Commande des systèmes dynamiques
4. Entrée / Sortie

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Contenu

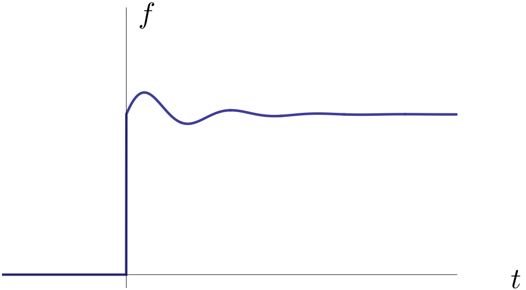
Fonctions du temps

Fonction définie pour $t = [0; \infty[$ (valeur nulle pour $t < 0$)

Notation :

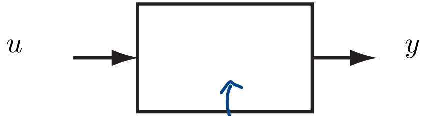
$$\{f(t)\}$$

Graphique :



Principe de superposition

Soit un système avec une entrée et une sortie :



au repos, conditions initiales nulles.

Principe de superposition :

unique

pour tout

- $\{u_1(t)\} \rightarrow \{y_1(t)\}$
- $\{u_2(t)\} \rightarrow \{y_2(t)\}$

il est vrai que

- $\{u(t)\} := \{u_1(t) + u_2(t)\} \rightarrow \{y(t)\} = \{y_1(t)\} + \{y_2(t)\}$

Système linéaire

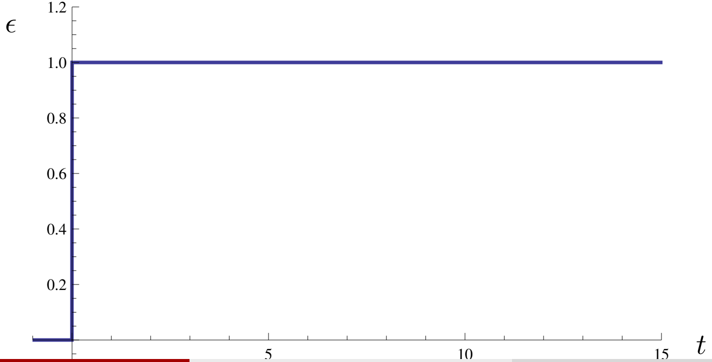
Système linéaire entrée-sortie

C'est un système qui obéit au principe de superposition

Réponse indicielle

Bloc de base

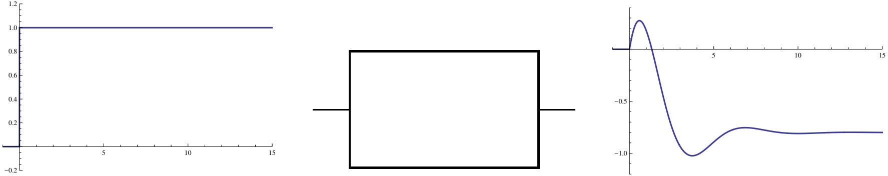
Grâce au principe de superposition, on peut construire tous les signaux de sortie connaissant la réponse à un signal élémentaire. Considérons le signal élémentaire 'saut unité', ou 'saut indiciel' que l'on note $\{\epsilon(t)\}$



Réponse indicielle

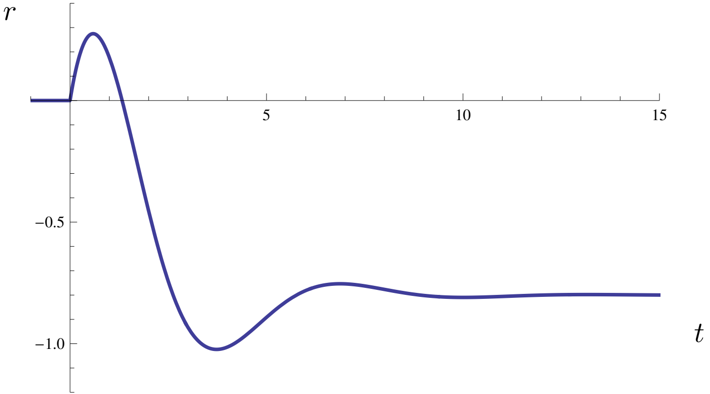
La réponse indicielle $\{r(t)\}$

La réponse indicielle $\{r(t)\}$ est la sortie $\{y(t)\}$ lorsque l'entrée est un saut indiciel, c.-à-d. lorsque $\{u(t)\} = \{\epsilon(t)\}$



