Introduction à la commande des systèmes dynamiques
9. Synthèse dans le diagramme de Bode

Dr. Ph. Mullhaupt

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

SIE

Programme :

Nyquist: 1. marge de gain, pulsation ω_c critique.
marge de phase, pulsation de croisement ω_x

2. Diagramme de Bode
régime harmonique.

la règle d'or de la synthèse

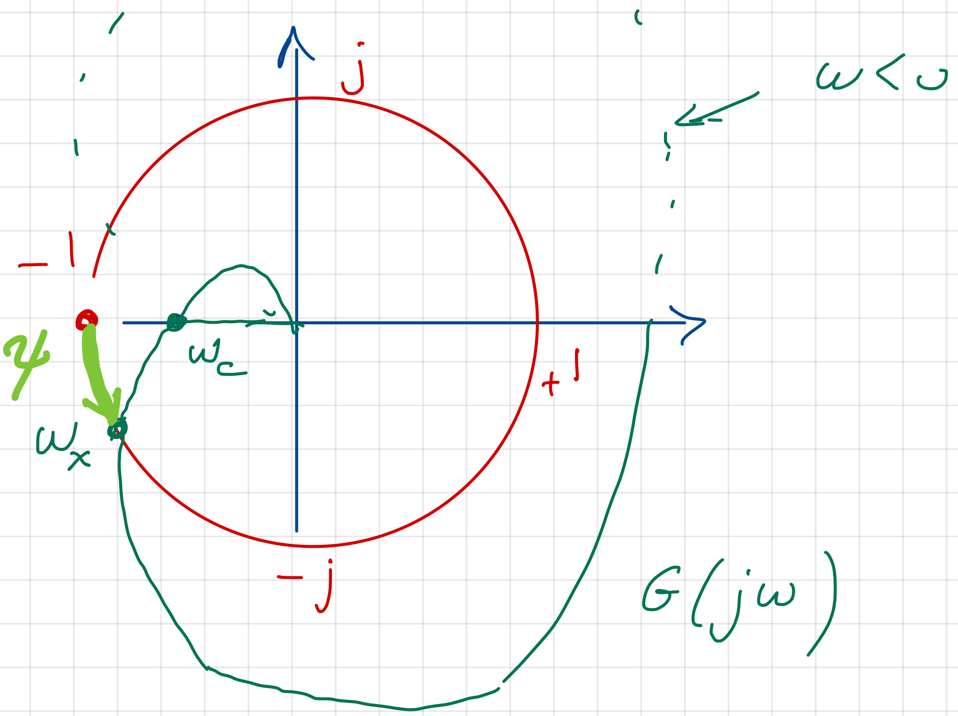
3. Expérience Matlab.

---

1. marges

$G(j\omega_c) \in \mathbb{R}$ par définition

$G(j\omega_c) = -a$



Définition: La marge de gain $\gamma = 1/a$

= gain limite K_p avant d'encerclar -1.

$$K_{p_{limite}} = \gamma = \frac{1}{a}.$$

marge de phase : φ

Définition : argument entre -1 et le point complexe $G(j\omega_x) \in \mathbb{C}$

ω_x : pulsation de croisement est définie par

$$|G(j\omega_x)| = 1$$

$$e^{-sT} G(s) \longleftrightarrow g(t-T)$$

retard introduit une rotation du diagramme de Nyquist localement autour de ω_x.

Rappel $|e^{-j\omega T}| = 1$, $\forall \omega$.

à ω_x on a $e^{-j\omega_x T} \in \mathbb{C}$ qui tourne le $G(j\omega_x)$

Contenu

1. Signaux sinusoïdaux complexes
2. Les deux opérateurs fondamentaux
   - L'opérateur dérivée
   - L'opérateur intégral
3. La fonction de transfert harmonique $G(j\omega)$
4. Représentation dans le diagramme de Bode
5. Lien entre le diagramme de Bode et le diagramme de Nyquist
6. Synthèse dans le diagramme de Bode (asservissement uniqu.)
   - Règle fondée sur le critère de Nyquist simplifié

Classe de signaux

Somme finie de signaux périodiques complexes

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i e^{j\omega_i t + \phi_i} \qquad a_i \in \mathbb{C} \qquad s(t) \in \mathbb{C}$$

Remarques

exemple : $s(t) = \sin(t) = \frac{1}{2j} e^{+j\omega t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t}$

$\cos(t) = \frac{1}{2} e^{+j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t}$

