

Commande des systèmes dynamiques

8. Critère de Nyquist

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Contenu

- 1 Objectif
- 2 Boucle ouverte et boucle fermée
- 3 Diagramme de Nyquist
- 4 Critère de Nyquist simplifié
- 5 Transformation d'un contour par une application méromorphe
- 6 Application méromorphe particulière : $1 + KG$
- 7 Critère de Nyquist généralisé
- 8 Exemple : bille sur une roue
- 9 Transformation méromorphe artistique

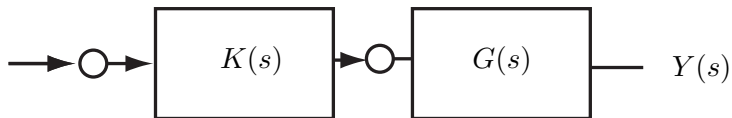
Objectif : critère de stabilité de la boucle fermée

Avec plusieurs avantages :

- Pas besoin de calculer les pôles en boucle fermée
(pas besoin de calculer les racines de $AR + BS$ avec $K = \frac{R}{S}$ et $G = \frac{B}{A}$)
- Utilisation uniquement du transfert en boucle ouverte
(utilisation directe de KG)
- Il faut seulement connaître le nombre de pôles instables de la boucle ouverte
(le nombre de racines instables de AR)
- Rend possible la synthèse en “sculptant” la boucle ouverte (cf. leçon sur le diagramme de Bode)

Boucle ouverte

Schéma de commande en boucle ouverte



Transfert en boucle ouverte

Transfert en boucle ouverte

(régulateur et système à régler)

$$K(s)G(s) = \frac{S(s)}{R(s)} \frac{B(s)}{A(s)}$$

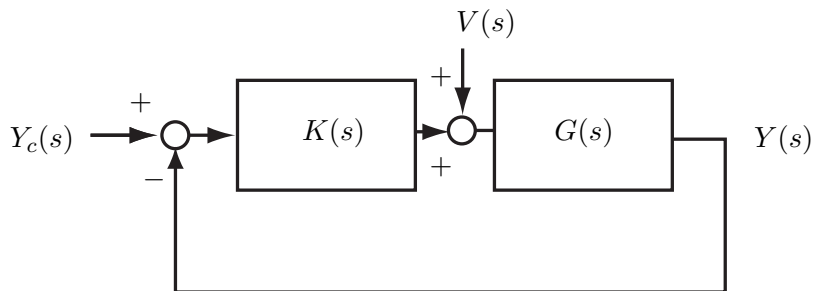
Pôles en boucle ouverte (régulateur et système)

Ce sont les zéros de

$$A(s)R(s)$$

Boucle fermée

Schéma de commande en boucle fermée



Transferts en boucle fermée

Asservissement et régulation

- Asservissement

$$\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{B(s)S(s)}{A(s)R(s) + B(s)S(s)}$$

- Régulation

$$\frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{B(s)}{A(s)R(s) + B(s)S(s)}$$

Pôles en boucle fermée

Les deux transferts ont le même polynôme au dénominateur

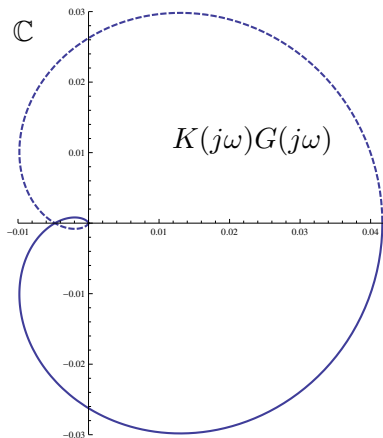
$$A(s)R(s) + B(s)S(s)$$

qui détermine les pôles en boucle fermée

Le diagramme de Nyquist

On représente la courbe $K(j\omega)G(j\omega)$ dans $\mathbb{C}$ pour $\omega \in]-\infty; +\infty[$

$$K(s)G(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

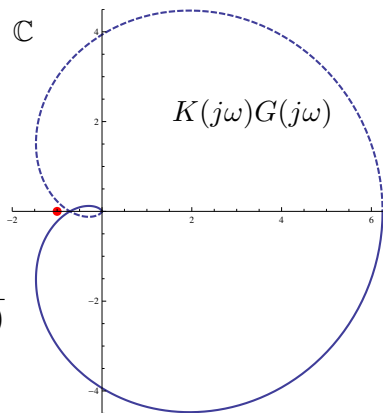


Critère de Nyquist simplifié

(pas de pôle instable dans la boucle ouverte KG)