Réponse indicielle

$\{r(t)\}$

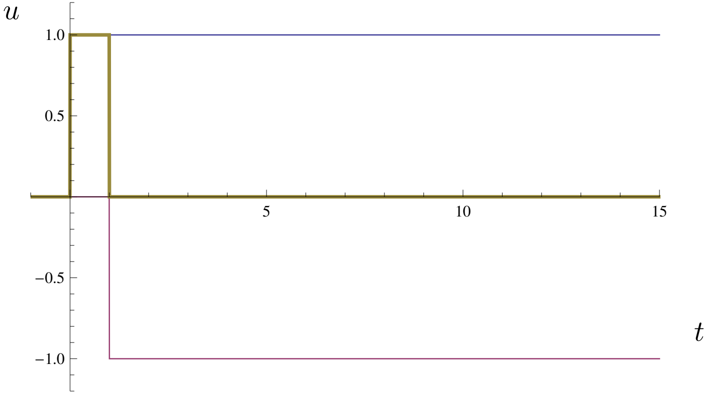


Fonction constante par morceaux

Elément de base

C'est la somme de deux sauts unité, mais un est décalé sur la droite

$$\{u(t)\} = \{\epsilon(t) - \epsilon(t-h)\}$$

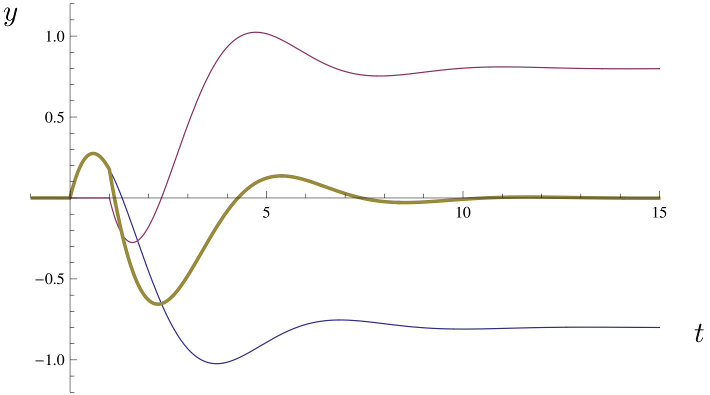


Fonction constante par morceaux

La sortie…

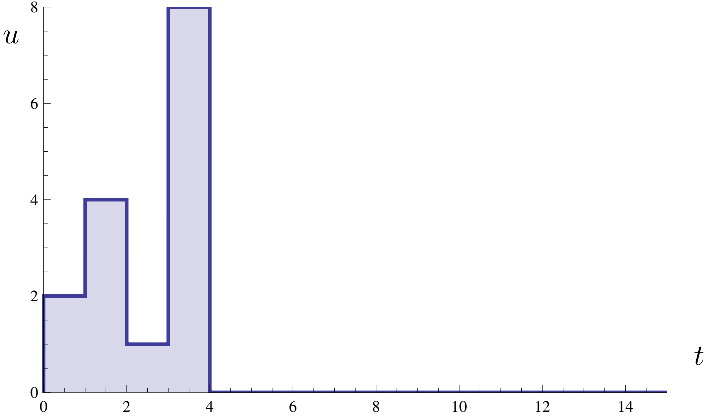
est obtenue par le principe de superposition

$$\{y(t)\} = \{r(t) - r(t-h)\}$$



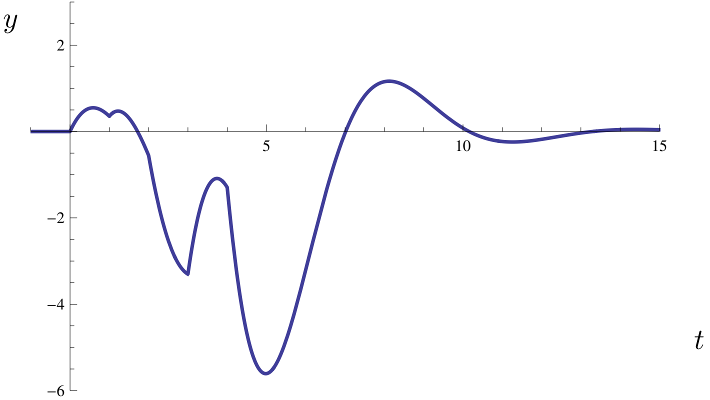
Fonction constante par morceaux

$$\{u(t)\} = \left\{ \sum_{i=0}^{3} u_i(\epsilon(t - ih) - \epsilon(t - (i+1)h)) \right\} \qquad (h = 1)$$

