# Introduction à la commande des systèmes dynamiques
# 9. Synthèse dans le diagramme de Bode

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

## Contenu

# Classe de signaux

## Somme finie de signaux périodiques complexes

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i e^{j\omega_i t + \phi_i} \qquad a_i \in \mathbb{C} \qquad s(t) \in \mathbb{C}$$

## Remarques

- Les signaux sont périodiques
- Les signaux sont complexes
- Ils commencent en $-\infty$ et se terminent en $+\infty$
- Grâce au principe de superposition, la réponse à travers un système linéaire à temps invariant est la superposition de la réponse à chaque sinusoïde $a_i e^{j\omega_i t + \phi_i}$ séparée

# Onde sinusoïdale complexe fondamentale

## Un signal fondamental

$$a(t) = ae^{j\omega t+\phi}$$

## L'opérateur dérivée $\hat{\mathfrak{d}}$

**La dérivée $\hat{\mathfrak{d}} = \frac{d}{dt}$**

On dérive le signal

$$\frac{d}{dt} a e^{j\omega t + \phi} = j\omega a e^{j\omega t + \phi}$$

On peut donc définir

$$\hat{\mathfrak{d}}(a(t)) := j\omega a(t)$$

L'opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$ agit par multiplication simple uniquement sur un signal sinusoïdal complexe fondamental $a(t) = ae^{j\omega t + \phi}$.

# L'opérateur intégral $\hat{\imath}$

## L'intégrale indéfinie $\hat{\imath} = \int$

On calcule la primitive du signal

$$\int a e^{j\omega\tau+\phi} d\tau = \frac{1}{j\omega} a e^{j\omega t+\phi}$$

On peut donc définir l'action de l'opèrateur $\hat{\imath}$ sur un signal sinusoïdal complexe fondamental $a(t)$

$$\hat{\imath}(a(t)) := \frac{1}{j\omega} a(t)$$

# Action sur une somme de fonctions sinusoïdales complexes

## Signal

$$a(t) = \sum_{i=i}^{N} a_i e^{j\omega_i t + \phi_i}$$

## Opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$

$$\hat{\mathfrak{d}}(a(t)) = \sum_{i=1}^{N} j\omega_i a_i e^{j\omega_i t + \phi_i}$$

## Opérateur $\hat{\mathfrak{i}}$

$$\hat{\mathfrak{i}}(a(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{j\omega_i} a_i e^{j\omega_i t + \phi_i} = \frac{1}{\hat{\mathfrak{d}}}(a(t))$$

# Fonction de transfert harmonique $G(j\omega)$

## Fonction de transfert générale

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

## Signal fondamental et opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$

$$a(t) = a e^{j\omega t + \phi} \qquad s \leftrightarrow \hat{\mathfrak{d}}$$

## Opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$

$$\begin{aligned} & \frac{b_0 \hat{\mathfrak{d}}^m + b_1 \hat{\mathfrak{d}}^{m-1} + \ldots + b_m}{\hat{\mathfrak{d}}^n + a_1 \hat{\mathfrak{d}}^{n-1} + \ldots + a_n} \\ = & \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} \end{aligned}$$

## Fonction de transfert harmonique

### Signal fondamental

$$u(t) = ae^{j\omega t+\phi}$$

### Fonction de transfert harmonique

$$G(s) \leftrightarrow G(j\omega)$$

### Effet sur la sortie

$$y(t) = G(j\omega)u(t) = a\ |G(j\omega)|\ e^{j\omega+\phi+\arg(G(j\omega))}$$

## Exemple

### Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 3}$$

### Signal fondamental

$$u(t) = \sin(t)$$

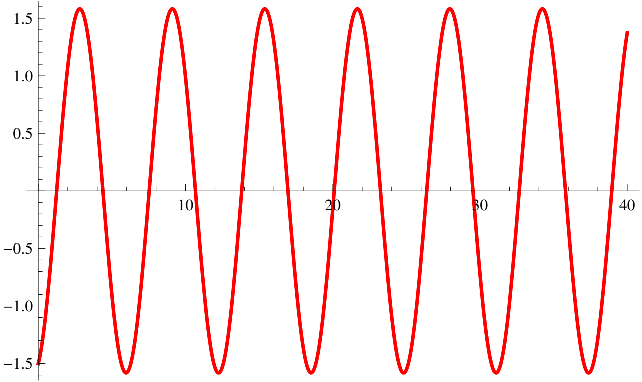
### Fonction de transfert harmonique

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10}{3 - \omega^2 + 6j\omega} \\ G(j1) &= \frac{10}{2 + 6j} \end{aligned}$$

## Exemple

### Sortie correspondante

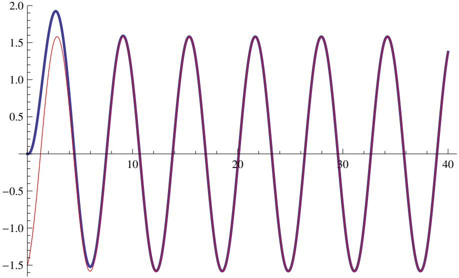
$$y(t) = |G(j)|\sin(t + \arg(G(j))) = \sqrt{5}2\sin(t - \arctan(3)) = -\frac{3}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$$



