Nom : Müllhaupt **Prénom :** Philippe **Corrigé**

Introduction à la commande des systèmes dynamiques
SIE - EPFL

Examen 2021

Ens : Ph. Müllhaupt

Problème 1 (4 pts)

Calculer la transformée de Laplace des quantités suivantes :

$$f(t) = \epsilon(t)e^{-4t}\cos(4t+2) \tag{1}$$

$$g(t) = \epsilon(t)(t+1)e^{-2t}\cos(3t) \tag{2}$$

Indication : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Corrigé.

0.1 Partie A (1.5 pts)

En utilisant la première indication, la fonction devient (0.25 pt) :

$$f(t) = \epsilon(t)e^{-4t}\cos(4t+2) = \epsilon(t)e^{-4t}[\cos(4t)\cos(2) - \sin(4t)\sin(2)] \tag{3}$$

Qui peut se réécrire sous la forme :

$$f(t) = \epsilon(t)e^{-4t}\cos(4t)\cos(2) - \epsilon(t)e^{-4t}\sin(4t)\sin(2) \tag{4}$$

Des règles 7 et 8 du dictionnaire, nous savons que :

$$\mathcal{L}[\epsilon(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega t)] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\epsilon(t)e^{-\alpha t}(\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \tag{5}$$

Dans notre cas, nous obtenons ainsi (1 pt) :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \cos(2)\frac{s+4}{(s+4)^2+16} - \sin(2)\frac{4}{(s+4)^2+16} \tag{6}$$

Cette expression se met sous la forme (0.25 pt) :

$$F(s) = \frac{\cos(2)(4+s) - 4\sin(2)}{s^2+8s+32} \tag{7}$$

0.2 Partie B (2.5 pts)

En développant la multiplication, nous obtenons ainsi (0.25 pt) :

$$g(t) = \epsilon(t)te^{-2t}\cos(3t) + \epsilon(t)e^{-2t}\cos(3t) \tag{8}$$

De la règle 7 du dictionnaire, nous savons que :

$$\mathcal{L}[\epsilon(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega t)] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \tag{9}$$

En appliquant cette règle au second terme de la fonction, nous trouvons (0.5 pt) :

$$\mathcal{L}[\epsilon(t)e^{-2t}\cos(3t)] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{s^2+4s+13} \tag{10}$$

Pour calculer la transformée de Laplace, nous utilisons la règle 8 de la grammaire, avec $n = 1$ (0.25 pt) :

$$tg(t) = \frac{-dG(s)}{ds} \tag{11}$$

$G(s)$ ayant déjà été déterminé précédemment, nous pouvons calculer sa dérivée (0.5 pt) :

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s^2+4s+13}\right) = \frac{(s^2+4s+13)-(s+2)(2s+4)}{(s^2+4s+13)^2} \tag{12}$$

En développant le produit, nous obtenons finalement (0.25 pt) :

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2} \leftrightarrow \frac{-dG(s)}{ds} = \frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2} \tag{13}$$

En additionnant les deux transformées, nous trouvons ainsi (0.5 pt) :

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2} + \frac{s+2}{s^2+4s+13} \tag{14}$$

Mise sous le même dénominateur, l'expression devient :

$$G(s) = \frac{s^2+4s-5+(s+2)(s^2+4s+13)}{(s^2+4s+13)^2} = \frac{s^2+4s-5+s^3+6s^2+21s+26}{(s^2+4s+13)^2} \tag{15}$$

Qui se simplifie finalement sous la forme (0.25 pt) :

$$G(s) = \frac{s^3+7s^2+25s+21}{(s^2+4s+13)^2} \tag{16}$$

Problème 2 (4 pts)

Calculer la transformée de Laplace inverse des quantités suivantes :

$$F(s) = e^{-2s} \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 5s + 6} \tag{17}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} \tag{18}$$

Corrigé.

