# Commande des systèmes dynamiques
# 5. Transformée de Laplace


Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

## Contenu

## Motivation

Besoin de créer un isomorphisme entre :

| produit de convolution | | produit de polynômes |
|---|---|---|
| $\{f(t)\} * \{g(t)\}$ | $\Leftrightarrow$ | $F(s)G(s)$ |

anneau intègre

isomorphisme

anneau intègre

# Le produit de convolution (rappel)

## Définition

$$\{f(t)\} * \{g(t)\} := \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right\}$$

## Propriétés

- Commutativité

$$\{f(t)\} * \{g(t)\} = \{g(t)\} * \{f(t)\}$$

- Associativité

$$\big(\{f(t)\} * \{g(t)\}\big) * \{h(t)\} = \{f(t)\} * \big(\{g(t)\} * \{h(t)\}\big)$$

- Distributivité par rapport à l'addition

$$\{f(t)\} * \big(\{g(t)\} + \{h(t)\}\big) = \{f(t)\} * \{g(t)\} + \{f(t)\} * \{h(t)\}$$

# La transformée de Laplace

$s \in \mathbb{C}$

## Définition

$$F(s) = \mathcal{L}\left(\{f(t)\}\right) := \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

# Conséquence sur le produit de convolution

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\{f(t)\} * \{g(t)\}) &= \int_0^\infty \left( \int_0^\mu f(\tau)g(\mu-\tau)d\tau \right) e^{-s\mu} d\mu \\
&= \int_0^\infty \int_0^\mu f(\tau)g(\mu-\tau)e^{-s\mu} d\tau d\mu \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(\mu-\tau)e^{-s\mu} d\mu d\tau
\end{aligned}$$

Changement de variables $\epsilon = \mu - \tau$ et donc $d\epsilon = d\mu$ et $\mu = \epsilon + \tau$

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{L}\left(\{f(t)\} * \{g(t)\}\right)} &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(\epsilon)e^{-s\epsilon}e^{-s\tau} d\epsilon d\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_0^\infty g(\epsilon)e^{-s\epsilon}d\epsilon \\
&= \boxed{\mathcal{L}(\{f(t)\})\mathcal{L}(\{g(t)\})}
\end{aligned}$$

# Dictionnaire élémentaire

## Exponentielle

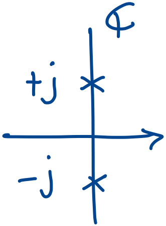
$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\{e^{at}\}\right) &= \int_0^\infty e^{a\tau} e^{-s\tau} d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)\tau} d\tau = \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)\tau}\right]_0^\infty \\
&= 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}
\end{aligned}
$$

rappel $\{e^{at}\} = \frac{1}{q-a} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$

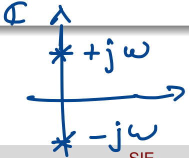
# Dictionnaire élémentaire

## Sinus

$$
\begin{aligned}
\{\sin(t)\} &= \frac{\{e^{jt}\} - \{e^{-jt}\}}{2j} \\
\mathcal{L}\left(\{\sin(t)\}\right) &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\frac{s+j-s+j}{s^2+1} \\
&= \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}
$$




$$\{\sin(\omega t)\} \longleftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



# Dictionnaire élémentaire

## Cosinus

$$\begin{aligned}\{\cos(t)\} &= \frac{\{e^{jt}\} + \{e^{-jt}\}}{2} \\ \mathcal{L}\left(\{\cos(t)\}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{s+j+s-j}{s^2+1} \\ &= \frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

$$\{\cos(\omega t)\} \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

# Grammaire élémentaire

## Décalage en s

$$e^{-\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(s+\lambda)$$

## Démonstration

$$\begin{aligned}
F(s+\lambda) &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-(s+\lambda)\tau} d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
&\leftrightarrow e^{-\lambda t} f(t)
\end{aligned}$$

