

Commande des systèmes dynamiques

5. Transformée de Laplace

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Contenu

- 1 Motivation
- 2 Le produit de convolution (rappel)
- 3 La transformée de Laplace
- 4 Conséquence sur le produit de convolution
- 5 Dictionnaire
- 6 Grammaire
- 7 Transformée de Laplace inverse
 - Série de Fourier
 - Transformée de Fourier
- 8 Justification de l'isomorphisme

Motivation

Besoin de créer un isomorphisme entre :

produit de convolution

$$\{f(t)\} * \{g(t)\}$$

\Leftrightarrow

produit de polynômes

$$F(s)G(s)$$

Le produit de convolution (rappel)

Définition

$$\{f(t)\} * \{g(t)\} := \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right\}$$

Propriétés

- Commutativité

$$\{f(t)\} * \{g(t)\} = \{g(t)\} * \{f(t)\}$$

- Associativité

$$(\{f(t)\} * \{g(t)\}) * \{h(t)\} = \{f(t)\} * (\{g(t)\} * \{h(t)\})$$

- Distributivité par rapport à l'addition

$$\{f(t)\} * (\{g(t)\} + \{h(t)\}) = \{f(t)\} * \{g(t)\} + \{f(t)\} * \{h(t)\}$$

La transformée de Laplace

Définition

$$F(s) = \mathcal{L}(\{f(t)\}) := \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Conséquence sur le produit de convolution

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\{f(t)\} * \{g(t)\}) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\mu f(\tau)g(\mu - \tau)d\tau \right) e^{-s\mu}d\mu \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\mu f(\tau)g(\mu - \tau)e^{-s\mu}d\tau d\mu \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(\mu - \tau)e^{-s\mu}d\mu d\tau
 \end{aligned}$$

Changement de variables $\epsilon = \mu - \tau$ et donc $d\epsilon = d\mu$ et $\mu = \epsilon + \tau$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\{f(t)\} * \{g(t)\}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(\epsilon)e^{-s\epsilon}e^{-s\tau}d\epsilon d\tau \\
 &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^\infty g(\epsilon)e^{-s\epsilon}d\epsilon \\
 &= \mathcal{L}(\{f(t)\})\mathcal{L}(\{g(t)\})
 \end{aligned}$$

Dictionnaire élémentaire

Exponentielle

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\{e^{at}\}) &= \int_0^{\infty} e^{a\tau} e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)\tau} d\tau = \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)\tau} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

Dictionnaire élémentaire

Sinus

$$\begin{aligned}\{\sin(t)\} &= \frac{\{e^{jt}\} - \{e^{-jt}\}}{2j} \\ \mathcal{L}(\{\sin(t)\}) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{s+j-s+j}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

Dictionnaire élémentaire

Cosinus

$$\begin{aligned}\{\cos(t)\} &= \frac{\{e^{jt}\} + \{e^{-jt}\}}{2} \\ \mathcal{L}(\{\cos(t)\}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{s+j+s-j}{s^2+1} \\ &= \frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

Grammaire élémentaire

Décalage en s

$$e^{-\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(s + \lambda)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} F(s + \lambda) &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(s+\lambda)\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &\leftrightarrow e^{-\lambda t} f(t) \end{aligned}$$

Grammaire élémentaire

Décalage dans le temps

$$\epsilon(t - \lambda)f(t - \lambda) \leftrightarrow e^{-\lambda s}F(s)$$

Démonstration

$$e^{-\lambda s}F(s) = e^{-\lambda s} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+\lambda)}d\tau$$

(remarque : $\mu = \lambda + \tau$, $\tau = 0 \Rightarrow \mu = \lambda$, $d\mu = d\tau$)

$$= \int_{\lambda}^{\infty} f(\tau)e^{-s\mu}d\mu$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} f(\mu - \lambda)e^{-s\mu}d\mu = \int_0^{\infty} \epsilon(\mu - \lambda)f(\mu - \lambda)e^{-s\mu}d\mu$$

$$\leftrightarrow \epsilon(t - \lambda)f(t - \lambda)$$

Grammaire élémentaire

Mise à l'échelle de la variable temporelle

$$\omega\tau = \mu, d\tau = \frac{1}{\omega}d\mu$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\{f(\omega t)\}) &= \int f(\omega\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{\omega} \int f(\mu)e^{-s\frac{\mu}{\omega}}d\mu \\ &= \frac{1}{\omega}F\left(\frac{s}{\omega}\right)\end{aligned}$$

Grammaire élémentaire

Techniques de démonstrations

intégration par partie
avec $\Psi = \int \psi$ et $\Phi = \int \phi$, on a

$$\int \Psi \phi + \int \psi \Phi = [\Psi \Phi]$$

et donc

$$\int \Psi \phi = [\Psi \Phi] - \int \psi \Phi$$

et

$$\int \psi \Phi = [\Psi \Phi] - \int \Psi \phi$$

Grammaire élémentaire

Dérivation

$$\{f'(t)\} \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\{f'(t)\}) &= \int_0^{\infty} f'(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= \int \psi \Phi \quad \text{avec} \quad \psi = f'(\tau) \quad \Phi = e^{-s\tau} \\
 &= [\Psi \Phi] - \int \Psi \phi \\
 &= [f(\tau) e^{-s\tau}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &\leftrightarrow 0 - f(0) + sF(s)
 \end{aligned}$$

