# Commande des systèmes dynamiques
# 8. Critère de Nyquist

Dr. Ph. Mullhaupt

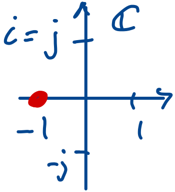
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

# Contenu



$-1$



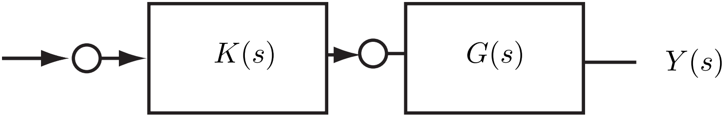
## Objectif : critère de stabilité de la boucle fermée

Avec plusieurs avantages :

- Pas besoin de calculer les pôles en boucle fermée
  (pas besoin de calculer les racines de $AR + BS$ avec $K = \frac{R}{S}$ et $G = \frac{B}{A}$)
- Utilisation uniquement du transfert en boucle ouverte
  (utilisation directe de $KG$)
- Il faut seulement connaître le nombre de pôles instables de la boucle ouverte
  (le nombre de racines instables de $AR$)
- Rend possible la synthèse en “sculptant” la boucle ouverte (cf. leçon sur le diagramme de Bode)

# Boucle ouverte

## Schéma de commande en boucle ouverte



# Transfert en boucle ouverte

### Transfert en boucle ouverte

(régulateur et système à régler)

$$K(s)G(s) = \frac{S(s)}{R(s)} \frac{B(s)}{A(s)}$$

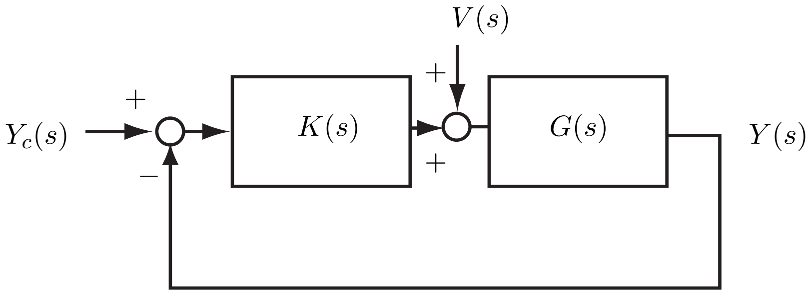
### Pôles en boucle ouverte (régulateur et système)

Ce sont les zéros de

$$A(s)R(s)$$

# Boucle fermée

## Schéma de commande en boucle fermée



# Transferts en boucle fermée

## Asservissement et régulation

- Asservissement

$$\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{B(s)S(s)}{A(s)R(s)+B(s)S(s)}$$

- Régulation

$$\frac{G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{B(s)\,R(s)}{A(s)R(s)+B(s)S(s)}$$

## Pôles en boucle fermée

Les deux transferts ont le même polynôme au dénominateur

$$A(s)R(s)+B(s)S(s)$$

qui détermine les pôles en boucle fermée

# Le diagramme de Nyquist

On représente la courbe $K(j\omega)G(j\omega)$ dans $\mathbb{C}$ pour $\omega \in ]-\infty; +\infty[$

$KG = x + jy$

$s = j\omega = i\omega$ $\quad \omega \in ]-\infty; +\infty[$

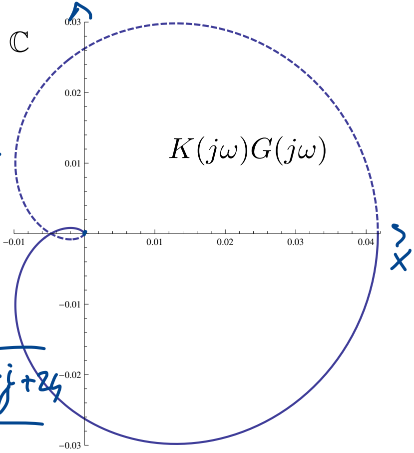
$$K(s)G(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

$i\omega$

$KG$

?

$$\frac{1}{26 \cdot 0{,}2 \cdot j + 24}$$

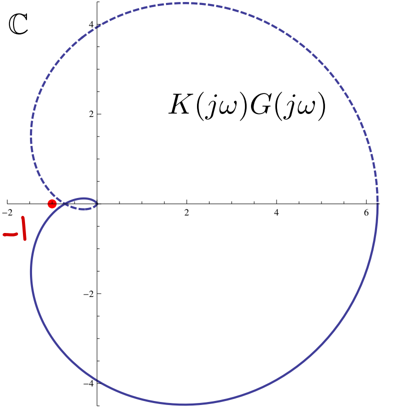


## Critère de Nyquist simplifié

(pas de pôle instable dans la boucle ouverte $KG$)