Boucle fermée stable si le point -1 n'est pas encerclé par $K(j\omega)G(j\omega)$

$$\begin{aligned}
 K(s)G(s) &= \frac{150}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \\
 &= \frac{150}{(s+2)(s+3)(s+4)} \\
 &= \frac{150}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}
 \end{aligned}$$



Vérification du critère de Nyquist simplifié

Calculons les pôles de la boucle fermée

$$\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{150}{s^3 + 9s^2 + 26s + 174}$$

$$\begin{aligned} A(s)R(s) + B(s)S(s) &= s^3 + 9s^2 + 26s + 174 \\ &= (s + 8.38)(s + 0.31 + 4.55j)(s + 0.31 - 4.55j) \\ &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \end{aligned}$$

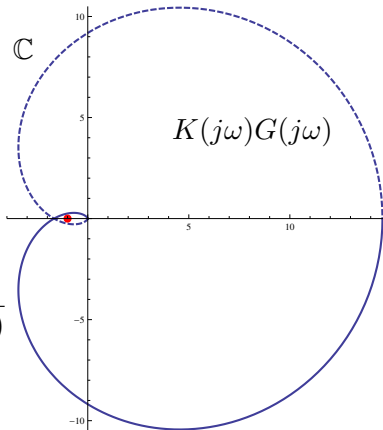
Les pôles en boucle fermée sont tous dans le demi-plan gauche
 $(p_i \in \mathbb{C}_-, i = 1, 2, 3)$

Critère de Nyquist simplifié

(pas de pôle instable dans la boucle ouverte KG)

Boucle fermée instable si le point -1 est encerclé par $K(j\omega)G(j\omega)$

$$\begin{aligned}
 K(s)G(s) &= \frac{350}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \\
 &= \frac{350}{(s+2)(s+3)(s+4)} \\
 &= \frac{350}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}
 \end{aligned}$$



Vérification du critère de Nyquist simplifié

Calculons les pôles de la boucle fermée

$$\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{350}{s^3 + 9s^2 + 26s + 374}$$

$$\begin{aligned} A(s)R(s) + B(s)S(s) &= s^3 + 9s^2 + 26s + 374 \\ &= (s + 10.1)(s - 0.55 - 6.06j)(s - 0.55 + 6.06j) \\ &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \end{aligned}$$

Les pôles $p_2 = 0.55 + 6.06j$ et $p_3 = 0.55 - 6.06j$ conduisent à une instabilité car ils appartiennent à $\mathbb{C}_+$

ATTENTION

- La boucle ouverte n'est pas utilisée en pratique (dans ce chapitre)
- Elle sert uniquement à des fins d'analyse et de synthèse

Polynômes, fonctions entières, fonctions analytiques

Un polynôme est une somme finie de monômes

$$F(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

Une fonction entière est une somme infinie de monômes, dont la somme est convergente partout (pour tout $s \in \mathbb{C}$)

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

Condition $\Leftrightarrow$ pour la convergence dans tout $\mathbb{C}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (|a_i|)^{\frac{1}{i}} = 0$$

Polynômes, fonctions entières, fonctions analytiques

Une fonction analytique est localement une fonction entière

Dans un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s_0)(s - s_0)^i \quad \forall s_0 \in \mathcal{V} \quad a_i(s_0) \in \mathbb{C}$$

- La série converge dans un disque centré en s_0 de rayon $r(s_0)$ (qui peut être petit)
- Le disque de convergence doit être inclut dans $\mathcal{V}$

Fonction méromorphe

Définition (utilisée dans ce chapitre)

