

# Commande des systèmes dynamiques

## 5. Transformée de Laplace

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

# Contenu

- 1 Motivation
- 2 Le produit de convolution (rappel)
- 3 La transformée de Laplace
- 4 Conséquence sur le produit de convolution
- 5 Dictionnaire
- 6 Grammaire
- 7 Transformée de Laplace inverse
  - Série de Fourier
  - Transformée de Fourier
- 8 Justification de l'isomorphisme

# Motivation

Besoin de créer un isomorphisme entre :

produit de convolution

$$\{f(t)\} * \{g(t)\}$$

produit de polynômes



$$F(s)G(s)$$

# Le produit de convolution (rappel)

## Définition

$$\{f(t)\} * \{g(t)\} := \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right\}$$

## Propriétés

- Commutativité

$$\{f(t)\} * \{g(t)\} = \{g(t)\} * \{f(t)\}$$

- Associativité

$$(\{f(t)\} * \{g(t)\}) * \{h(t)\} = \{f(t)\} * (\{g(t)\} * \{h(t)\})$$

- Distributivité par rapport à l'addition

$$\{f(t)\} * (\{g(t)\} + \{h(t)\}) = \{f(t)\} * \{g(t)\} + \{f(t)\} * \{h(t)\}$$

# La transformée de Laplace

## Définition

$$F(s) = \mathcal{L}(\{f(t)\}) := \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

## Conséquence sur le produit de convolution

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\{f(t)\} * \{g(t)\}) &= \int_0^\infty \left( \int_0^\mu f(\tau)g(\mu - \tau)d\tau \right) e^{-s\mu} d\mu \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\mu f(\tau)g(\mu - \tau)e^{-s\mu} d\tau d\mu \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(\mu - \tau)e^{-s\mu} d\mu d\tau
 \end{aligned}$$

Changement de variables  $\epsilon = \mu - \tau$  et donc  $d\epsilon = d\mu$  et  $\mu = \epsilon + \tau$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\{f(t)\} * \{g(t)\}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(\epsilon)e^{-s\epsilon}e^{-s\tau}d\epsilon d\tau \\
 &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^\infty g(\epsilon)e^{-s\epsilon}d\epsilon \\
 &= \mathcal{L}(\{f(t)\}) \mathcal{L}(\{g(t)\})
 \end{aligned}$$

# Dictionnaire élémentaire

## Exponentielle

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\{e^{at}\}) &= \int_0^{\infty} e^{a\tau} e^{-s\tau} d\tau \\&= \int_0^{\infty} e^{(a-s)\tau} d\tau = \left[ \frac{1}{a-s} e^{(a-s)\tau} \right]_0^{\infty} \\&= 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

## Dictionnaire élémentaire

### Sinus

$$\begin{aligned}\{\sin(t)\} &= \frac{\{e^{jt}\} - \{e^{-jt}\}}{2j} \\ \mathcal{L}(\{\sin(t)\}) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{s+j-s+j}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

## Dictionnaire élémentaire

### Cosinus

$$\begin{aligned}\{\cos(t)\} &= \frac{\{e^{jt}\} + \{e^{-jt}\}}{2} \\ \mathcal{L}(\{\cos(t)\}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{s+j+s-j}{s^2+1} \\ &= \frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

## Grammaire élémentaire

### Décalage en s

$$e^{-\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(s + \lambda)$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} F(s + \lambda) &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(s+\lambda)\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &\leftrightarrow e^{-\lambda t} f(t) \end{aligned}$$

# Grammaire élémentaire

## Décalage dans le temps

$$\epsilon(t - \lambda) f(t - \lambda) \leftrightarrow e^{-\lambda s} F(s)$$

## Démonstration

$$e^{-\lambda s} F(s) = e^{-\lambda s} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+\lambda)} d\tau$$

(remarque :  $\mu = \lambda + \tau$ ,  $\tau = 0 \Rightarrow \mu = \lambda$ ,  $d\mu = d\tau$ )

$$\begin{aligned} &= \int_{\lambda}^{\infty} f(\tau) e^{-s\mu} d\mu \\ &= \int_{\lambda}^{\infty} f(\mu - \lambda) e^{-s\mu} d\mu = \int_0^{\infty} \epsilon(\mu - \lambda) f(\mu - \lambda) e^{-s\mu} d\mu \\ &\Leftrightarrow \epsilon(t - \lambda) f(t - \lambda) \end{aligned}$$

# Grammaire élémentaire

Mise à l'échelle de la variable temporelle

$$\omega\tau = \mu, d\tau = \frac{1}{\omega}d\mu$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\{f(\omega t)\}) &= \int f(\omega\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{\omega} \int f(\mu)e^{-s\frac{\mu}{\omega}}d\mu \\ &= \frac{1}{\omega}F\left(\frac{s}{\omega}\right)\end{aligned}$$