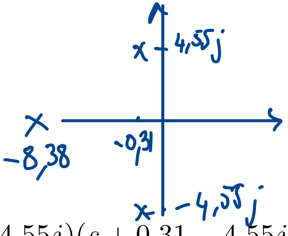
Boucle fermée stable si le point $-1$ n'est pas encerclé par $K(j\omega)G(j\omega)$

$$K(s)G(s) = \frac{150}{s^3+9s^2+26s+24} = \frac{150}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{150}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$



## Vérification du critère de Nyquist simplifié

Calculons les pôles de la boucle fermée




$$\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{150}{s^3+9s^2+26s+174}$$

$$\begin{aligned} A(s)R(s)+B(s)S(s) &= s^3+9s^2+26s+174 \\ &= (s+8.38)(s+0.31+4.55j)(s+0.31-4.55j) \\ &= (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) \end{aligned}$$

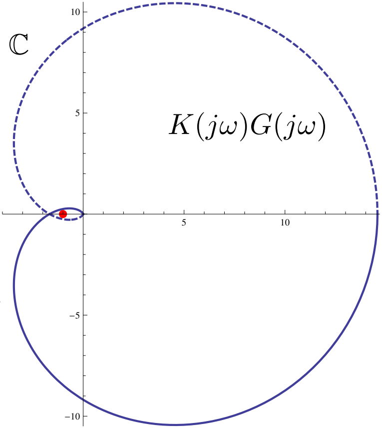
Les pôles en boucle fermée sont tous dans le demi-plan gauche ($p_i \in \mathbb{C}_-, i = 1, 2, 3$)

# Critère de Nyquist simplifié

(pas de pôle instable dans la boucle ouverte $KG$)

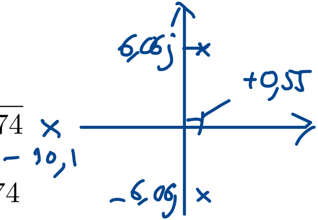
Boucle fermée instable si le point $-1$ est encerclé par $K(j\omega)G(j\omega)$

$$
\begin{aligned}
K(s)G(s) &= \frac{350}{s^3+9s^2+26s+24} \\
&= \frac{350}{(s+2)(s+3)(s+4)} \\
&= \frac{350}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}
\end{aligned}
$$



# Vérification du critère de Nyquist simplifié

Calculons les pôles de la boucle fermée




$$
\begin{aligned}
\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} &= \frac{350}{s^3+9s^2+26s+374} \\
A(s)R(s)+B(s)S(s) &= s^3+9s^2+26s+374 \\
&= (s+10.1)(s-0.55-6.06j)(s-0.55+6.06j) \\
&= (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)
\end{aligned}
$$

Les pôles $p_2 = 0.55 + 6.06j$ et $p_3 = 0.55 - 6.06j$ conduisent à une instabilité car ils appartiennent à $\mathbb{C}_+$

# ATTENTION

- La boucle ouverte n'est pas utilisée en pratique (dans ce chapitre)
- Elle sert uniquement à des fins d'analyse et de synthèse

## Polynômes, fonctions entières, fonctions analytiques

Un polynôme est une somme finie de monômes

$$F(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

$s \in \mathbb{C}$

Une fonction entière est une somme infinie de monômes, dont la somme est convergente partout (pour tout $s \in \mathbb{C}$)

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

Condition $\Leftrightarrow$ pour la convergence dans tout $\mathbb{C}$

$$\lim_{i \to \infty} (|a_i|)^{\frac{1}{i}} = 0$$

## Polynômes, fonctions entières, fonctions analytiques

### Une fonction analytique est localement une fonction entière

Dans un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s_0)(s - s_0)^i \qquad \forall s_0 \in \mathcal{V} \qquad a_i(s_0) \in \mathbb{C}$$

- La série converge dans un disque centré en $s_0$ de rayon $r(s_0)$ (qui peut être petit)
- Le disque de convergence doit être inclut dans $\mathcal{V}$