C'est une fraction de deux fonctions entières

Définition parfois rencontrée

Localement définie par une fraction de deux fonctions analytiques

Exemples de fonctions méromorphes

Polynôme

$$s + 3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Fraction de deux polynômes

$$\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

A l'aide de fonctions entières bien connues

$$\frac{\sin(s)}{s^2 + s + 1} \qquad \frac{e^s}{\cos(s)}$$

A l'aide du critère de convergence pour les fonctions entières

$$\sum_0^\infty a_i s^i \qquad a_i = \frac{i + 2}{(\ln(i + 2))^{i+2}}$$

Principe de l'argument

Contour Γ délimitant une région simplement connexe

Soit Γ un contour dans la plan complexe qui entoure une région simplement connexe.

Γ est orientée

Fonction méromorphe

Soit $F(s)$ une fonction méromorphe

Principe de l'argument de Cauchy

$$\arg F(\Gamma) = 2\pi(Z - P)$$

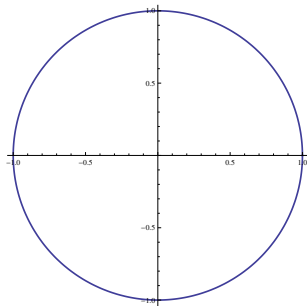
Z est le nombre de zéros de $F(s)$ à l'intérieur de Γ

P est le nombre de pôles de $F(s)$ à l'intérieur de Γ

le signe $+$ correspond à la même orientation que celle de Γ

Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

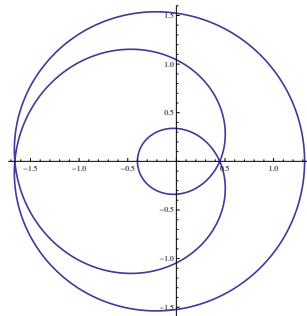
$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



trois poles à l'intérieur du contour

$$\frac{(s + 1.1)^2 + 0.2^2}{(s + 0.5)^3}$$

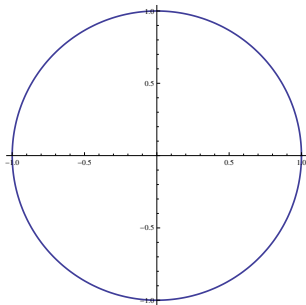
$$\longrightarrow$$



trois tours dans le sens trig. — autour de 0

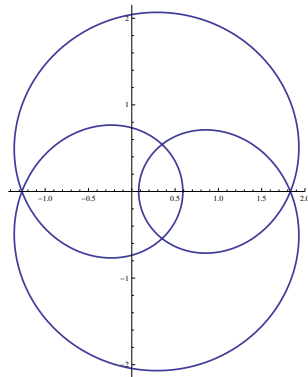
Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



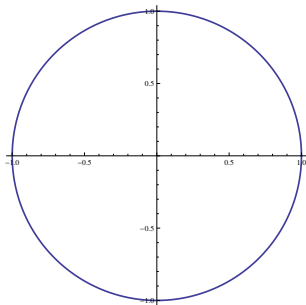
$$\frac{s + 0.99}{(s + 0.5)^3}$$

$$\longrightarrow$$



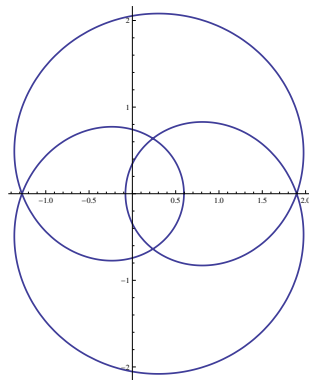
Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



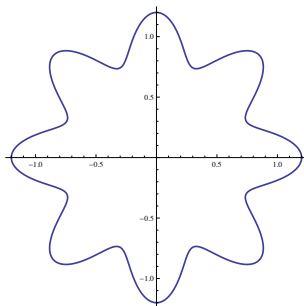
$$\frac{s + 1.01}{(s + 0.5)^3}$$

→

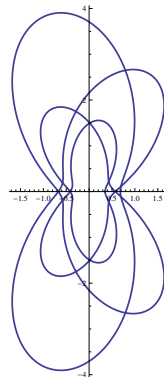


Transformation d'un contour par une fraction rationnelle

$$\Gamma = (1 + 0.2 \cos(8\omega))e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$

