Introduction à la commande des systèmes dynamiques

SIE - IV

Examen - 2016

SCIPER :
Nom :

Exercice 1 — (8 pts)

Un ensemble de lacs, situés sur un relief en pente, sont reliés entre eux par des canaux et des rivières de forte pente. Un modèle schématique est donné à la figure 1.

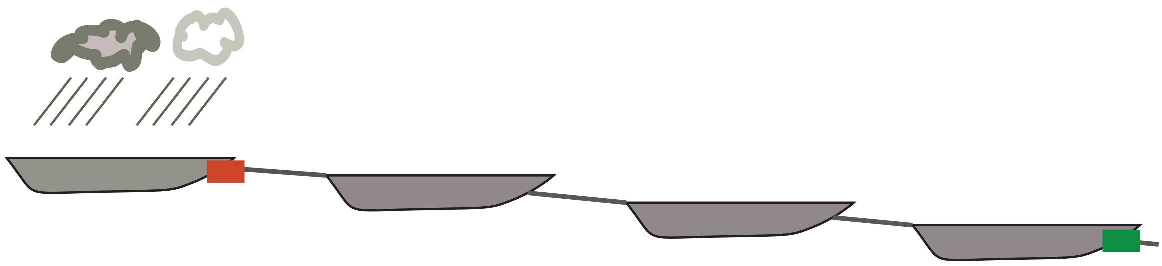

FIGURE 1 – Quatre lacs (identiques en forme) sont situés en pente. A cause de la déclinaison, le débit est ainsi toujours dirigé de gauche (amont) à droite (aval) à la sortie de chaque lac. Les précipitations ont lieu uniquement au-dessus du premier lac. Le petit rectangle de gauche symbolise l'actionneur qui permet de moduler le débit de sortie du premier lac et le deuxième petit rectangle (à droite) symbolise un capteur de débit à la sortie du dernier lac.

Les conditions climatiques sont très particulières et les précipitations ont lieu exclusivement au-dessus du lac 1 (premier lac). Il est possible de contrôler le débit de sortie du lac 1 à l'aide d'un actuateur.

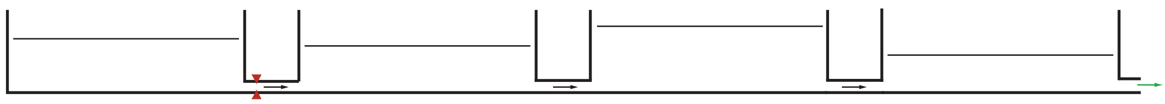

FIGURE 2 – Schéma de modélisation des quatre lacs situés en pente. Le débit est toujours de gauche à droite. La sortie du premier lac est muni d'une ouverture variable qui permet de moduler le débit, le débit de sortie du dernier lac est mesuré. Bien que les lacs soient identiques en forme, la hauteur de l'eau varie de lac en lac tout en ayant une surface équivalente constante (hypothèse de modélisation).

1. Modéliser chaque lac en considérant uniquement le bilan d'eau. La hauteur de lac est respectivement h_1, h_2, h_3 et h_4 avec l'indice indiquant le lac qu'il s'agit. Les quatre lacs ont la même surface $A = 64000\,[\mathrm{m}^2]$. On admettra qu'il n'y a pas d'évaporation et que

les fonds des lacs sont étanches (pas d'absorption par le sol). La pente est suffisament forte pour admettre que le débit est toujours dirigé dans le même sens, même lorsque la hauteur du lac en aval est supérieure à celle en amont. Le débit q_i de sortie du lac i (lac 2,3 et 4) est modélisé par la loi

$$q_i = \kappa_i \sqrt{h_i} \qquad i = 2, 3, 4$$

avec $\kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 89$. La variable h_i est la hauteur du lac i. Le débit à la sortie du premier lac est donné par

$$q_1 = \kappa_1 \sqrt{2} + u$$

où u est l'entrée du système et $\kappa_1 = 89$. Une figure schématique du modèle est donné à la figure 2.