## Grammaire élémentaire

### Décalage dans le temps

$$\epsilon(t-\lambda)f(t-\lambda) \leftrightarrow e^{-\lambda s}F(s)$$

### Démonstration

$$e^{-\lambda s}F(s) = e^{-\lambda s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+\lambda)}d\tau$$

(remarque : $\mu = \lambda + \tau$, $\tau = 0 \Rightarrow \mu = \lambda$, $d\mu = d\tau$)

$$\begin{aligned} &= \int_\lambda^\infty f(\tau)e^{-s\mu}d\mu \\ &= \int_\lambda^\infty f(\mu-\lambda)e^{-s\mu}d\mu = \int_0^\infty \epsilon(\mu-\lambda)f(\mu-\lambda)e^{-s\mu}d\mu \\ &\leftrightarrow \epsilon(t-\lambda)f(t-\lambda) \end{aligned}$$

## Grammaire élémentaire

### Mise à l'échelle de la variable temporelle

$\omega\tau = \mu$, $d\tau = \frac{1}{\omega}d\mu$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\{f(\omega t)\}) &= \int f(\omega\tau)e^{-s\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{\omega}\int f(\mu)e^{-s\frac{\mu}{\omega}}d\mu \\
&= \frac{1}{\omega}F\left(\frac{s}{\omega}\right)
\end{aligned}$$

# Grammaire élémentaire

## Techniques de démonstrations

intégration par partie

avec $\Psi = \int \psi$ et $\Phi = \int \phi$, on a

$$\int \Psi\phi + \int \psi\Phi = [\Psi\Phi]$$

et donc

$$\int \Psi\phi = [\Psi\Phi] - \int \psi\Phi$$

et

$$\int \psi\Phi = [\Psi\Phi] - \int \Psi\phi$$

## Grammaire élémentaire

### Dérivation

$$\{f'(t)\} \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

### Démonstration

$d * \{f(t)\} = \{f'(t)\}$
$+ f(0)$

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathcal{L}(\{f'(t)\})} &= \int_0^\infty f'(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\
&= \int \psi\Phi \quad \text{avec} \quad \psi = f'(\tau) \quad \Phi = e^{-s\tau} \\
&= [\Psi\Phi] - \int \Psi\phi \\
&= \left[f(\tau)e^{-s\tau}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\
&\leftrightarrow \boxed{0 - f(0) + sF(s)}
\end{aligned}$$

c'est le thm fondamental dans la convolution

# Grammaire élémentaire

## Intégration

$$\mathcal{L}\left(\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}\right) \leftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$$

rappel $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} =$

$= \frac{1}{s}$

## Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\left\{\int_0^t f(\mu)d\mu\right\}\right) &\doteq \int_0^\infty \left\{\int_0^\tau f(\mu)d\mu\right\} e^{-s\tau}d\tau \\
&= \int \Psi\phi = [\Psi\Phi] - \int \psi\Phi \\
&= \left[\int_0^\tau f(\mu)d\mu(-\frac{1}{s})e^{-s\tau}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\
&\leftrightarrow 0 - 0 + \frac{1}{s}F(s)
\end{aligned}$$

## Transformée de Laplace inverse

Soit $f(t)$ une fonction $f(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de croissance bornée par une exponentielle $|f(t)| \leq Ce^{at}$, $\forall t$, avec $a, C \in \mathbb{R}^+$.

### Formule de Mellin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds, \qquad x > a$$

## Série de Fourier

Soit $f(t)$ une fonction périodique de période $T$, c.-à-d. $f(t+T) = f(t), \forall t$.

### Représentation

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2k\pi}{T}t} \qquad c_k \in \mathbb{C} \\ c_k &= \int_t^{t+T} f(\tau) e^{-j\frac{2k\pi}{T}\tau} d\tau \end{aligned}$$

## Transormée de Fourier

Soit $f(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction éventuellement discontinue mais de croissance bornée par une exponentielle $|f(t)| < Ce^{at}$, $\forall t > 0$ avec $a, C \in \mathbb{R}^+$.