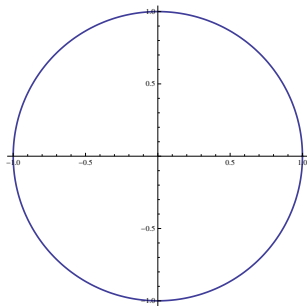


$$\frac{1}{(s + 0.1)^4}$$

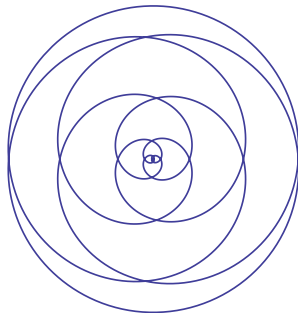
$$\longrightarrow$$


Transformation d'un contour par une fonction méromorphe

$$\Gamma = e^{j\omega} \quad \omega \in [0; 2\pi]$$



$$\frac{\sin(22s)}{0.5s - 1} \longrightarrow$$



Esquisse de la démonstration

$\Gamma(\omega)$

est une courbe qui délimite une région simplement connexe ayant ainsi un intérieur et un extérieur

La courbe $\Gamma(\omega)$ est paramétrée par $\omega \in [0; 2\pi]$

$F(s)$ contient

- m zéros $z_i, i = 1, \dots, m$
- n pôles $p_i, i = 1, \dots, n$
- les Z premiers zéros sont à l'intérieur de $\Gamma(\omega)$
- les P premières pôles sont à l'intérieur de $\Gamma(\omega)$

Esquisse de la démonstration

$F(s)$ est une fraction rationnelle

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$\begin{aligned} \arg(F(\Gamma)) &= \sum_{i=1}^Z \arg(\Gamma - s_i) + \sum_{i=Z+1}^m \arg(\Gamma - s_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^P \arg(\Gamma - p_i) - \sum_{i=P+1}^n \arg(\Gamma - p_i) \\ &= \sum_{i=1}^Z \arg(\Gamma - s_i) - \sum_{i=1}^P \arg(\Gamma - p_i) \end{aligned}$$

$$\arg(F(\Gamma(\omega)))_{\omega \in [0, 2\pi]} = 2\pi(Z - P)$$

Application et contour particulier

Contour particulier

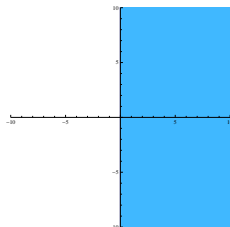
Γ est le contour qui délimite tout le demi-plan complexe $\mathbb{C}_+$. Ainsi, on suit l'axe $+j\omega$, $\omega \in [0; +\infty]$ et l'on encercle le demi-plan en tournant autour de l'infini et on revient le long de l'axe $-j\omega$ avec $\omega = [0; +\infty]$. On délimite bien une région simplement connexe qui est tout $\mathbb{C}_+$ avec le contour Γ .

Application particulière

$$F(s) = 1 + K(s)G(s)$$

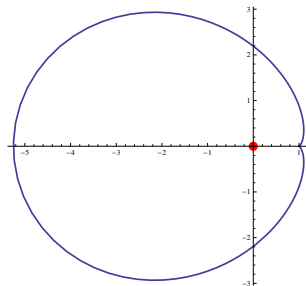
Application et contour particulier

$$\Gamma = \pm j\omega$$



$$1 + KG \rightarrow 1 + \frac{150}{(s+1)(s-2)(s+3)(s+4)}$$

$$1 + K(j\omega)G(j\omega)$$



Application du principe de l'argument

Le principe appliqué à Γ et $F(s) = 1 + KG$ donne

$$Z - P = N$$

N est le nombre de tours de

$$1 + K(\Gamma)G(\Gamma) = 1 + K(j\omega)G(j\omega)$$

autour de l'origine 0

Application du principe de l'argument

Z

Nombre de zéros de $1 + KG$ dans $\mathbb{C}_+$

$$1 + K(s)G(s) = 1 + \frac{S(s)}{R(s)} \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s)R(s) + B(s)S(s)}{A(s)R(s)}$$