0.3 Partie A (2.25 pts)

Commençons par omettre le terme exponentiel. A l'aide d'une division polynômiale, nous obtenons (0.5 pt) :

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2 + 5x + 6 & x^2 + x + 1 \\ & -x^2 - 5x - 6 \\ \hline & -4x - 5 \end{array}$$

Notre fraction se réécrit donc sous la forme :

$$\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 5s + 6} = 1 + \frac{-4s - 5}{s^2 + 5s + 6} \tag{19}$$

En essayant successivement plusieurs valeurs, nous trouvons que $s = -2$ et $s = -3$ annulent le dénominateur. Ce dernier se factorise donc comme suit (0.25 pt) :

$$s^2 + 5s + 6 = (s + 2)(s + 3) \tag{20}$$

A l'aide de la décomposition en éléments simples, nous obtenons :

$$1 + \frac{-4s - 5}{(s + 2)(s + 3)} = 1 + \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3} \tag{21}$$

La valeur de A peut être obtenue à l'aide de la méthode des résidus (0.25 pt) :

$$A = \lim_{s \to -2} \frac{-4s-5}{s+3} = \frac{8-5}{-2+3} = \frac{3}{1} = 3 \tag{22}$$

La valeur de B peut également être obtenue à l'aide de la méthode des résidus (0.25 pt) :

$$B = \lim_{s \to -3} \frac{-4s-5}{s+2} = \frac{12-5}{-3+2} = \frac{7}{-1} = -7 \tag{23}$$

La transformée de Laplace inverse à calculer, sans le terme exponentiel, prend donc la forme :

$$F'(s) = 1 + \frac{3}{s+2} - \frac{7}{s+3} \tag{24}$$

Des règles 2 et 4 du dictionnaire, nous savons que :

$$\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(t) \qquad\qquad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+\alpha}] = \epsilon(t)e^{-\alpha t} \tag{25}$$

La transformée de Laplace inverse de cette expression s'exprime donc sous la forme (0.5 pt) :

$$f'(t) = \mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = \delta(t) + \epsilon(t)[3e^{-2t} - 7e^{-3t}] \tag{26}$$

Afin de tenir compte du décalage, la règle 5 de la grammaire indique que :

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)] = \epsilon(t-\tau)f(t-\tau) \tag{27}$$

En tenant compte de ce décalage, nous obtenons finalement la transformée de Laplace inverse suivante (0.5 pt) :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \delta(t-2) + \epsilon(t-2)[3e^{-2(t-2)} - 7e^{-3(t-2)}] \tag{28}$$

Qui peut se réécrire sous la forme :

$$f(t) = \delta(t-2) + \epsilon(t-2)[3e^{-2t+4} - 7e^{-3t+6}] \tag{29}$$

0.4 Partie B (1.75 pts)

En essayant successivement plusieurs valeurs, nous trouvons que $s = -1$ et $s = -2$ annulent le dénominateur. Ce dernier se factorise donc comme suit (0.25 pt) :

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 4 = (s+1)(s+2)^2 \tag{30}$$

A l'aide de la décomposition en éléments simples, nous obtenons ainsi :

$$\frac{s^2 + 2s + 4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \tag{31}$$

La valeur de A peut être obtenue à l'aide de la méthode des résidus (0.25 pt) :

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{s^2 + 2s + 4}{(s+2)^2} = \frac{1 - 2 + 4}{1} = \frac{3}{1} = 3 \tag{32}$$

La valeur de B peut être obtenue à l'aide de la méthode des résidus (0.5 pt) :

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2 + 2s + 4}{s+1}\right) = \lim_{s \to -2} \frac{s^2 + 2s - 2}{(s+1)^2} = \frac{4 - 4 - 2}{1} = \frac{-2}{1} = -2 \tag{33}$$

La valeur de C peut être obtenue à l'aide de la méthode des résidus (0.25 pt) :

$$C = \lim_{s \to -2} \frac{s^2 + 2s + 4}{s+1} = \frac{4 - 4 + 4}{-1} = \frac{4}{-1} = -4 \tag{34}$$

La transformée de Laplace inverse à calculer prend donc la forme :

$$G(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} \tag{35}$$

Des règles 4, et 12 du dictionnaire, nous savons que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha}\right] = \epsilon(t)e^{-\alpha t} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}\right] = \frac{\epsilon(t)t^n e^{-\alpha t}}{n!} \tag{36}$$

La transformée de Laplace inverse cherchée s'exprime donc sous la forme (0.5 pt) :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \epsilon(t)[3e^{-t} - 2e^{-2t} - 4te^{-2t}] \tag{37}$$

Problème 3 (7 pts)

Considérons un système dont l'entrée est une impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$.