Grammaire élémentaire

Intégration

$$\mathcal{L} \left(\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} \right) \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\left\{ \int_0^t f(\mu) d\mu \right\} \right) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\tau f(\mu) d\mu \right\} e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int \Psi \phi = [\Psi \Phi] - \int \psi \Phi \\ &= \left[\int_0^\tau f(\mu) d\mu \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-s\tau} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &\leftrightarrow 0 - 0 + \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

Transformée de Laplace inverse

Soit $f(t)$ une fonction $f(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de croissance bornée par une exponentielle $|f(t)| \leq Ce^{at}$, $\forall t$, avec $a, C \in \mathbb{R}^+$.

Formule de Mellin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad x > a$$

Série de Fourier

Soit $f(t)$ une fonction périodique de période T , c.-à-d.
 $f(t + T) = f(t), \forall t$.

Représentation

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2k\pi}{T} t} & c_k &\in \mathbb{C} \\ c_k &= \int_t^{t+T} f(\tau) e^{-j \frac{2k\pi}{T} \tau} d\tau \end{aligned}$$

Transformée de Fourier

Soit $f(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction éventuellement discontinue mais de croissance bornée par une exponentielle $|f(t)| < Ce^{at}$, $\forall t > 0$ avec $a, C \in \mathbb{R}^+$.

Représentation

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau\end{aligned}$$

Attention : La transformation ne converge pas forcément aux points de discontinuité.

Transformation de Laplace inverse

Démonstration de la formule de Mellin

Soit $x > a$ un nombre réel fixe et soit la fonction auxiliaire

$$\phi(t) := e^{-xt} f(t)$$

Elle admet une transformation de Fourier et donc

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega$$

Ainsi, étant donné que $f(\tau) \equiv 0$ pour $\tau < 0$,

$$\begin{aligned} e^{-xt} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x+j\omega)\tau} f(\tau) d\tau \right) d\omega \end{aligned}$$

Transformation de Laplace inverse

Démonstration de la formule de Mellin (suite)

En posant $s = x + j\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{(x+j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

L'intégrale est effectuée dans le plan complexe le long d'une droite verticale parallèle à l'axe imaginaire et passant par la valeur réelle x .

Dictionnaire étendu

$$① \quad \epsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \Re s > 0$$

$$② \quad \delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$③ \quad t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \Re s > 0$$

$$④ \quad e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \quad \Re s > \Re a$$

$$⑤ \quad \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \Re s > |\Im \omega|$$

$$⑥ \quad \cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \Re s > |\Im \omega|$$

$$⑦ \quad \sinh(\lambda t) \leftrightarrow \frac{\lambda}{s^2 - \lambda^2} \quad \Re s > \Re \lambda$$

$$⑧ \quad \cosh(\lambda t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 - \lambda^2} \quad \Re s > \Re \lambda$$

$$⑨ \quad t^n e^{at} \leftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad \Re s > \Re a$$

$$⑩ \quad t \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad \Re s > |\Im \omega|$$

$$⑪ \quad t \cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad \Re s > |\Im \omega|$$

$$⑫ \quad e^{\lambda t} \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2} \quad \Re s > (\Re \lambda + |\Im \omega|)$$

$$⑬ \quad e^{\lambda t} \cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 + \omega^2} \quad \Re s > (\Re \lambda + |\Im \omega|)$$

Grammaire étendue

- 1 $f(t) \leftrightarrow F(s)$
- 2 $\sum_{i=1}^n k_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n k_i F_i(s) \quad k_i \in \mathbb{R}$
- 3 $f(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) \quad \omega \in \mathbb{R}^+$
- 4 $e^{-\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(s + \lambda)$
- 5 $\epsilon(t - \tau) f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-s\tau} F(s)$
- 6 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \left(F(s) - \frac{f(0)}{s} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n} \right)$
- 7 $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$
- 8 $(-1)^n t^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(s)$
- 9 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$
- 10 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$
- 11 $\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \leftrightarrow F(s) G(s)$
- 12 $\int_s^\infty F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}$

Justification de l'isomorphisme

L'algèbre des polynômes est intègre

- Fait bien connu
- Un polynôme non nul n'admet pas de diviseur de zéro
- Autrement dit si

$$F(s)G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(s) = 0 \text{ ou } G(s) = 0$$

Th. de Titmarsch : l'algèbre de convolution est intègre

- Fait non complètement trivial
- L'algèbre de convolution n'a pas de diviseur de zéro
- Autrement dit si

$$a * b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ ou } b = 0$$