## Fonction méromorphe

**Définition (utilisée dans ce chapitre)**

C’est une fraction de deux fonctions entières

**Définition parfois rencontrée**

Localement définie par une fraction de deux fonctions analytiques

## Exemples de fonctions méromorphes

### Polynôme

$$s + 3 + 3s^2 + 3s + 1$$

### Fraction de deux polynômes

$$\frac{s+2}{s^2+2s+1}$$

### A l'aide de fonctions entières bien connues

$$\frac{\sin(s)}{s^2+s+1} \qquad \frac{e^s}{\cos(s)}$$

### A l'aide du critère de convergence pour les fonctions entières

$$\frac{2s+3}{\sum_0^\infty a_i s^i} \qquad a_i = \frac{i+2}{(\ln(i+2))^{i+2}}$$

## Principe de l'argument

### Contour $\Gamma$ délimitant une région simplement connexe

Soit $\Gamma$ un contour dans la plan complexe qui entoure une région simplement connexe.
$\Gamma$ est orientée

### Fonction méromorphe

Soit $F(s)$ une fonction méromorphe

### Principe de l'argument de Cauchy

$$\arg F(\Gamma) = 2\pi(Z - P)$$

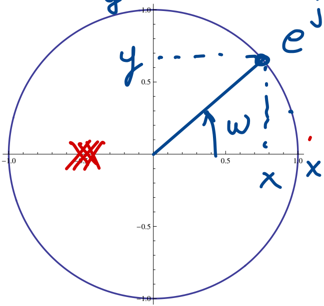
$Z$ est le nombre de zéros de $F(s)$ à l'intérieur de $\Gamma$
$P$ est le nombre de pôles de $F(s)$ à l'intérieur de $\Gamma$
le signe $+$ correspond à la même orientation que celle de $\Gamma$

# Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

$x + jy = s$

$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$

$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega) = s$

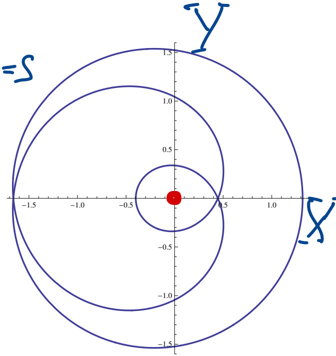



trois poles à l'intérieur du contour

$$\frac{(s+1.1)^2 + 0.2^2}{(s+0.5)^3}$$

$$\longrightarrow$$

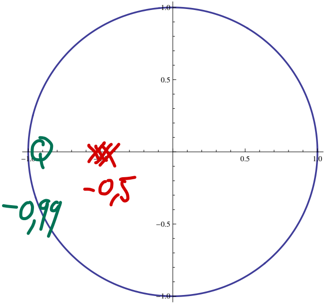
$\bar{X} + j\bar{Y}$




trois tours dans le sens trig. — autour de $0$

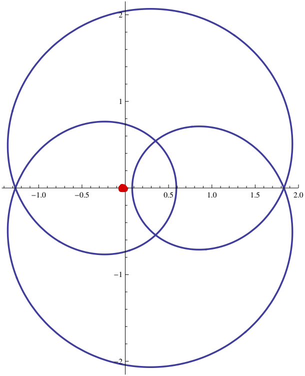
# Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



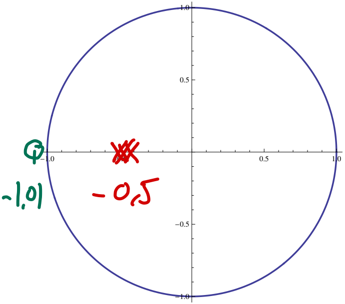

$$\frac{s + 0.99}{(s + 0.5)^3}$$

$$\longrightarrow$$



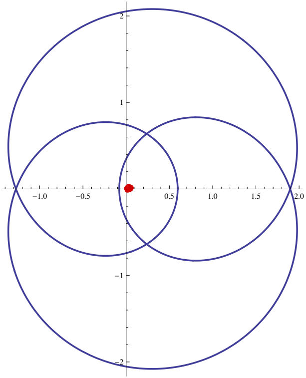
# Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



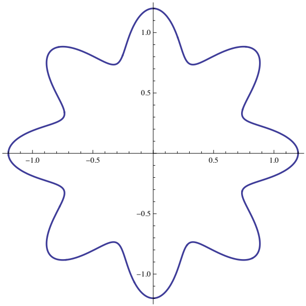

$$\frac{s+1.01}{(s+0.5)^3}$$

$$\longrightarrow$$

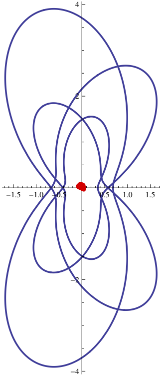


## Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

$$\Gamma = (1 + 0.2\cos(8\omega))e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$