1. Déterminer la fonction de transfert garantissant la sortie $y(t) = \frac{1}{2}\epsilon(t) - \frac{1}{2}e^{-6t}$ (1 pt).
2. Dimensionner un régulateur proportionnel dérivé (PD), tel que le système en boucle fermée d'asservissement ait deux pôles réels en -2 et -4. Donner la fonction de transfert en boucle fermée correspondante. Considérer $G(s) = \frac{3}{s(s+6)}$ si vous n'avez pas réussi le point précédent (2.5 pts).

Considérons maintenant la fonction de transfert $G(s) = \frac{10}{s^3+s^2-14s-24}$, bouclée par un régulateur proportionnel (P).

1. A l'aide du critère de Nyquist, d'eterminer par calcul - et non pas par la méthode graphique - le gain K_p minimum garantissant la stabilité de la boucle fermée. Pour vous aider, le tracé du diagramme de Nyquist est présenté à la Figure 1, où l'étoile symbolise le point (0,0) (3.5 pts).

NB : Cette question est indépendante des deux précédentes.

Corrigé.

0.5 Partie A (1 pt)

La relation liant l'entrée à la sortie est donnée par (0.25 pt) :

$$Y(s) = U(s)G(s) \leftrightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{38}$$

La transformée de Laplace de l'entrée est donnée par (0.25 pt) :

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \tag{39}$$

La transformée de Laplace de la sortie est donnée par (0.25 pt) :

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\frac{1}{2}\epsilon(t) - \frac{1}{2}e^{-6t}] = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+6)} = \frac{3}{s(s+6)} \tag{40}$$

La fonction de transfert garantissant une telle sortie est donc de la forme (0.25 pt) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{3}{s(s+6)}}{1} = \frac{3}{s(s+6)} \tag{41}$$

0.6 Partie B (2.5 pts)

Les deux pôles devant être en -2, et -4, le dénominateur de la nouvelle fonction de transfert s'exprime sous la forme (0.5 pt) :

$$(s+2)(s+4) = s^2 + 6s + 8 \tag{42}$$

La fonction de transfert en boucle fermée d'asservissement est donnée par (0.25 pt) :

$$G_{bf,y_c \to y} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \tag{43}$$

S'agissant d'un régulateur proportionnel dérivé, nous avons la relation suivante (0.25 pt) :

$$K(s) = K_p(1 + sT_d) \tag{44}$$

L'équation (43) devient donc (0.25 pt) :

$$G_{bf,y_c \to y} = \frac{K_p(1 + sT_d)G(s)}{1 + K_p(1 + sT_d)G(s)} \tag{45}$$

En injectant la valeur de $G(s)$, nous obtenons (0.25 pt) :

$$G_{bf,y_c \to y} = \frac{K_p(1 + sT_d)\frac{3}{s(s+6)}}{1 + K_p(1 + sT_d)\frac{3}{s(s+6)}} \tag{46}$$

Qui peut se réécrire sous la forme :

$$G_{bf,y_c \to y} = \frac{3K_p(1 + sT_d)}{s^2 + 6s + 3K_p(1 + sT_d)} \tag{47}$$

En égalisant le dénominateur de l'équation (47) avec l'équation (42), nous obtenons (0.25 pt) :

$$s^2 + 6s + 8 = s^2 + s(6 + 3K_pT_d) + 3K_p \tag{48}$$

Par inspection directe, nous trouvons que $K_p = \frac{8}{3}$ (0.25 pt). En remplaçant cette valeur dans (48), l'équation en s devient :

$$6s = s(6 + 3\frac{8}{3}T_d) \leftrightarrow 6s = s(6 + 8T_d) \tag{49}$$

En résolvant ce système, nous obtenons finalement $T_d = 0$ (0.25 pt). La fonction de transfert en boucle fermée d'asservissement s'exprime donc sous la forme (0.25 pt) :

$$G_{bf,y_c \to y} = \frac{3\frac{8}{3}(1 - 0s)}{s^2 + 6s + 8} = \frac{8}{s^2 + 6s + 8} \tag{50}$$