2. Linéariser le modèle de chaque lac autour de la hauteur de référence $\bar{h} = 2$. Autrement dit, substituer

$$\sqrt{h_i} \approx \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(h_i - 2) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

et écrire les équations différentielles linéaires qui en résulte.

3. Montrer que les relations suivantes — à conditions initiales nulles — sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{1}{sA} V(s) - \frac{1}{sA} U(s) - \frac{\kappa_1 \sqrt{2}}{sA} \\
H_2(s) &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{A}\kappa_1 - \frac{\kappa_2}{\sqrt{2}A}}{s + \frac{\kappa_2}{2\sqrt{2}A}} + \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{\kappa_2}{2\sqrt{2}A}} U(s) \\
\frac{H_3(s)}{H_2(s)} &= \frac{\frac{\kappa_3}{2\sqrt{2}A}}{s + \frac{\kappa_3}{2\sqrt{2}A}} = \frac{4.92 \cdot 10^{-4}}{s + 4.92 \cdot 10^{-4}} \\
\frac{H_4(s)}{H_3(s)} &= \frac{\frac{\kappa_4}{2\sqrt{2}A}}{s + \frac{\kappa_4}{2\sqrt{2}A}} = \frac{4.92 \cdot 10^{-4}}{s + 4.92 \cdot 10^{-4}}
\end{aligned}$$

4. On mesure la hauteur du lac 4 (indirectement par le débit de sortie du lac 4) et un régulateur proportionnel est sélectionné $u = K_p h_4$ qui agit sur le débit du lac 1 (avec $K_p \in \mathbb{R}$). Déterminer le gain maximum K_p avant qu'une instabilité apparaisse en utilisant le critère de Nyquist.

5. Dessiner un schéma avec des fonctions de transferts (chacune du premier ordre au maximum) en boucle fermée avec le régulateur proportionnel du point précédant. Mettre en évidence la perturbation la transformée de Laplace $V(s)$ de $v(t)$ qui est considérée comme un débit arrivant dans le lac 1.

Exercice 2 — (5 pts)

Calculer la transformée de Laplace des signaux suivants :

1. $$\{\epsilon(2t-22)\,[\cos(3t+10)\sin(-5t+12)+\cos(-5t+12)\sin(3t+10)]\}$$

2. $$\{(t+1)e^{-3t}\cos(2t)\}$$

3. $$u = 3\dot{y} + y \qquad y(t) = \sin(2t+2)$$

(REMARQUE : Pour le 3., on demande de calculer $U(s)$)

Exercice 3 — (5 pts)

Calculer la transformée de Laplace inverse des quantités suivantes :

1. $$e^{-3s}\frac{s^2+s+1}{s^2+5s+6}$$

2. $$\frac{3s^2+2s+1}{s^3+9s^2+25s+25}$$

3. $$\frac{s^2+6s+12}{s^3+5s^2+8s+4}$$

Exercice 4 — (8 pts)

Un immeuble à deux étages est décrit par les équations

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 = k(q_0-q_1)+k(q_2-q_1) \\ m\,\ddot{q}_2 = k(q_1-q_2) \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de transfert entre $y = q_2$ et $u = q_0$.

2. Déterminer une représentation d'état

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

en posant

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

et déterminer la matrice A et le vecteur B résultants.

3. Une force F est ajoutée par l'intermédiaire d'une structure anti-sismique

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= k(q_0 - q_1) + k(q_2 - q_1) + F \\ m\ddot{q}_2 &= k(q_1 - q_2) - F \end{aligned}$$

4. Proposer un régulateur PD qui utilise comme entrée $q_1 - q_2$ et calculer la fonction de transfert résultante (i.e. $Q_2(s)/Q_0(s)$ à conditons initiales nulles). Quels doivent être les signes des termes du régulateur pour garantir la stabilité ? Justifier votre réponse.