- Les signaux sont périodiques
- Les signaux sont complexes
- Ils commencent en $-\infty$ et se terminent en $+\infty$
- Grâce au principe de superposition, la réponse à travers un système linéaire à temps invariant est la superposition de la réponse à chaque sinusoïde $a_i e^{j\omega_i t + \phi_i}$ séparée

Onde sinusoïdale complexe fondamentale

Un signal fondamental

$$a(t) = ae^{j\omega t+\phi}$$

L'opérateur dérivée $\hat{\mathfrak{d}}$

La dérivée $\hat{\mathfrak{d}} = \frac{d}{dt}$

On dérive le signal

$$\frac{d}{dt} a e^{j\omega t + \phi} = j\omega a e^{j\omega t + \phi}$$

On peut donc définir

$$\hat{\mathfrak{d}}(a(t)) := j\omega a(t)$$

L'opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$ agit par multiplication simple uniquement sur un signal sinusoïdal complexe fondamental $a(t) = a e^{j\omega t + \phi}$.

L'opérateur intégral $\hat{\imath}$

L'intégrale indéfinie $\hat{\imath} = \int$

On calcule la primitive du signal

$$\int ae^{j\omega\tau+\phi}d\tau = \frac{1}{j\omega}ae^{j\omega t+\phi}$$

On peut donc définir l'action de l'opèrateur $\hat{\imath}$ sur un signal sinusoïdal complexe fondamental $a(t)$

$$\hat{\imath}(a(t)) := \frac{1}{j\omega}a(t)$$

Action sur une somme de fonctions sinusoïdales complexes

Signal

$$a(t) = \sum_{i=i}^{N} a_i e^{j\omega_i t + \phi_i}$$

Opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$

$$\hat{\mathfrak{d}}(a(t)) = \sum_{i=1}^{N} j\omega_i a_i e^{j\omega_i t + \phi_i}$$

Opérateur $\hat{\mathfrak{i}}$

$$\hat{\mathfrak{i}}(a(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{j\omega_i} a_i e^{j\omega_i t + \phi_i} = \frac{1}{\hat{\mathfrak{d}}}(a(t))$$

Fonction de transfert harmonique $G(j\omega)$

Fonction de transfert générale

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$Y(s)\,(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) = U(s)\,(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m)$$

Signal fondamental et opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$

$$a(t) = a e^{j\omega t + \phi} \qquad s \leftrightarrow \hat{\mathfrak{d}}$$

$$y(t)\,((j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \cdots) = u(t)\,(b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_m)$$

Opérateur $\hat{\mathfrak{d}}$

$$\frac{b_0 \hat{\mathfrak{d}}^m + b_1 \hat{\mathfrak{d}}^{m-1} + \ldots + b_m}{\hat{\mathfrak{d}}^n + a_1 \hat{\mathfrak{d}}^{n-1} + \ldots + a_n}$$

si phaseurs $\rightarrow \dfrac{y(t)}{u(t)}$

$$= \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{(j\omega)^n \cancel{s^n} + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Fonction de transfert harmonique

Signal fondamental

$$u(t) = ae^{j\omega t+\phi}$$

Fonction de transfert harmonique

$$G(s) \leftrightarrow G(j\omega)$$

Effet sur la sortie

$$y(t) = G(j\omega)u(t) = a\ |G(j\omega)|\ e^{j\omega+\phi+\arg(G(j\omega))}$$

$u(t) \in \mathbb{C}, \forall t$
$y(t) \in \mathbb{C}, \forall t$

Exemple

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 3}$$

Signal fondamental

$\omega = 1$ [rad/s]

$$u(t) = \sin(t)$$

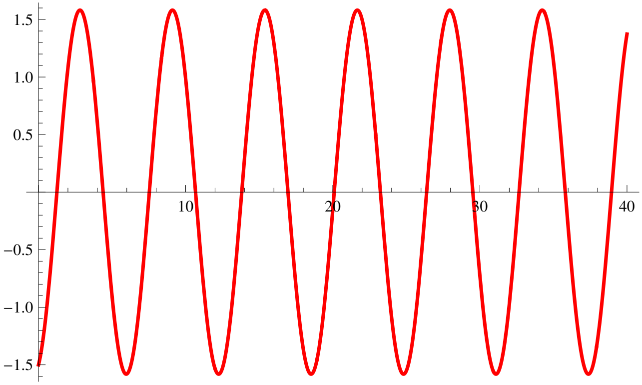
Fonction de transfert harmonique

$$\begin{aligned} G(j\overset{1}{\omega}) &= \frac{10}{3 - \omega^2 + 6j\omega} \\ G(j1) &= \frac{10}{2 + 6j} \end{aligned}$$

