Nom : **Prénom :** **SCIPER :**

Introduction à la commande des systèmes dynamiques

SIE - EPFL

Examen 2021

Ens. : Ph. Müllhaupt

Problème 1 (4 pts)

Calculer la transformée de Laplace des quantités suivantes :

$$f(t) = \epsilon(t)e^{-4t}\cos(4t+2) \tag{1}$$

$$g(t) = \epsilon(t)(t+1)e^{-2t}\cos(3t) \tag{2}$$

Indication : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Problème 2 (4 pts)

Calculer la transformée de Laplace inverse des quantités suivantes :

$$F(s) = e^{-2s}\frac{s^2+s+1}{s^2+5s+6} \tag{3}$$

$$G(s) = \frac{s^2+2s+4}{s^3+5s^2+8s+4} \tag{4}$$

Problème 3 (7 pts)

Considérons un système dont l'entrée est une impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$.

1. Déterminer la fonction de transfert garantissant la sortie $y(t) = \frac{1}{2}\epsilon(t) - \frac{1}{2}e^{-6t}$ (1 pt).
2. Dimensionner un régulateur proportionnel dérivé (PD), tel que le système en boucle fermée d'asservissement ait deux pôles réels en -2 et -4. Donner la fonction de transfert en boucle fermée correspondante. Considérer $G(s) = \frac{3}{s(s+6)}$ si vous n'avez pas réussi le point précédent (2.5 pts).

Considérons maintenant la fonction de transfert $G(s) = \frac{10}{s^3+s^2-14s-24}$, bouclée par un régulateur proportionnel (P).

1. A l'aide du critère de Nyquist, d'eterminer par calcul - et non pas par la méthode graphique - le gain K_p minimum garantissant la stabilité de la boucle fermée. Pour vous aider, le tracé du diagramme de Nyquist est présenté à la Figure 1 à la page 12, où l'étoile symbolise le point (0,0) (3.5 pts).

NB : Cette question est indépendante des deux précédentes.

Problème 4 (7 pts)

Un écosystème comporte deux espèces dont la densité de la première espèce est représentée par la variable x_1 et celle de la seconde par la variable x_2. Un modéle de la dynamique est donné par le système d'équations différentielles non linéaires suivant

$$\dot{x}_1 = -a\,x_1 + b_1\,x_1 x_2 \qquad (5)$$

$$\dot{x}_2 = +r\,x_2 - b_2\,x_1 x_2 + u \qquad (6)$$

On peut agir sur l'évolution de la densité de la seconde population par l'entremise de l'entrée u. (Application numérique $a = 1$, $r = 2$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$.)

En absence d'entrée $u = 0$, on remarque plusieurs points d'équilibre, par exemple

I. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$

II. $\bar{x}_1 = \frac{r}{b_2}$, $\bar{x}_2 = \frac{a}{b_1}$

Ceci a été vu au cours (renards - lapins).

1. Linéariser la dynamique autour du point d'équilibre II. pour obtenir une matrice A en fonction de a, b_1, b_2 et r.
2. Déterminer la fonction de transfert résultante $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ en fonction de a, b_1, b_2 et r si on pose comme sortie $y = x_2 - \bar{x}_2 = x_2 - \frac{a}{b_1} = \Delta x_2$.
3. Déterminer la fréquence d'oscillation de la population x_2 (lapins).
4. Proposer une stratégie de commande u pour déplacer le point d'équilibre sans changer la fréquence de l'oscillation. Justfifier votre réponse. Est-ce qu'il est possible de modifier le point d'équilibre dans tout le plan x_1, x_2 ?
5. Proposer un régulateur pour changer la fréquence d'oscillation pour la doubler. On mesure x_2. (INDICATION : utiliser un régulateur proportionnel, le gain pouvant être négatif, i.e. feedback positif.)
6. Proposer un observateur de la dynamique linéarisée pour estimer la population x_1 (renards) qui ne mesure que x_2 (lapins). Donner les équations différentielles de l'observateur sans calculer les gains de celui-ci.

Page 1 pour les réponses.

Page 2 pour les réponses.

Page 3 pour les réponses.

Page 4 pour les réponses.

Page 5 pour les réponses.

Page 6 pour les réponses.

Page 7 pour les réponses.

Page 8 pour les réponses.

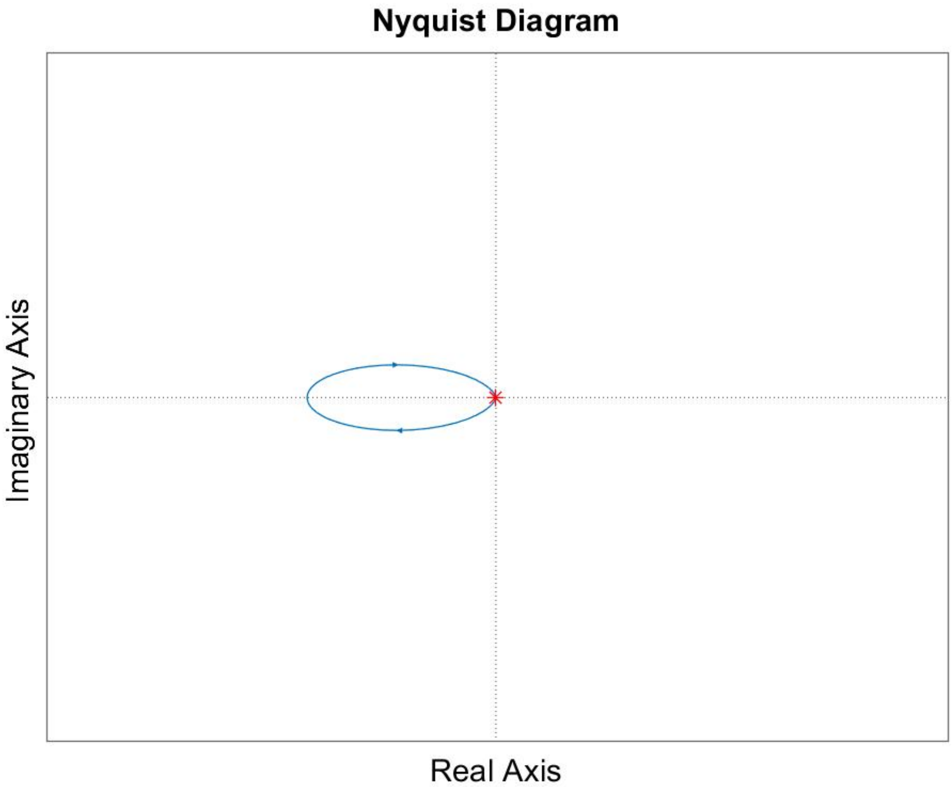

FIGURE 1: Diagramme de Nyquist