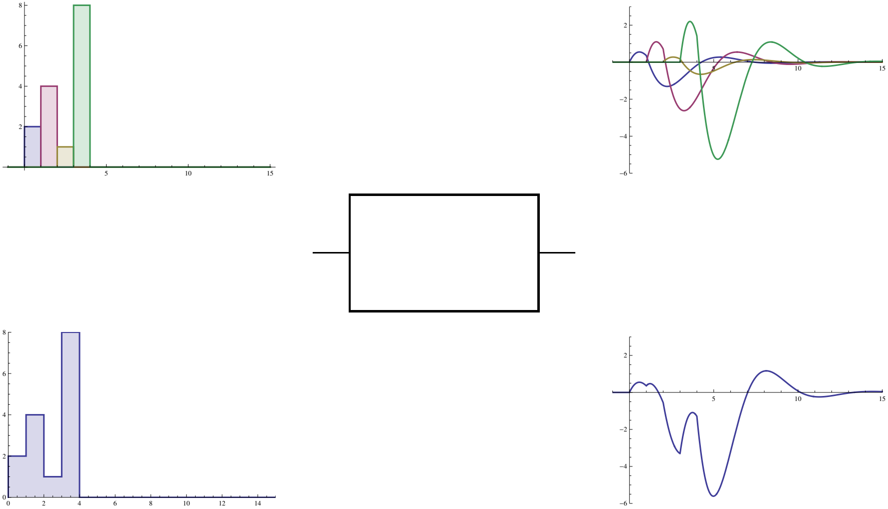


On applique le principe de superposition. . .

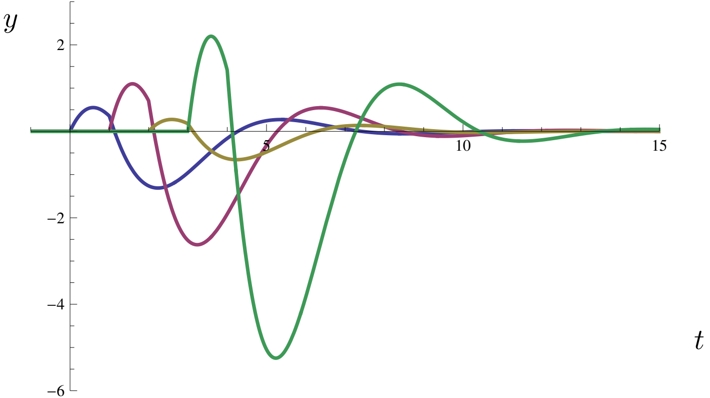
$$\{y(t)\} = \left\{\sum_{i=0}^{3} u_i(r(t-ih) - r(t-(i+1)h)\right\}$$



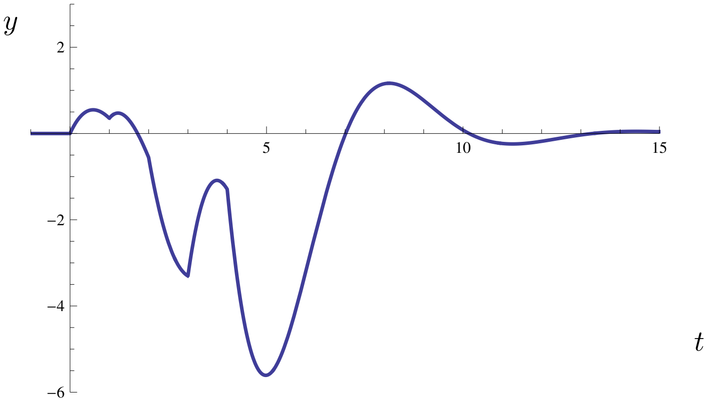
Somme des réponses élémentaires



Réponses élémentaires



Somme des réponses élémentaires



Identité Neutre

Faisons une somme jusqu'à la partie entière de t/h (notée $[t/h]$)

$$\{u(t)\} = \left\{ \sum_{i=0}^{[t/h]} u_i(\epsilon(t - ih) - \epsilon(t - (i+1)h)) \right\}$$

Divisons et multiplions par h ($\frac{h}{h} = 1$, cela ne change rien...)

$$\{u(t)\} = \left\{ \sum_{i=0}^{[t/h]} u_i \frac{\epsilon(t - ih) - \epsilon(t - (i+1)h)}{h} h \right\}$$