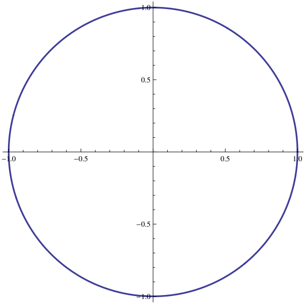



$$\frac{1}{(s+0.1)^4} \longrightarrow$$

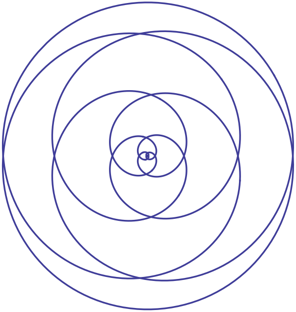


## Transformation d'un contour par une fonction méromorphe

$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$




$$\frac{\sin(22s)}{0.5s-1} \longrightarrow$$



## Esquisse de la démonstration

$\Gamma(\omega)$

est une courbe qui délimite une région simplement connexe ayant ainsi un intérieur et un extérieur
La courbe $\Gamma(\omega)$ est paramétrée par $\omega \in [0; 2\pi]$

$F(s)$ contient

- $m$ zéros $z_i, i = 1, \ldots, m$
- $n$ pôles $p_i, i = 1, \ldots, n$
- les $Z$ premiers zéros sont à l'intérieur de $\Gamma(\omega)$
- les $P$ premires pôles sont à l'intérieur de $\Gamma(\omega)$

## Esquisse de la démonstration

### $F(s)$ est une fraction rationnelle

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

$$\begin{aligned}
\arg(F(\Gamma)) &= \sum_{i=1}^{Z} \arg(\Gamma - s_i) + \sum_{i=Z+1}^{m} \arg(\Gamma - s_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{P} \arg(\Gamma - p_i) - \sum_{i=P+1}^{n} \arg(\Gamma - p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{Z} \arg(\Gamma - s_i) - \sum_{i=1}^{P} \arg(\Gamma - p_i) \\
\arg(F(\Gamma(\omega)))_{\omega \in [0,2\pi]} &= 2\pi(Z - P)
\end{aligned}$$

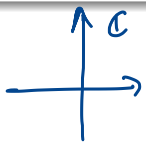
# Application et contour particulier

## Contour particulier

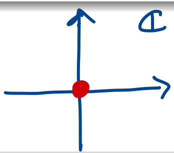
$\Gamma$ est le contour qui délimite tout le demi-plan complexe $\mathbb{C}_+$
Ainsi, on suit l'axe $+j\omega, \omega \in [0; +\infty]$ et l'on encercle le demi-plan en tournant autour de l'infini et on revient le long de l'axe $-j\omega$ avec $\omega = [0; +\infty]$. On délimite bien une région simplement connexe qui est tout $\mathbb{C}_+$ avec le contour $\Gamma$

## Application particulière

$$F(s) = 1 + K(s)G(s)$$

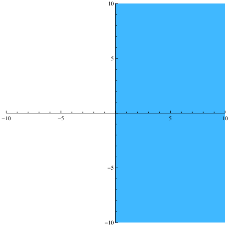



$F(s) = 1 + K(s)G(s)$



# Application et contour particulier

$$\Gamma = \pm j\omega$$

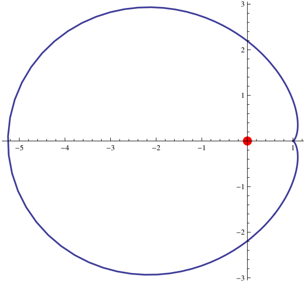



$$1 + KG$$

$$\longrightarrow$$

$$1 + \frac{150}{(s+1)(s-2)(s+3)(s+4)}$$

$$1 + K(j\omega)G(j\omega)$$



## Application du principe de l'argument

Le principe appliqué à $\Gamma$ et $F(s) = 1 + KG$ donne

$$Z - P = N$$

$N$ est le nombre de tours de

$$1 + K(\Gamma)G(\Gamma) = 1 + K(j\omega)G(j\omega)$$

autour de l'origine $0$

## Application du principe de l'argument

$Z$

Nombre de zéros de $1 + KG$ dans $\mathbb{C}_+$

$$1 + K(s)G(s) = 1 + \frac{S(s)}{R(s)}\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s)R(s) + B(s)S(s)}{A(s)R(s)}$$