Nombre de zéros de $AR + BS$, nombre de pôles de la boucle fermée $\in \mathbb{C}_+$

P

Nombre de pôles de $1 + KG$ dans $\mathbb{C}_+$

$$1 + K(s)G(s) = \frac{A(s)R(s) + B(s)S(s)}{A(s)R(s)}$$

Nombre de zéros de AR , nombre de pôles de la boucle ouverte $\in \mathbb{C}_+$

Critère de Nyquist généralisé

On dessine $K(j\omega)G(j\omega)$ dans $\mathbb{C}$, $\omega \in [-\infty; +\infty]$

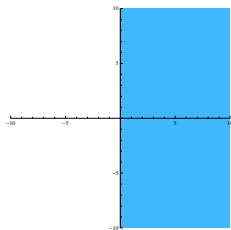
- Z : nombre de zéros de $AR + BS$ (pôles b.f.) dans $\mathbb{C}_+$
- P : nombre de zéros de AR (pôles b.o.) dans $\mathbb{C}_+$
- N : nombre de tours de $K(j\omega)G(j\omega)$ autour de -1

Critère de Nyquist généralisé

$$N = Z - P$$

Critère de Nyquist généralisé

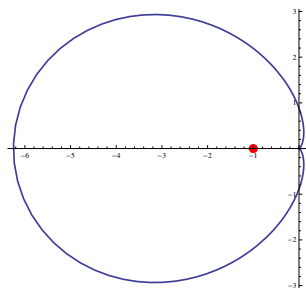
$$\Gamma = \pm j\omega$$



$$\frac{KG}{(s+1)(s-2)(s+3)(s+4)}$$

KG
 $\longrightarrow$
 150

$$K(j\omega)G(j\omega)$$



Exemple : bille sur une roue

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 0.1}$$

Régulateur

$$K(s) = K(1 + 4s)$$

Exemple : bille sur une roue

Nombre de pôles instables en boucle ouverte

- 1 pôle instable $p_1 = \sqrt{0.1}$. Ainsi $P = 1$

Le critère de stabilité de Nyquist généralisé détermine N

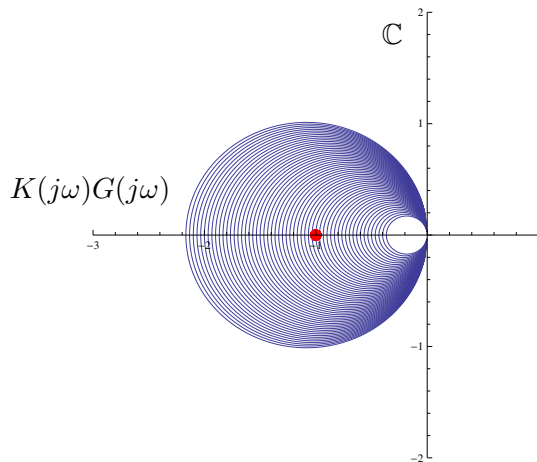
- $P = 1$ (1 pôle instable en boucle ouverte)
 $Z = 0$ (0 pôles de la boucle fermées dans $\mathbb{C}_+$)
 Calculons N (le nombre de tours autour de -1).

$$\begin{aligned} N &= Z - P \\ -1 &= 0 - 1 \end{aligned}$$

- $K(j\omega)G(j\omega)$ doit encercler le point -1 une fois pour assurer la stabilité en boucle fermée

Exemple : bille sur une roue

Au fur et à mesure que K augmente...



Une transformation méromorphe artistique

Etoile à N branches $\rightarrow$ transformation méromorphe

$$s = 1 + 0.2 \cos(N\omega) \quad \longrightarrow \quad \frac{\sin(s)}{1.9+s}$$

$$N = 1, 2, 3, 4, \dots, 70 \quad \omega \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\sin(220 e^{j\omega} (1 + 0.2 \cos(N\omega)))}{1.9 + e^{j\omega} (1 + 0.2 \cos(N\omega))}$$