### Représentation

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \end{aligned}$$

Attention : La transformation ne converge pas forcément aux points de discontinuité.

# Transformation de Laplace inverse

## Démonstration de la formule de Mellin

Soit $x > a$ un nombre réel fixe et soit la fonction auxiliare

$$\phi(t) := e^{-xt} f(t)$$

Elle admet une transformation de Fourier et donc

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega$$

Ainsi, étant donné que $f(\tau) \equiv 0$ pour $\tau < 0$,

$$\begin{aligned} e^{-xt} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left( \int_{0}^{\infty} e^{-(x+j\omega)t} f(\tau) d\tau \right) d\omega \end{aligned}$$

# Transformation de Laplace inverse

## Démonstration de la formule de Mellin (suite)

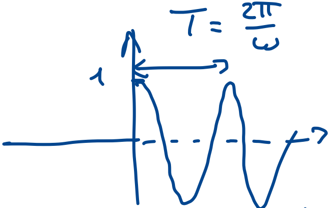
En posant $s = x + j\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{(x+j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

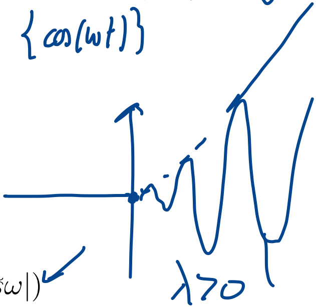
L'intégrale est effectuée dans le plan complexe le long d'une droite verticale parallèle à l'axe imaginaire et passant par la valeur rélle $x$.

# Dictionnaire étendu

1. $\epsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \Re s > 0$
2. $\delta(t) \leftrightarrow 1$
3. $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \Re s > 0$
4. $\boxed{e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}} \qquad \Re s > \Re a$
5. $\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \Re s > |\Im \omega|$
6. $\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \Re s > |\Im \omega|$
7. $\sinh(\lambda t) \leftrightarrow \frac{\lambda}{s^2-\lambda^2} \qquad \Re s > \Re \lambda$
8. $\cosh(\lambda t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2-\lambda^2} \qquad \Re s > \Re \lambda$
9. $t^n e^{at} \leftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad \Re s > \Re a$
10. $t\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2} \qquad \Re s > |\Im \omega|$
11. $t\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \qquad \Re s > |\Im \omega|$
12. $e^{\lambda t}\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2} \qquad \Re s > (\Re \lambda + |\Im \omega|)$
13. $e^{\lambda t}\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2} \qquad \Re s > (\Re \lambda + |\Im \omega|)$




$\{\cos(\omega t)\}$



## Grammaire étendue

1. $f(t) \leftrightarrow F(s)$
2. $\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i F_i(s) \qquad k_i \in \mathbb{R}$
3. $f(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) \qquad \omega \in \mathbb{R}^+$
4. $e^{-\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(s+\lambda)$
5. $\epsilon(t-\tau) f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-s\tau} F(s)$
6. $f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \left( F(s) - \frac{f(0)}{s} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n} \right)$
7. $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$
8. $(-1)^n t^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(s)$
9. $\lim_{t\to\infty} f(t) \leftrightarrow \lim_{s\to 0} [sF(s)]$
10. $\lim_{t\to 0} f(t) \leftrightarrow \lim_{s\to\infty} [sF(s)]$
11. $\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \leftrightarrow F(s)G(s)$
12. $\int_s^{\infty} F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}$

## Justification de l'isomorphisme

### L'algèbre des polynômes est intègre

- Fait bien connu
- Un polynôme non nul n'admet pas de diviseur de zéro
- Autrement dit si

$$F(s)G(s) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = 0 \text{ ou } G(s) = 0$$

### Th. de Titmarsch : l'algèbre de convolution est intègre

- Fait non complètement trivial
- L'algèbre de convolution n'a pas de diviseur de zero
- Autrement dit si

$$a * b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0 \text{ ou } b = 0$$