Introduction à la commande des systèmes dynamiques **Série I**

SIE

Exercice I.1

Un champ est relié à un réservoir d'eau qui récupère l'excédant d'eau de pluie. Ce dernier comporte un niveau non nul d'eau qui sert de réserve. Une pompe que l'on peut actionner (entrée du système) permet soit de récupérer l'eau après drainage et de la stocker, soit de réduire le stock d'eau dans le réservoir afin d'alimenter la lisière. La terre absorbe de l'eau de manière proportionnelle à la quantité d'eau contenue dans celle-ci. La gravité agit sur la colonne d'eau.

<u>Indication :</u> Le débit à la sortie d'un réservoir ouvert en contact avec de l'eau de part et d'autre de l'ouverture est donné par

$$\kappa\sqrt{2g \mid \Delta h \mid}$$

où Δh est la différence de hauteur de l'eau et κ est une constante qui tient compte de la perte d'énergie.

<u>Variables :</u>

- Hauteur de l'eau dans le champ : h_1
- Hauteur de la colonne d'eau : h_2
- Débit de pompage : u
- Débit d'eau de pluie : v

<u>Constantes :</u>

- Surface du champ : A_1
- Surface de la section du réservoir : A_2
- Coefficient de section de la conduite entre la lisière et le réservoir : κ
- Constante de la gravité : g
- Constante de proportionalité pour l'absorption de l'eau par la terre : ρ

Trouver les unités des variables et constantes. Parmis les variables, quels sont les états, les entrée(s), les perturbation(s) ? Quelle est la dimension (ordre) de ce système ? Trouver une représentation d'état du système.

Exercice I.2

Modéliser un petit immeuble de quatre étages soumis à une secousse sismique.

Un immeuble comporte quatre étages. Les murs verticaux sont considérés comme ayant une masse négligeable par rapport à la masse de chaque plancher horizontal considéré comme une grande dalle de masse m. Les efforts verticaux sont repris par les murs. Par contre, lorsque les dalles (une par étage), ne sont plus alignées verticalement (les unes par rapport aux autres) les murs exercent des forces horizontales sur les dalles de manière proportionnelle au décalage horizontal d'une dalle par rapport à la dalle soit immédiatement au-dessus (étage supérieur) soit immédiatement en dessous (étage inférieur). Le tremblement de terre exerce une force $v = F$

sur la dalle de niveau 0 qui constitue les fondations de l'immeuble.

Variables :
- Décalage horizontal de chaque étage : d_i
- Force sismique exercée sur la dalle de la fondation : $u = F$

Constantes :
- Masse de chaque dalle : m
- Constante de proportionalité des fores horizontales : k
- Constante de la gravité : g

Mêmes questions que pour la question I.1.

INDICATION : Ecrire les équations de Newton pour chaque étage en ne considérant que le mouvement horizontal. L'affaissement vertical suite au décalage de l'étage n'est pas pris en compte. Une variable de position par étage. Il faut tenir compte de la vitesse de chaque étage dans les variables d'état étant donné que les conditions initiales comportent ces vitesses.

Exercice I.3

Trouver parmis les trois systèmes suivants les états et les paramètres. Quelle est la dimension (ordre) de chaque système dynamique ?

1. $\begin{cases} \dot{h}_1 = h_2 + h_4\, h_1 + h_3 \\ \dot{h}_2 = 3h_1 + h_2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 = h_5\, h_1\, h_2 \\ \ddot{h}_1 - \ddot{h}_2 = h_3\, h_4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{h}_1 + \dot{h}_2 = h_3 \\ \dot{h}_2 + \dot{h}_3 = h_2 \\ \dot{h}_1 - \dot{h}_3 = h_3 - h_2 \end{cases}$

Exercice I.4

Une population de lapins, dont la densité est x, constitue une partie d'un écosystème dans lequel vivent également des renards dont la densité est représentée par la variable y. Il y a suffisament de nourriture pour que les lapins puissent se multiplier à volonté, seul les renards limitent la croissance de la population des lapins. Les renards, quand à eux, se nourissent exclusivement de lapins et ils ne peuvent pas survivre en l'absence de ceux-ci. Un modèle de cette interaction est donnée par les deux équations différentielles couplées

$$\dot{x} = r\,x - b_1\,x\,y \qquad (1)$$
$$\dot{y} = -a\,y + b_2\,x\,y \qquad (2)$$

avec r, a, b_1, b_2 des constantes réelles positives.

1. Ecrire les équations en remplaçcant toutes les variables et constantes par des quantités h_i, $i = 1, \ldots, 6$ afin que les équations ressemblent à celles de l'exercice I.3.
2. On demande de calculer tous les points d'équilibre en fonction des quatre constantes. Application numérique : $r = 2$, $a = 1$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$.