Nombre de zéros de $AR + BS$, nombre de pôles de la boucle fermée $\in \mathbb{C}_+$

$P$

Nombre de pôles de $1 + KG$ dans $\mathbb{C}_+$

$$1 + K(s)G(s) = \frac{A(s)R(s) + B(s)S(s)}{A(s)R(s)}$$

Nombre de zéros de $AR$, nombre de pôles de la boucle ouverte $\in \mathbb{C}_+$

# Critère de Nyquist généralisé

On dessine $K(j\omega)G(j\omega)$ dans $\mathbb{C}$, $\omega \in [-\infty; +\infty]$

- $Z$ : nombre de zéros de $AR + BS$ (pôles b.f.) dans $\mathbb{C}_+$
- $P$ : nombre de zéros de $AR$ (pôles b.o.) dans $\mathbb{C}_+$
- $N$ : nombre de tours de $K(j\omega)G(j\omega)$ autour de $-1$

Critère de Nyquist généralisé

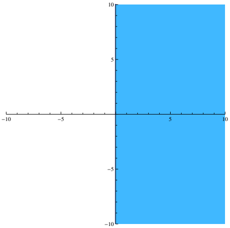
$$N = Z - P$$

pôles de 1+KG
≡ pôles de la B.O.

zéros de 1+KG ≡ pôles de la B.F.

# Critère de Nyquist généralisé

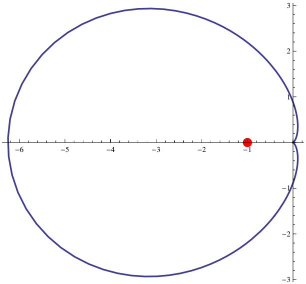
$$\Gamma = \pm j\omega$$




$$\xrightarrow{KG}$$

$$\frac{150}{(s+1)(s-2)(s+3)(s+4)}$$

$$K(j\omega)G(j\omega)$$



# Exemple : bille sur une roue

## Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 0.1} = \frac{1}{(s+\sqrt{0.1})(s-\sqrt{0,1})}$$

## Régulateur

$$K(s) = K(1 + 4s)$$

# Exemple : bille sur une roue

## Nombre de pôles instables en boucle ouverte

- $1$ pôle instable $p_1 = \sqrt{0.1}$. Ainsi $P = 1$

## Le critère de stabilité de Nyquist généralisé détermine $N$

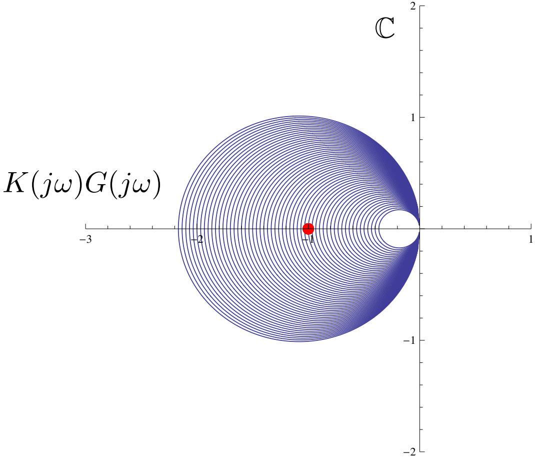
- $P = 1$ (1 pôle instable en boucle ouverte)
  $Z = 0$ ($0$ pôles de la boucle fermées dans $\mathbb{C}_+$)
  Calculons $N$ (le nombre de tours autour de $-1$).

$$\begin{aligned} N &= Z - P \\ -1 &= 0 - 1 \end{aligned}$$

- $K(j\omega)G(j\omega)$ doit encercler le point $-1$ une fois pour assurer la stabilité en boucle fermée

# Exemple : bille sur une roue

Au fur et à mesure que $K$ augmente...



## Une transformation méromorphe artistique

Etoile à $N$ branches $\rightarrow$ transformation méromorphe

$$s = 1 + 0.2\cos(N\omega) \quad \longrightarrow \quad \frac{\sin(s)}{1.9+s}$$

$N = 1, 2, 3, 4, \ldots, 70 \qquad \omega \in [0, 2\pi]$

$$\frac{\sin(220\, e^{j\omega}(1 + 0.2\cos(N\omega))}{1.9 + e^{j\omega}(1 + 0.2\cos(N\omega))}$$