Passons à la limite $\lim_{h \to 0}$, ce qui induit $\sum \to \int$, $ih \to \tau$,$u_i \to u(\tau)$ et h (à droite) devient $d\tau$

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \lim_{h \to 0} \left(\frac{\epsilon(t - \tau) - \epsilon(t - \tau + h)}{h} \right) d\tau \right\}$$

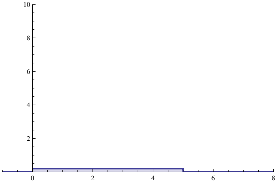
Impulsion de Dirac

Définition

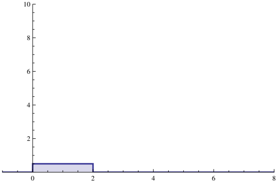
$$\{\delta(t)\} := \lim_{h\to 0} \frac{\{\epsilon(t)\} - \{\epsilon(t-h)\}}{h}$$

Impulsion de Dirac

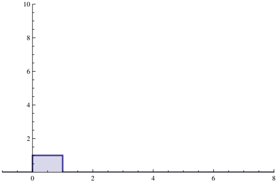
Ci-dessous, $\frac{\epsilon(t)-\epsilon(t-h)}{h}$, pour $h \to 0.1$



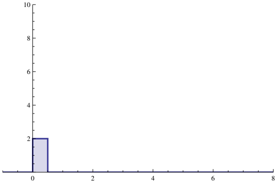
$h = 5$



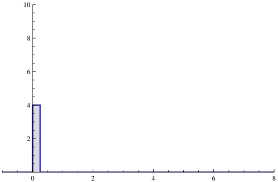
$h = 2$



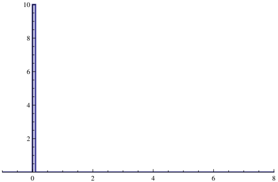
$h = 1$



$h = 0.5$



$h = 0.25$



$h = 0.1$

$$\forall h > 0, \forall t > 0, \int_0^t \frac{\epsilon(\tau) - \epsilon(\tau - h)}{h} d\tau = 1 \to \int_0^t \delta(\tau) d\tau = 1$$

Identité neutre

En partant de la dernière identité

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \lim_{h \to 0} \left(\frac{\epsilon(t-\tau) - \epsilon(t-\tau+h)}{h} \right) d\tau \right\}$$

on aboutit à l'identité neutre

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \right\}$$

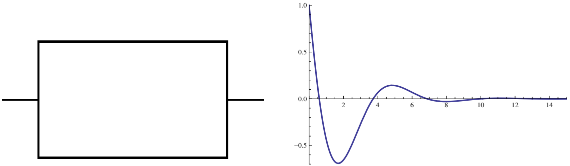
Réponse impulsionnelle

Définition

Lorsque $\{u(t)\} = \{\delta(t)\}$, la réponse impulsionnelle $\{g(t)\}$ est la sortie

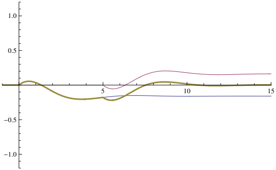
$$\{g(t)\} := \{y(t)\}$$

$\{\delta(t)\}$

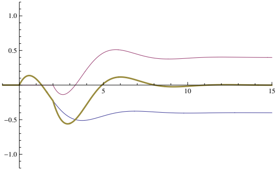


Construction progressive de la réponse impulsionnelle

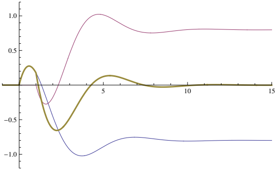
Ci-dessous, $\frac{r(t)-r(t-h)}{h}$, pour $h \to 0.1$



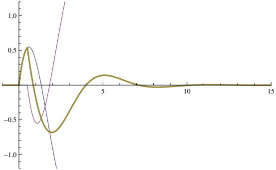
$h = 5$



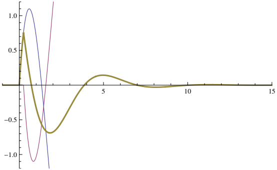
$h = 2$



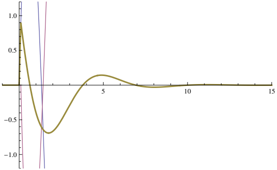
$h = 1$



$h = 0.5$



$h = 0.25$



$h = 0.1$

Produit de convolution

$$\{u(t)\} \longrightarrow \boxed{\{g(t)\}} \longrightarrow \{y(t)\}$$

On reprend l'identité neutre…

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \right\}$$

…et on applique le principe de superposition

$$\{y(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau \right\}$$

Définition du produit de convolution (valable $\forall \{u(t)\}$)

