Introduction à la commande des systèmes dynamiques
10. observabilité et gouvernabilité

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Contenu

Définitions

Soit la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \quad (1) \\ y &= Cx \quad (2) \end{aligned}$$

Définitions

observabilité

Le système (1-2) est dit observable si quelque soit $T > 0$, il soit possible en connaissant l'entrée $\{u(t)\}$ pour $t \in [0; T]$ et la sortie $\{y(t)\}$ pour $t \in [0; T]$ de reconstruire la condition initiale $x(0)$.

gouvernabilité

Le système (1) est dit gouvernable si quel que soit T, quelle que soit la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et quelle que soit la condition terminale $x_T \in \mathbb{R}^n$, il soit possible de trouver une entrée $\{u(t)\}$ pour $t \in [0; T]$ telle que la trajectoire d'état $\{x(t)\}$ satisfasse $x(T) = x_T$ lorsque l'état est placé à la condition initiale $x(0) = x_0$

Critères

Thm. observabilité

Le système (1-2) est observable, si, et seulement si,

$$\text{rang } \mathcal{O} = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Thm. gouvernabilité

Le système (1) est gourvernable, si, et seulement si,

$$\text{rang } \mathcal{C} = \text{rang} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

Fonction de transfert et changement de coordonnées

Fonction de transfert

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Changement de coordonnées

$$z = Px$$

Fonction de transfert et changement de coordonnée

Système équivalent

$$\begin{aligned} \dot{z} &= PAP^{-1}\, z + PB\, u = \bar{A}z + \bar{B}u \\ y &= CP^{-1}z = \bar{B}z \end{aligned}$$

Correspondances

$$\begin{aligned} \bar{A} &= PAP^{-1} \\ \bar{B} &= PB \\ \bar{C} &= CP^{-1} \end{aligned}$$

Même fonction de transfert

En effet... $I = PP^{-1}$...

$$\begin{aligned} G(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} \\ &= CP^{-1}(sPP^{-1} - (PAP^{-1}))^{-1}PB \\ &= CP^{-1}P^{-1}(sI - A)^{-1}P^{-1}PB \\ &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

Formes canoniques

Polynôme caractéristique

$$\lambda(A) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n$$

Forme canonique observable

$$\begin{aligned} A_o &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \\ C_o &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Formes canoniques

Polynôme caractéristique

$$\lambda(A) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n$$

Forme canonique gouvernable

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formes canoniques

Sans perte de généralité $n = 3$

La forme canonique observable garantit l'observabilité

$$\text{rang}\begin{pmatrix} C_o \\ C_oA_o \\ C_oA_o^2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & ☺ \\ 1 & ☺ & ☺ \end{pmatrix} = 3 = n$$

☺ $\equiv$ un nombre qui n'a pas d'importance... ne change pas le résultat

Formes canoniques

Sans perte de généralité $n = 3$

La forme canonique gouvernable garantit la gouvernabilité

$$\text{rang}\begin{pmatrix} B_c & A_cB_c & A_c^2B_c \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & ☺ \\ 1 & ☺ & ☺ \end{pmatrix} = 3 = n$$

☺ $\equiv$ un nombre qui n'a pas d'importance... ne change pas le résultat

Régulateur d'état

Définition du régulateur d'état

$$u = -Kx$$

Transforme la matrice A en une nouvelle matrice $\bar{A} = A - BK$

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x = \bar{A}x$$

Possibilité de changer les valeurs propres

$$\lambda(\bar{A}) = (s - \bar{\lambda}_1)(s - \bar{\lambda}_2) \dots (s - \bar{\lambda}_n)$$

Régulateur d'état pour la forme gouvernable

Comment choisir K_c dans le régulateur $u = -K_c z$?

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c\, z + B_c\, u \\ u &= -K_c\, z \end{aligned}$$

Polynôme caractéristique initial (par. ex. instable)

$$\lambda(A_c) = \lambda(A) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

Choisir K_c pour avoir le polynôme caractéristique (par. ex. stable)

$$\lambda(\bar{A}) \quad = \quad \lambda^3 + \bar{a}_1\lambda^2 + \bar{a}_2\lambda + \bar{a}_3$$

Régulateur d'état pour la forme gouvernable

Calcul de K_c...

$$
\begin{aligned}
K_c &= \begin{pmatrix} k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} \end{pmatrix} \\
\bar{A} &= A_c - B_c K_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{c1} - a_3 & -k_{c2} - a_2 & -k_{c3} - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\bar{a}_3 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \\
K_c &= \begin{pmatrix} \bar{a}_3 - a_3 & \bar{a}_2 - a_2 & \bar{a}_1 - a_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Correspondances des matrices de gouvernabilité

$P = \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}$... en effet ...

$$\begin{aligned}
Az &= Px \\
\mathcal{C}_c &= \begin{pmatrix} B_c & A_c B_c & A_c^2 B_c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} PB & (PAP^{-1})PB & (PAP^{-1}P)(PAP^{-1})PB \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} PB & PAB & PA^2B \end{pmatrix} \\
&= P \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \\
&= P\mathcal{C}
\end{aligned}$$

Régulateur d'état pour une forme non canonique

On utilise le changement de coordonnées vers la forme canonique

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \qquad u = -Kx \\
\dot{z} &= P\dot{x} = PAP^{-1} + PBu \\
&= PAP^{-1} - PB(KP^{-1})z \\
&= A_c - B_c K_c z
\end{aligned}$$

Régulateur d'état

$$\begin{aligned}
K_c &= KP^{-1} \\
K &= K_c P \\
K &= \begin{pmatrix} \bar{a}_3 - a_3 & \bar{a}_2 - a_2 & \bar{a}_1 - a_1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}
\end{aligned}$$