# Grammaire élémentaire

## Techniques de démonstrations

intégration par partie  
avec  $\Psi = \int \psi$  et  $\Phi = \int \phi$ , on a

$$\int \Psi\phi + \int \psi\Phi = [\Psi\Phi]$$

et donc

$$\int \Psi\phi = [\Psi\Phi] - \int \psi\Phi$$

et

$$\int \psi\Phi = [\Psi\Phi] - \int \Psi\phi$$

# Grammaire élémentaire

## Dérivation

$$\{f'(t)\} \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

## Démonstration

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\{f'(t)\}) &= \int_0^{\infty} f'(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= \int \psi \Phi \quad \text{avec} \quad \psi = f'(\tau) \quad \Phi = e^{-s\tau} \\
 &= [\Psi \Phi] - \int \Psi \phi \\
 &= [f(\tau) e^{-s\tau}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &\leftrightarrow 0 - f(0) + sF(s)
 \end{aligned}$$

# Grammaire élémentaire

## Intégration

$$\mathcal{L} \left( \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} \right) \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

## Démonstration

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left( \left\{ \int_0^t f(\mu) d\mu \right\} \right) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\tau f(\mu) d\mu \right\} e^{-s\tau} d\tau \\
 &= \int \Psi \phi = [\Psi \Phi] - \int \psi \Phi \\
 &= \left[ \int_0^\tau f(\mu) d\mu \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-s\tau} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &\leftrightarrow 0 - 0 + \frac{1}{s} F(s)
 \end{aligned}$$

# Transformée de Laplace inverse

Soit  $f(t)$  une fonction  $f(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de croissance bornée par une exponentielle  $|f(t)| \leq Ce^{at}$ ,  $\forall t$ , avec  $a, C \in \mathbb{R}^+$ .

## Formule de Mellin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st}ds, \quad x > a$$

## Série de Fourier

Soit  $f(t)$  une fonction périodique de période  $T$ , c.-à-d.  
 $f(t + T) = f(t), \forall t.$

### Représentation

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2k\pi}{T} t} \quad c_k \in \mathbb{C} \\c_k &= \int_t^{t+T} f(\tau) e^{-j \frac{2k\pi}{T} \tau} d\tau\end{aligned}$$

## Transformée de Fourier

Soit  $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction éventuellement discontinue mais de croissance bornée par une exponentielle  $|f(t)| < Ce^{at}$ ,  $\forall t > 0$  avec  $a, C \in \mathbb{R}^+$ .

### Représentation

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

Attention : La transformation ne converge pas forcément aux points de discontinuité.

## Transformation de Laplace inverse

Démonstration de la formule de Mellin

Soit  $x > a$  un nombre réel fixe et soit la fonction auxiliaire

$$\phi(t) := e^{-xt} f(t)$$

Elle admet une transformation de Fourier et donc

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega$$

Ainsi, étant donné que  $f(\tau) \equiv 0$  pour  $\tau < 0$ ,

$$\begin{aligned} e^{-xt} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left( \int_0^{\infty} e^{-(x+j\omega)t} f(\tau) d\tau \right) d\omega \end{aligned}$$

## Transformation de Laplace inverse

### Démonstration de la formule de Mellin (suite)

En posant  $s = x + j\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{(x+j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

L'intégrale est effectuée dans le plan complexe le long d'une droite verticale parallèle à l'axe imaginaire et passant par la valeur réelle  $x$ .

# Dictionnaire étendu

- 1  $\epsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$        $\Re s > 0$
- 2  $\delta(t) \leftrightarrow 1$
- 3  $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$        $\Re s > 0$
- 4  $e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$        $\Re s > \Re a$
- 5  $\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$        $\Re s > |\Im \omega|$
- 6  $\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$        $\Re s > |\Im \omega|$
- 7  $\sinh(\lambda t) \leftrightarrow \frac{\lambda}{s^2 - \lambda^2}$        $\Re s > \Re \lambda$
- 8  $\cosh(\lambda t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 - \lambda^2}$        $\Re s > \Re \lambda$
- 9  $t^n e^{at} \leftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$        $\Re s > \Re a$
- 10  $t \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$        $\Re s > |\Im \omega|$
- 11  $t \cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$        $\Re s > |\Im \omega|$
- 12  $e^{\lambda t} \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}$        $\Re s > (\Re \lambda + |\Im \omega|)$
- 13  $e^{\lambda t} \cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}$        $\Re s > (\Re \lambda + |\Im \omega|)$

# Grammaire étendue

- ➊  $f(t) \leftrightarrow F(s)$
- ➋  $\sum_{i=1}^n k_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n k_i F_i(s) \quad k_i \in \mathbb{R}$
- ➌  $f(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) \quad \omega \in \mathbb{R}^+$
- ➍  $e^{-\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(s + \lambda)$
- ➎  $\epsilon(t - \tau) f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-s\tau} F(s)$
- ➏  $f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \left( F(s) - \frac{f(0)}{s} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n} \right)$
- ➐  $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$
- ➑  $(-1)^n t^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(s)$
- ➒  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$
- ➓  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$
- ➔  $\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \leftrightarrow F(s)G(s)$
- ➕  $\int_s^\infty F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}$

## Justification de l'isomorphisme

L'algèbre des polynômes est intègre

- Fait bien connu
- Un polynôme non nul n'admet pas de diviseur de zéro
- Autrement dit si

$$F(s)G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(s) = 0 \text{ ou } G(s) = 0$$

Th. de Titmarsch : l'algèbre de convolution est intègre

- Fait non complètement trivial
- L'algèbre de convolution n'a pas de diviseur de zero
- Autrement dit si

$$a * b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ ou } b = 0$$