$$\{y(t)\} = \{u(t)\} * \{g(t)\} := \left\{ \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau \right\} =$$

$$\left\{ \int_0^t u(t-\tau)g(\tau)d\tau \right\} = \{g(t)\} * \{u(t)\}$$

Propriétés du produit de convolution

Commutatif

$$\{a(t)\} * \{b(t)\} = \{b(t)\} * \{a(t)\}$$

Associatif

$$\{a(t)\} * (\{b(t)\} * \{c(t)\}) = (\{a(t)\} * \{b(t)\}) * \{c(t)\}$$

Distributif par rapport à l'addition

$$\{a(t)\} * (\{b(t)\} + \{c(t)\}) = \{a(t)\} * \{b(t)\} + \{a(t)\} * \{c(t)\}$$

négation (−) : opposé de l'addition

$$1-3 = 1+(-3) = -2$$

fraction :

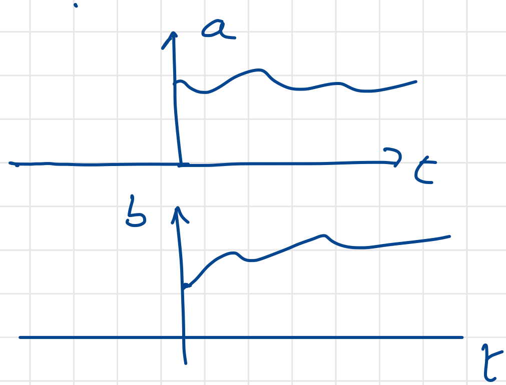
$\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}\cdot 4 = 3$ $\qquad$ $\frac{1}{1} \leftrightarrow 1$

$\frac{3}{1} \cong 3$ $\qquad$ $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1} = \frac{3}{4}$

?

$\frac{3}{1} \leftrightarrow 3$

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}$$



$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} * \{b(t)\} = \{a(t)\}$$

↳ lorsque $\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}$ ne peut pas s'écrire $\{c(t)\}$

alors c'est UN OPERATEUR et non une fonction.

$\{a(t)\} * \ ? = \{a(t)\}$

$\{u(t)\} * \ ? = \{u(t)\}$ $\rightarrow$ $\{u(t)\} * \{\delta(t)\} = \{u(t)\}$

L'opérateur neutre $\mathbb{1}$

Il représente un système qui ne modifie pas le signal d'entrée $\{u(t)\}$.

$$\{u(t)\} \longrightarrow \boxed{\mathbb{1}} \longrightarrow \{u(t)\}$$

$\underline{\mathbb{1}} = \{\delta(t)\}$

!

En comparant la formule générale

$$\{y(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau \right\} = \{u(t)\} * \{g(t)\}$$

à l'identité neutre

$$\{u(t)\} = \left\{ \int_0^t u(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \right\} = \{u(t)\} * \{\delta(t)\}$$

on obtient l'expression

$$\mathbb{1} = \cancel{\{g(t)\}} = \{\delta(t)\}$$

L'opérateur intégral $\mathfrak{i}$

Il représente l'intégrale du signal d'entrée $\{u(t)\}$.

réponse impulsionnelle $\{g(t)\}$

$$\{u(t)\} \longrightarrow \boxed{\;\mathfrak{i}\quad ?\;} \longrightarrow \{\textstyle\int_0^t u(\tau)d\tau\}$$

En comparant la formule générale

$$\{y(t)\} = \left\{\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = \{u(t)\} * \{g(t)\}$$

à la sortie intégrale du signal d'entrée

$\{g(t)\} = \{\varepsilon(t)\}$

$$\{y(t)\} = \left\{\int_0^t u(\tau)d\tau\right\} = \{u(t)\} * \{\epsilon(t)\}$$

on obtient l'expression

$$\mathfrak{i} = \{g(t)\} = \{\epsilon(t)\}$$

L'opérateur $\mathfrak{d}$ (inverse de $\mathfrak{i}$)

$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}$ $\qquad \mathfrak{i} = \mathfrak{i}$

$\mathfrak{d} * \mathfrak{i} = \mathbb{1}$

Définition

$$\boxed{\mathfrak{d} * \mathfrak{i} = \mathfrak{i} * \mathfrak{d} = \mathfrak{1}}$$