Remarque : T_d prenant une valeur nulle, le régulateur utilisé n'est finalement qu'un "simple" régulateur proportionnel.

0.7 Partie C (3.5 pts)

En essayant successivement plusieurs valeurs, nous trouvons que les pôles de la fonction de transfert sont $s_1 = -2$, $s_2 = -3$ et $s_3 = 4$ (0.25 pt). Le pôle s_3 ayant une partie réelle positive, le système est donc instable (0.25 pt).

Le système possédant un pôle instable en boucle ouverte, nous avons $P = 1$ (0.25 pt) Comme nous ne souhaitons aucun pôle instable en boucle fermée, nous imposons $Z = 0$ (0.25 pt). A l'aide du critère de Nyquist généralisé, nous obtenons ainsi :

$$N = Z - P = 0 - 1 = -1 \tag{51}$$

$K_p G(j\omega)$ doit donc entourer une fois le point -1 (0.25 pt).

Afin de déterminer le gain maximum K_p, il faut calculer l'intersection de $G(j\omega)$ avec l'axe réel, autrement dit quand la partie imaginaire vaut zéro (0.25 pt). Dans notre cas, nous avons (0.5 pt) :

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 - 14j\omega - 24} = \frac{10}{-j\omega^3 - \omega^2 - 14j\omega - 24} \tag{52}$$

La partie imaginaire est nulle lorsque la partie imaginaire du dénominateur vaut zéro, autrement dit si (0.25 pt) :

$$-\omega^3 - 14\omega = -\omega(\omega^2 + 14) = 0 \tag{53}$$

Ceci se produit lorsque $\omega = 0$, ainsi que lorsque $\omega = \pm\sqrt{14}$ (0.25 pt).

La partie réelle est la plus négative lorsque $\omega = 0$ (0.25 pt). En insérant cette valeur, nous obtenons (0.25 pt) :

$$G(j0) = \frac{10}{-(0)^2 - 24} = \frac{10}{-24} = -\frac{5}{12} \tag{54}$$

Ainsi, le gain limite avant d'encercler le point -1 est donné par $K_p \frac{5}{12} = 1 \leftrightarrow K_p = \frac{12}{5}$ (0.25 pt). Afin de garantir la stabilité en boucle fermée, il faut donc imposer $K_p > \frac{12}{5}$ (0.25 pt).

Problème 4 (7 pts)

Un écosystème comporte deux espèces dont la densité de la première espèce est représentée par la variable x_1 et celle de la seconde par la variable x_2. Un modéle de la dynamique est donné par le système d'équations différentielles non linéaires suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a\,x_1 + b_1\,x_1 x_2 && (55) \\ \dot{x}_2 &= +r\,x_2 - b_2\,x_1 x_2 + u && (56) \end{aligned}$$

On peut agir sur l'évolution de la densité de la seconde population par l'entremise de l'entrée u. (Application numérique $a = 1$, $r = 2$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$.)

En absence d'entrée $u = 0$, on remarque plusieurs points d'équilibre, par exemple

I. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$

II. $\bar{x}_1 = \frac{r}{b_2}$, $\bar{x}_2 = \frac{a}{b_1}$

Ceci a été vu au cours (renards - lapins).

