{ctrb}(A_c, B_c)$

$\begin{matrix} ? \\ ? \\ P? \end{matrix}$

$$C_c = \begin{bmatrix} \underbrace{PB}_{B_c} & \underbrace{(PAP^{-1})PB}_{A_c B_c} & \underbrace{(PAP^{-1})(PAP^{-1})PB}_{A_c A_c B_c} \end{bmatrix}$$

$$= P \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} = P C$$

$$\Rightarrow \boxed{P = C_c C^{-1}}$$

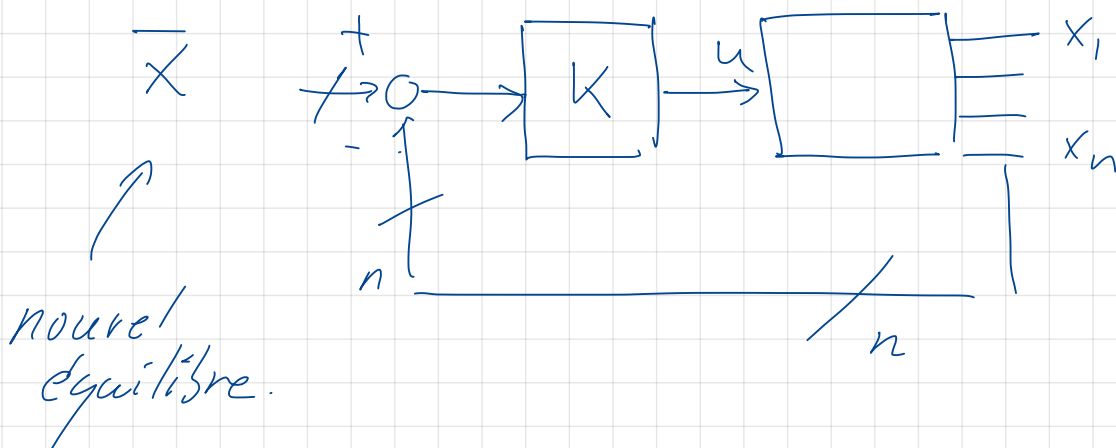
On cherche K telle que $u = -Kx$

(ependant on a calculé K_c et P

$$\begin{aligned} u = -Kx &= -KP^{-1}z & z = Px \\ &= -K_c z \end{aligned}$$

$$K_c = KP^{-1}$$

$$\boxed{K_c \cdot P = K}$$



$$u = -K_c (x - \bar{x})$$

$\bar{x}$ nouveau pt. d'équilibre

Inconvénient: nécessité de mesurer tous les x_i

$\Rightarrow$ Leçon 11: contourner cet inconvénient
en observant x

$\Rightarrow$ observation