Théorème

$$\boxed{\mathfrak{d} * \{f(t)\} := \{f'(t)\} + f(0)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\{f(t)\} - \{f(0)\} &= \left\{\int_0^t f'(\tau)d\tau\right\} \\
\{f(t)\} - \{f(0)\,E(t)\} & \\
\{f(t)\} - \mathfrak{i} * f(0) &= \mathfrak{i} * \{f'(t)\} \\
\{f(t)\} &= \mathfrak{i} * \{f('(t)\} + \mathfrak{i} * f(0) \\
\mathfrak{d} * \{f(t)\} &= \{f'(t)\} + f(0)
\end{aligned}$$

(on a utilisé $\{f(0)\} = \mathfrak{i} * f(0)$ et $\mathfrak{d} * \mathfrak{i} = \mathfrak{1}$)

$$\{f(t)\} - \{f(0)\,\varepsilon(t)\} = \{f(t)\} - \frac{\{f(0)\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}} * \{\varepsilon(t)\}$$

$$\left(- f(0) * \{\varepsilon(t)\} \right)$$

$$= \{f(t)\} - \frac{\{f(0)\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}} * i$$

$$\{f(t)\} = i * \{f'(t)\} + i * \frac{\{f(0)\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}}$$

$$d * \{f(t)\} = \{f'(t)\} + \frac{\{f(0)\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}}$$

$$= \{f'(t)\} + f(0)$$

notation simplifiée pour les constantes (sans accolade)

cf. "les constantes" plus loin.

Notation abrégée

$1 \qquad \{1\} \qquad \mathbb{1} = \{\delta(t)\}$

$\{1\} = \{\epsilon(t)\}$

Attention !

On a plongé les nombres dans l'espace des opérateurs. Ainsi on ne distingue pas 1 de $1\{\delta(t)\} = \mathbb{1}$.

$$1 := 1\{\delta(t)\} = \{\delta(t)\} = \mathbb{1}$$

De même, on ne distingue pas le nombre 3 de $3\{\delta(t)\}$

$$3 := 3\{\delta(t)\}$$

A ne pas confondre...

$\frac{1}{\{\epsilon(t)\}} = d$, car $\{\epsilon(t)\} * d = \mathbb{1}$

$$3 = 3\{\delta(t)\} \neq \{3\} = \{3\epsilon(t)\} = 3\{\epsilon(t)\}$$

$3 \Leftrightarrow \frac{\{3\epsilon(t)\}}{\{\epsilon(t)\}} = \{3\epsilon(t)\} * d = 3\{\epsilon(t)\} * d = 3 \cdot \mathbb{1} = 3\{\delta(t)\}$

Les constantes:

$$\cdot 3 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\{3\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}}$$

$$2 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\{2\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}}$$

$$* \quad \frac{\{3\,\varepsilon(t)\} * \{2\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\} * \{\varepsilon(t)\}}$$

$$\{\varepsilon(t)\} * \{\varepsilon(t)\} = \{t\,\varepsilon(t)\}$$

$$\frac{\{3 \cdot 2 \cdot t\ \varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\} * \{\varepsilon(t)\}} = \frac{\{6\,t\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}} = \frac{\cancel{\{\varepsilon(t)\}} * \{6\,\varepsilon(t)\}}{\cancel{\{\varepsilon(t)\}} * \{\varepsilon(t)\}}$$

$$= \frac{\{6\,\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}} \longleftrightarrow 6$$

$$\frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 1} \longleftrightarrow 3$$

$$1 \longleftrightarrow \frac{\{\varepsilon(t)\}}{\{\varepsilon(t)\}} \qquad \mathbb{1} = \{\delta(t)\}$$

$$\{1\} = \{\varepsilon(t)\}$$

Discontinuité due à la condition initiale

$\int$ n'est pas l'inverse de $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{10}\sin(t)+2\right)=\frac{1}{10}\cos(t)$$

car

$$\int \frac{1}{10}\cos(\tau)d\tau = \frac{1}{10}\sin(t) \neq \frac{1}{10}\sin(t)+2$$

Discontinuité due à la condition initiale

$\mathfrak{d}$ est l'inverse de $\mathfrak{i}$ pour $*$

$$\mathfrak{d} * \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) + 2 \right\} = \left\{ \frac{1}{10} \cos(t) \right\} + 2 = \left\{ \frac{1}{10} \cos(t) \right\} + 2\{\delta(t)\}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{i} * \left(\left\{ \frac{1}{10} \cos(t) \right\} + 2\{\delta(t)\} \right) \\ = & \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) \right\} + 2 * \mathfrak{i} \\ = & \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) \right\} + 2\{\epsilon(t)\} \\ = & \left\{ \frac{1}{10} \sin(t) + 2 \right\} \end{aligned}$$

On retrouve la condition initiale de manière correcte !