1. Linéariser la dynamique autour du point d'équilibre II. pour obtenir une matrice A en fonction de a, b_1, b_2 et r.
2. Déterminer la fonction de transfert résultante $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ en fonction de a, b_1, b_2 et r si on pose comme sortie $y = x_2 - \bar{x}_2 = x_2 - \frac{a}{b_1} = \Delta x_2$.
3. Déterminer la fréquence d'oscillation de la population x_2 (lapins).
4. Proposer une stratégie de commande u pour déplacer le point d'équilibre sans changer la fréquence de l'oscillation. Justfifier votre réponse. Est-ce qu'il est possible de modifier le point d'équilibre dans tout le plan x_1, x_2 ?
5. Proposer un régulateur pour changer la fréquence d'oscillation pour la doubler. On mesure x_2. (INDICATION : utiliser un régulateur proportionnel, le gain pouvant être négatif, i.e. feedback positif.)
6. Proposer un observateur de la dynamique linéarisée pour estimer la population x_1 (renards) qui ne mesure que x_2 (lapins). Donner les équations différentielles de l'observateur sans calculer les gains de celui-ci.

Corrigé.

1. Linéarisation.

En posant $\Delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$ et $\Delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$ avec $\bar{x}_1 = \frac{r}{b_2} = 4$ et $\bar{x}_2 = \frac{a}{b_1} = 2$, on a en posant $f_1 = -ax_1 + b_1 x_1 x_2$ et $f_2 = rx_2 - b_2 x_1 x_2$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\Delta} x_1 \\ \dot{\Delta} x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x_1=-\frac{r}{b_2}, x_2=\frac{a}{b_1}} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a + b_1 x_2 & b_1 x_1 \\ -b_2 x_2 & r - b_2 x_1 \end{pmatrix}_{x_1=\frac{r}{b_2}, x_2=\frac{a}{b_1}} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & r\frac{b_1}{b_2} \\ -a\frac{b_2}{b_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Fonction de transfert.

Avec $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1} B \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -r\frac{b_1}{b_2} \\ a\frac{b_2}{b_1} & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 + ar} \begin{pmatrix} s & r\frac{b_1}{b_2} \\ -a\frac{b_2}{b_1} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{s}{s^2 + ar} = \frac{s}{s^2 + 2}
\end{aligned}$$

3. Fréquence d'oscillation.

La réponse impulsionnelle donne le contenu fréquentiel (par principe de superposition la sortie sera la convolution avec celle-ci)

$$\begin{aligned}
\frac{s}{s^2 + \omega^2} &\leftrightarrow \cos(\omega t) \\
\frac{s}{s^2 + 2} &\leftrightarrow \cos(\sqrt{2} t)
\end{aligned}$$

La fréquence est $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = 0.225$ [Hz]. Evidemment les unités des valeurs numériques ne sont pas les bonnes, car cela ne donne pas de sens au niveau écologique.

4. Changement du point d'équilibre à l'aide de u.

Si on introduit une constante pour u, disons $u = \bar{u} \in \mathbb{R}$, on peut changer le point d'équilibre.

$$
\begin{aligned}
0 &= -ax_1 + b_1 x_1 x_2 && (57)\\
0 &= rx_2 - b_2 x_1 x_2 + \bar{u} && (58)
\end{aligned}
$$

En résolvant (57) pour x_2, on a soit $x_1 = 0 = x_2 = 0$ ce qui entraîne $u = 0$, soit

$$x_2 = \frac{a}{b_1}$$

En introduisant cette valeur dans (58) on trouve

$$ar - b_2 a x_1 + b_1 \bar{u} = 0$$

On peut donc choisir $x_1 \in \mathbb{R}$ comme on veut et cela détermine le $\bar{u}$ à appliquer

$$\bar{u} = a\frac{b_2}{b_1}x_1 - \frac{a\,r}{b_1}$$

REMARQUE : dans cette partie du corrigé, on a utilisé x_1 et x_2 pour désigner $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$, les valeurs de l'équilibre.