Exemple

Sortie correspondante

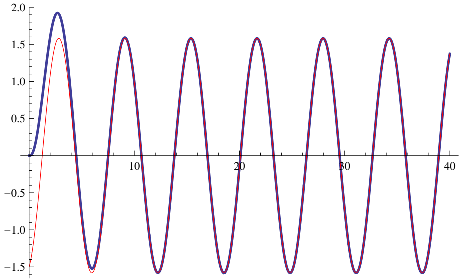
$$y(t) = |G(j)| \sin(t + \arg(G(j))) = \sqrt{5}2 \sin(t - \arctan(3)) = -\frac{3}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$$



Exemple

Comparaison avec la transformation de Laplace

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{s^2+6s+3}\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{12}\Big((9-4\sqrt{6})e^{(-3-\sqrt{6})t}+(9+4\sqrt{6})e^{(-3+\sqrt{6})t} \\ &\quad -18\cos(t)+6\sin(t)\Big) \end{aligned}$$

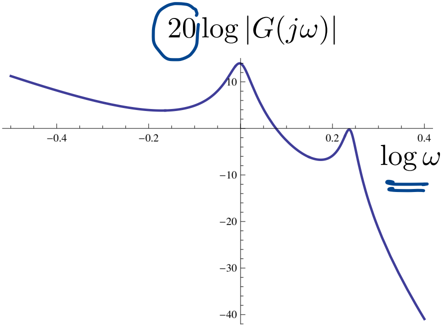


Le diagramme de Bode

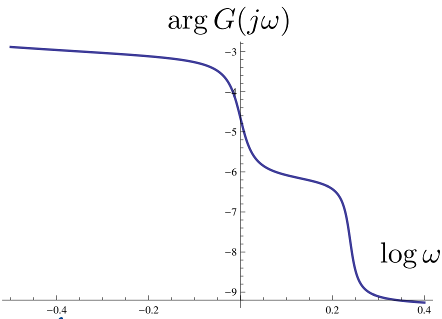
On représente $G(j\omega)$ par deux graphiques

[dB] $\quad 20 \log_{10} |G(j\omega)|$

Module



Argument

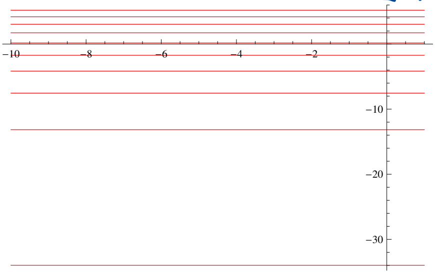


$\omega = 10^{-0,4}$ [rad/s].

Lien entre Bode et Nyquist

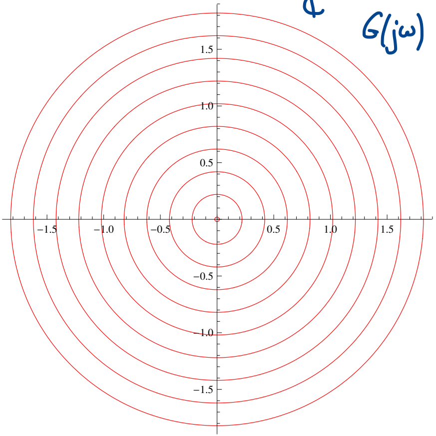
$20\log_{10}|G(j\omega)|$

Module constant dans Bode [dB]