Pas de diviseur de zéro (anneau intègre)

Th. de Titchmarsh

Si

$$\{a(t)\} * \{b(t)\} = \{0\}$$

alors nécessairement

$\{a(t)\} = \{0\}$ ou/et $\{b(t)\} = \{0\}$

Construction du corps de fraction

S'il n'y a pas de diviseur de zéro (anneau intègre)

on peut construire un corps de fraction associé. Il suffit d'écrire par convention une barre de fraction et de s'accorder sur les règles suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} + \frac{\{c(t)\}}{\{d(t)\}} &:= \frac{\{a(t)\} * \{d(t)\} + \{c(t)\} * \{b(t)\}}{\{b(t)\} * \{d(t)\}} \\ \frac{\{a(t)\}}{1} &:= \{a(t)\}\end{aligned}$$

Anneau intègre

Fractions classiques :

exemple $\frac{3}{2} \cdot ? = 0$

$\Rightarrow ? = 0$

multiplication modulo 4 :

$2 \cdot 2 \mod 4 = 0$

2 est un diviseur de 0 !

Autre exemple : polynôme :

$(3s^2 + 2s + 1) \cdot ? = 0$

$? = 0$

Les polynôme forme un anneau intègre.

anneau : multiplication $\cdot$

élément neutre : 1.

associativité, distributivité sur +

$(+, 0)$ est un groupe

$(1, \cdot)$ est un semi groupe

$\mathbb{Z}$: $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

un anneau intègre.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pas un anneau intègre.

$\longrightarrow$ corps de fraction de $\mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ $\mathbb{Q}$

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$$

un corps multiplication possède un inverse.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \ , \qquad \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

inverse de $\frac{4}{5}$

$\longrightarrow$ convolution :

$$\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} * \{b(t)\} = \{a(t)\}$$

Jan Mikusiński

"distribution"

Oliver Heaviside (calcul opérationnel "non rigoureux")

Jan Mikusinski (calcul opérationnel rigoureux)

Laurent Schwartz (distributions)

Mikio Sato hyperfonctions

G. Temple fonctions généralisées

Utilité pour la résolution des équations différentielles

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} * \{e^{\alpha t}\} &= \{\alpha e^{\alpha t}\} + 1 \\ &= \alpha\{e^{\alpha t}\} + 1 \\ \{e^{\alpha t}\} &= \frac{1}{\mathfrak{d} - \alpha} \end{aligned}$$

Correspondance ...

... entre la fonction

$$\{e^{\alpha t}\}$$

et l'opérateur

$$\frac{1}{\mathfrak{d} - \alpha}$$

Table de correspondances (égalité)

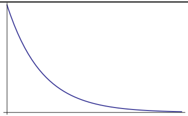
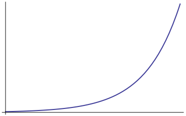
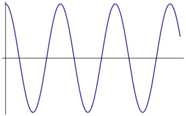
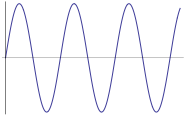
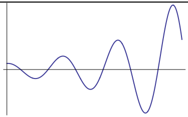
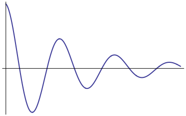
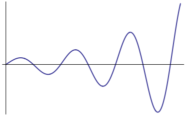
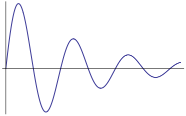
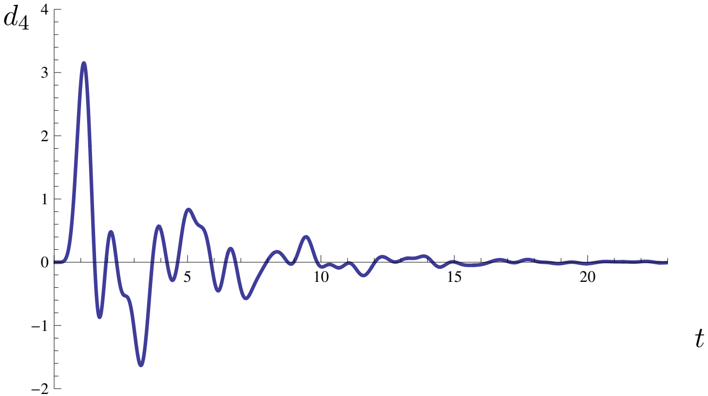
opérateur	fonction	graphique
$\frac{a}{\mathfrak{d}-\alpha} \quad \alpha < 0$	$\{ae^{\alpha t}\}$	
$\frac{a}{\mathfrak{d}-\alpha} \quad \alpha > 0$	$\{ae^{\alpha t}\}$	
$\frac{a\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}^2+\omega^2}$	$\{a\cos(\omega t)\}$	
$\frac{a\omega}{\mathfrak{d}^2+\omega^2}$	$\{a\sin(\omega t)\}$	