5. Doublement de la fréquence par rétro-action.

On constate que la pulsation est donnée par $\omega = \sqrt{ar}$. Ainsi si on peut modifier a ou r par rétroaction, alors on peut changer la fréquence. Comme l'entrée est sur la seconde équation (56), si on mesure la densité de lapins x_2, on peut modifier le r par rétro-action proportionnelle à x_2 en posant $u = -k_p x_2$. Cela donnera

$$\omega_2 = \sqrt{a(r - k_p)} = 2\sqrt{2}$$

avec $a = 1$ et $r = 2$ et en voulant le double de la pulsation (donc $2\sqrt{2}$)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2 - k_p} &= 2\sqrt{2}\\
2 - k_p &= 8\\
k_p &= -6
\end{aligned}
$$

Ainsi, il faut une rétro-action positive pour accélér le taux de reproduction des lapins

$$u = 6x_2$$

6. Observateur pour déterminer la population de renards x_1.

L'observateur est donné par la structure vue au cours qui prend la forme suivante en copiant la dynamique du système linéarisé :

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x_1} &= r\frac{b_1}{b_2}\Delta x_2 + l_1(\Delta x_2 - \hat{\Delta x_2}) \\ \dot{\Delta x_2} &= -a\frac{b_2}{b_1}\Delta x_1 + l_2(\Delta x_2 - \hat{\Delta x_2}) + u\end{aligned}$$

Pour obtenir l'estimée des renards $\hat{x}_1$, il faut décaler l'estimée $\hat{\Delta} x_1$ de la valeur d'équilibre $\bar{x}_1$:

$$\hat{x}_1 = \hat{\Delta x_1} + \bar{x}_1 = \hat{\Delta x_1} + \frac{r}{b_2} = \hat{\Delta x_1} + 4$$

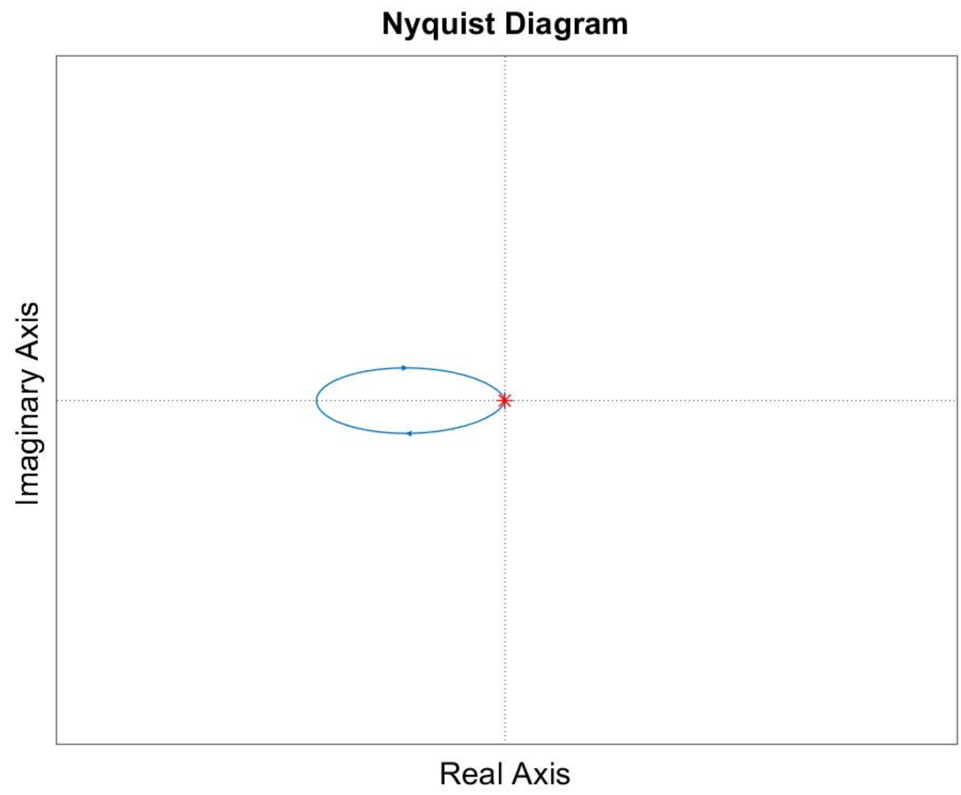

FIGURE 1: Diagramme de Nyquist