Module constant dans Nyquist

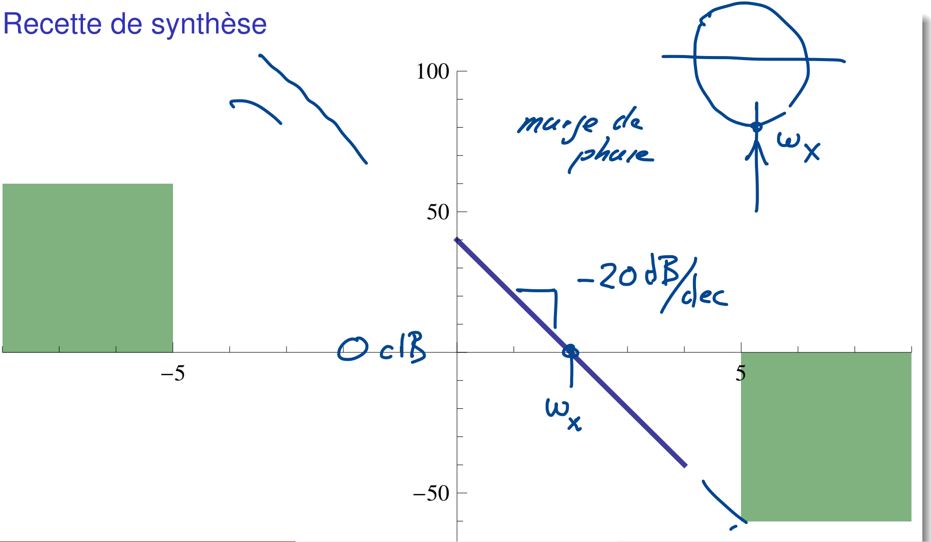
$\mathbb{C}$ $G(j\omega)$

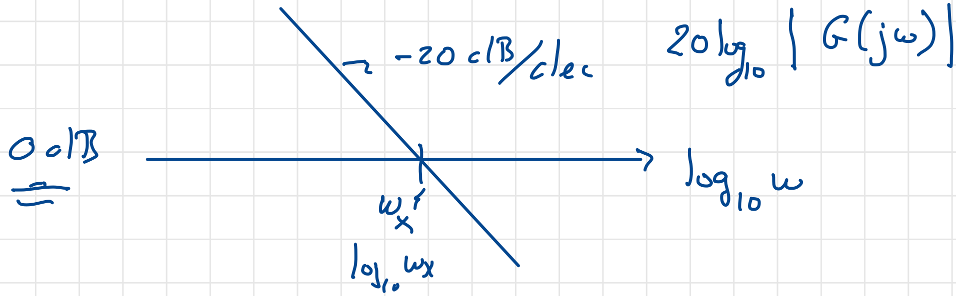


Synthèse en asservissement dans le diagramme de Bode

Fondé sur le critère de Nyquist simplifié

Recette de synthèse





$\longrightarrow$ B.O. ? $\quad G(s) = ?$

$\log_{10}$?

$s = j\omega$

$$|G(j\omega_x)| = 1 \qquad G(s) = \frac{1 \cdot \gamma}{s} \qquad 20 \log_{10} |G(j\omega_x)| = 0 \quad 0\,(dB)$$

$$0 = 20 \log_{10} \left| \frac{1 \cdot \gamma}{j\omega_x} \right| = 20 \log_{10} |\gamma| - 20 \log_{10} |\omega_x|$$

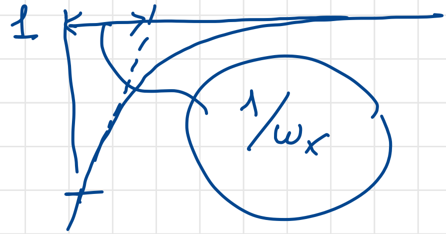
$$\gamma = \omega_x$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_x}{s}}$$

Question : B.F. lorsque $K(s) = 1$?

$$G_{B.F}^{y_c \to y} = \frac{KG}{1+KG} = \frac{1 \cdot \frac{\omega_x}{s}}{1 + \frac{\omega_x}{s}} = \frac{\omega_x}{s + \omega_x}$$

réponse indicielle en asservissement



$$\underset{y_c \to y}{G_{BF}(0)} = \frac{\omega_x}{\omega_x} = 1$$

pas de statisme

réponse impulsionnelle : $g(t) = e^{-t/\tau} = e^{-\omega_x \cdot t}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega_x}{s+\omega_x}\right) = e^{-\omega_x \cdot t}$$