Table de correspondances (égalité)

opérateur		fonction	graphique
$\frac{a(\mathfrak{d}-\alpha)}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$	$\alpha > 0$	$= \{ae^{\alpha t}\cos(\omega t)\}$	
$\frac{a(\mathfrak{d}-\alpha)}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$	$\alpha < 0$	$= \{ae^{\alpha t}\cos(\omega t)\}$	
$\frac{a\omega}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$	$\alpha > 0$	$= \{ae^{\alpha t}\sin(\omega t)\}$	
$\frac{a\omega}{(\mathfrak{d}-\alpha)^2+\omega^2}$	$\alpha < 0$	$= \{ae^{\alpha t}\sin(\omega t)\}$	

Immeuble : réponse impulsionnelle



Modèle (rappel)

$$
\begin{aligned}
m\ddot{d}_1 &= k(d_0 - d_1) + k(d_2 - d_1) - b\dot{d}_1 \\
m\ddot{d}_2 &= k(d_1 - d_2) + k(d_3 - d_2) - b\dot{d}_2 \\
m\ddot{d}_3 &= k(d_2 - d_3) + k(d_4 - d_3) - b\dot{d}_3 \\
m\ddot{d}_4 &= k(d_3 - d_4) - b\dot{d}_4
\end{aligned}
$$

Valeurs numériques

$\{d_0(t)\} = \{\delta(t)\}$, $k = 10$, $b = 2$

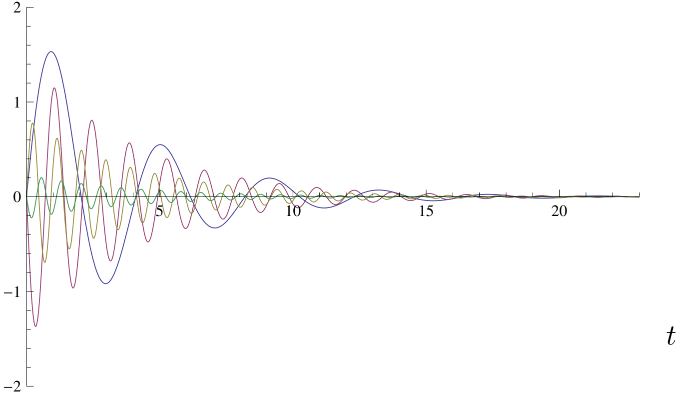
Réponse impulsionnelle

$$\{d_4(t)\} = \frac{160000}{\mathfrak{d}^8 + 2\mathfrak{d}^7 + 141.5\mathfrak{d}^6 + 210.5\mathfrak{d}^5 + 6105.06\mathfrak{d}^4 + 6017.5\mathfrak{d}^3 + 81500\mathfrak{d}^2 + 40000.\mathfrak{d} + 160000}$$

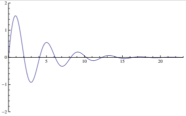
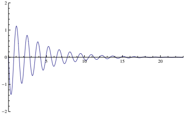
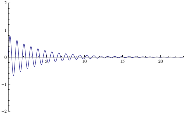
Immeuble : 4 composantes (modes)

$$
\begin{aligned}
\{d_4(t)\} \quad = \quad & -\frac{6.66667}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+19.9375}+\frac{5.62686}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+46.8834} \\
& -\frac{1.95419}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+70.5793}+\frac{2.99399}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+2.3498}
\end{aligned}
$$

Immeuble : 4 composantes (modes)



Immeuble : 4 composantes (modes)

opérateur	fonction	graphique
$\frac{2.99399}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+2.3498}$	$= \{1.953e^{-0.25t}\sin(1.523t)\}$	
$-\frac{6.66667}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+19.9375}$	$= \{-1.493e^{-0.25t}\sin(4.465t)\}$	
$\frac{5.62686}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+46.8834}$	$= \{0.822e^{-0.25t}\sin(6.847t)\}$	
$-\frac{1.95419}{(\mathfrak{d}+0.25)^2+70.5793}$	$= \{-0.233e^{-0.25t}\sin(8.401t)\}$