## Exemple

### Comparaison avec la transformation de Laplace

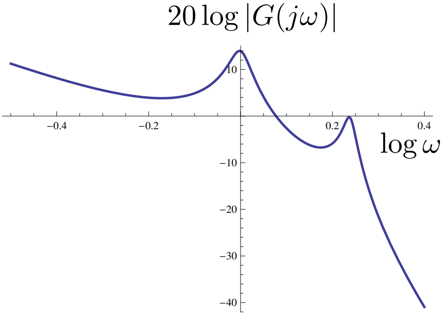
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{s^2+6s+3}\frac{1}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{12}\Big((9-4\sqrt{6})e^{(-3-\sqrt{6})t} + (9+4\sqrt{6})e^{(-3+\sqrt{6})t} \\
&\quad -18\cos(t) + 6\sin(t)\Big)
\end{aligned}
$$



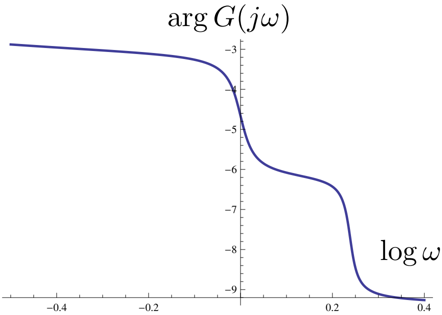
# Le diagramme de Bode

## On représente $G(j\omega)$ par deux graphiques

### Module

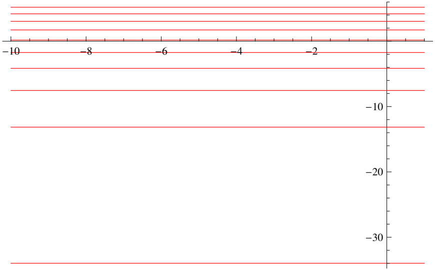



### Argument

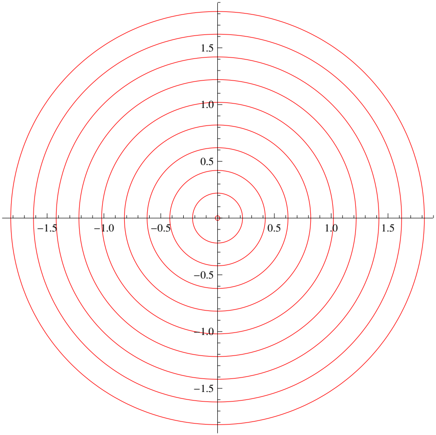


## Lien entre Bode et Nyquist

### Module constant dans Bode



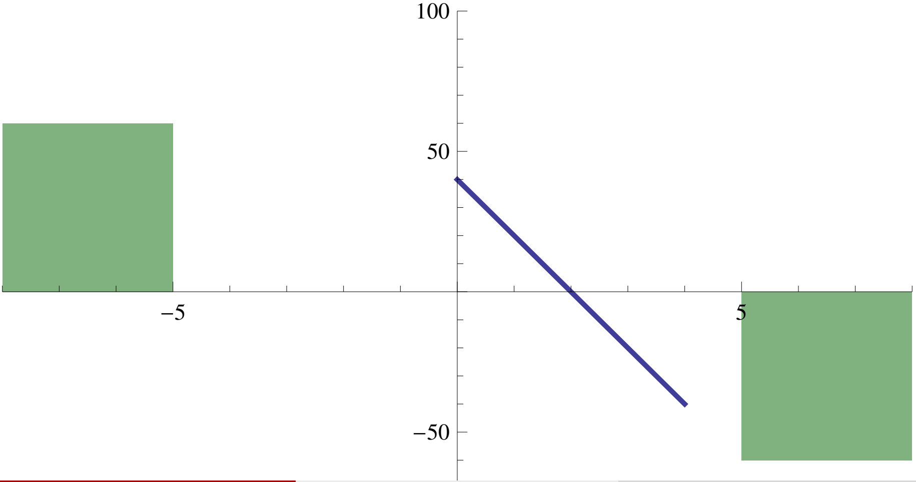

### Module constant dans Nyquist



# Synthèse en asservissement dans le diagramme de Bode

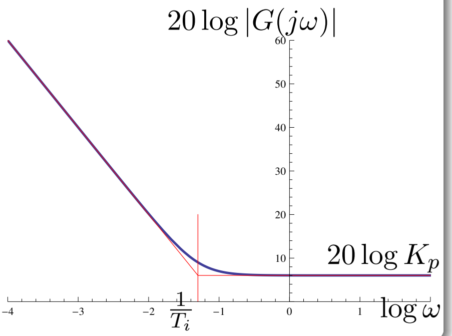
## Fondé sur le critère de Nyquist simplifié

### Recette de synthèse

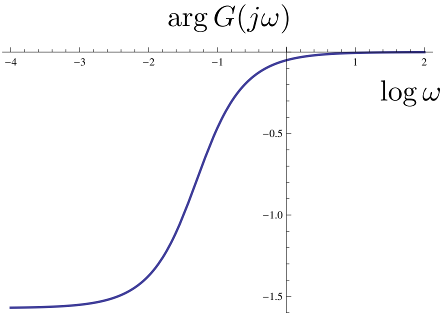


# Diagramme de Bode du régulateur PI

## Module




## Argument



# Diagramme de Bode du régulateur PD