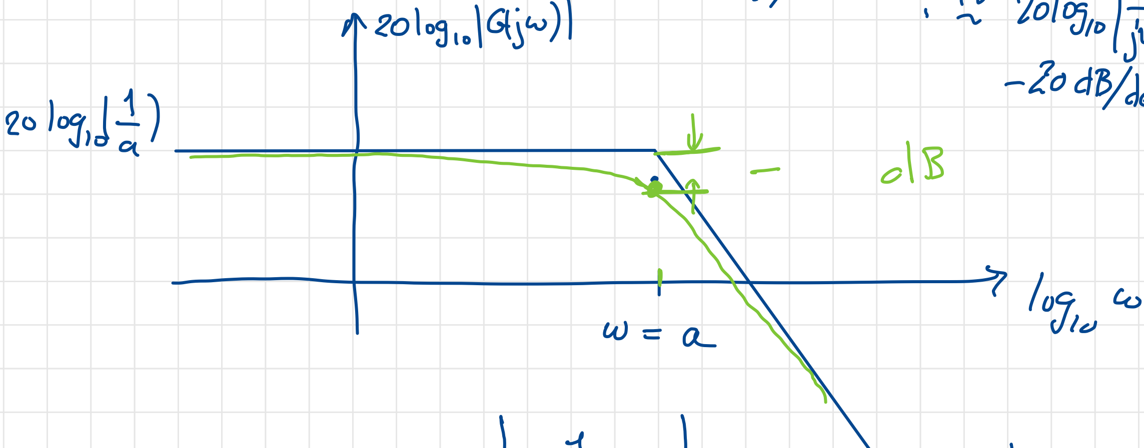
Bode de $\dfrac{1}{s+a}$

$$20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega + a} \right|$$

$\omega \ll a$? $\simeq 20\log_{10} \dfrac{1}{a}$

$\omega \gg a$? $\simeq 20\log_{10} \left| \dfrac{1}{j\omega} \right|$

-20 dB/decade



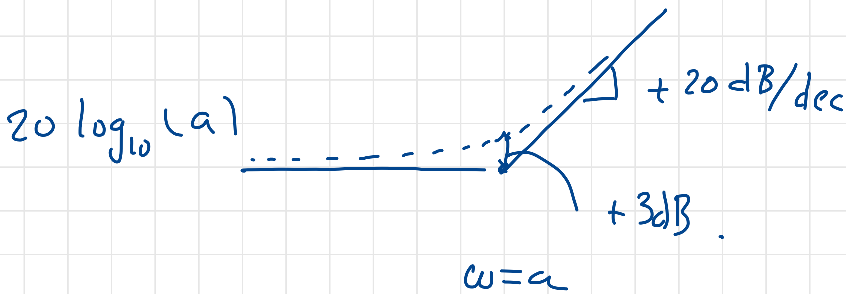
$\omega = a$ $\quad 20\log_{10} \left| \dfrac{1}{ja + a} \right| = 20\log_{10} \dfrac{1}{\sqrt{a^2+a^2}}$

$$20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{a}\right) = \underbrace{20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}}}_{?} + 20\log_{10}\frac{1}{a}$$

$-3{,}01\,[dB]$

$$\underline{\underline{-3\,[dB]}}$$

$s+a$ $\qquad$ $20\log_{10}\left|(j\omega+a)\right|$



$$G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

$p_i \in \mathbb{R}$

$z_i \in \mathbb{R}$.

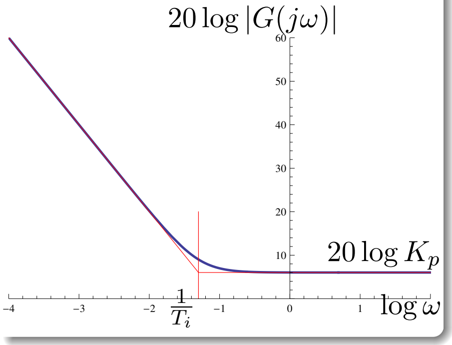
|| les logarithmes induisent à additionnez les graphiques ci-dessus.

Par exemple :

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|(j\omega+z_1)| + 20\log_{10}|j\omega+z_2| + 20\log_{10}|j\omega+z_3| - 20\log_{10}|j\omega+p_1| - 20\log_{10}|j\omega+p_2| - 20\log_{10}|j\omega+p_3|$$

Diagramme de Bode du régulateur PI

Module



Argument

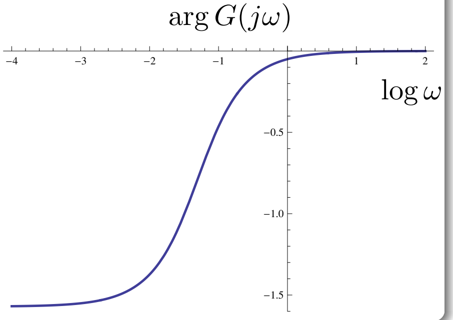
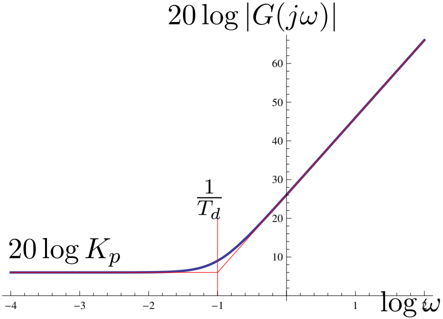


Diagramme de Bode du régulateur PD

Module



Argument