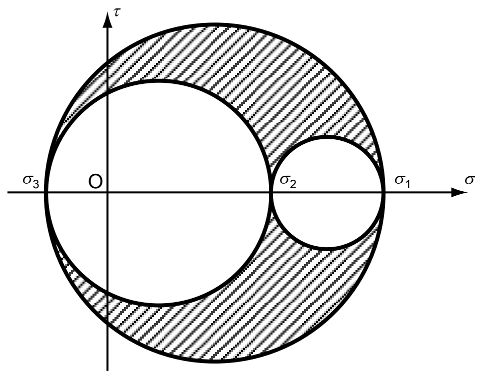
Mécanique des structures



Chapitre 0 : Introduction

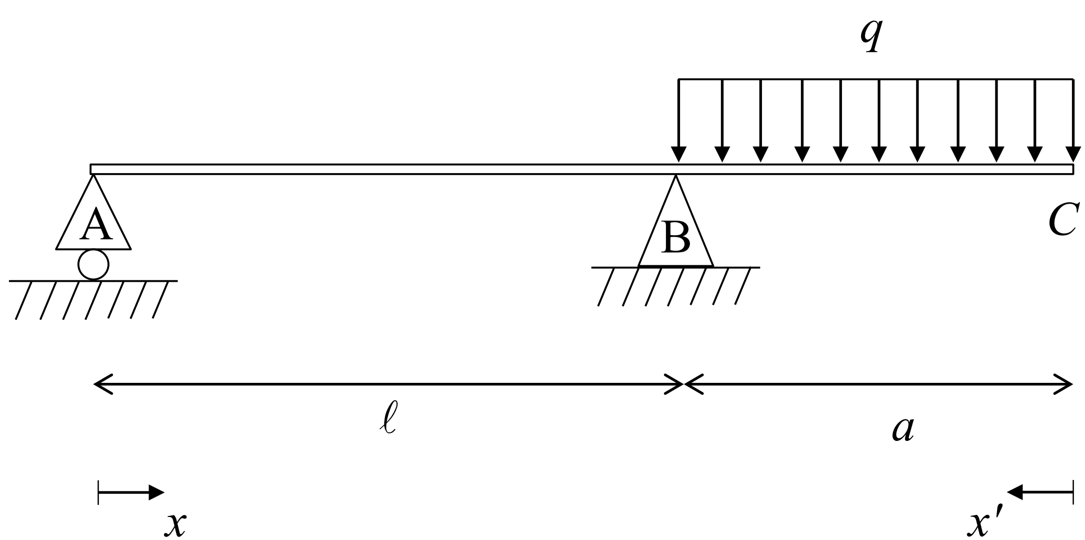
Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3
EPFL

Problème 0.1

Calculer les réactions aux appuis de la poutre schématisée ci-contre, puis dessiner les diagrammes T et M des efforts intérieurs.

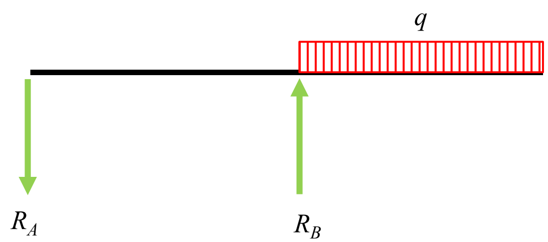
Application :

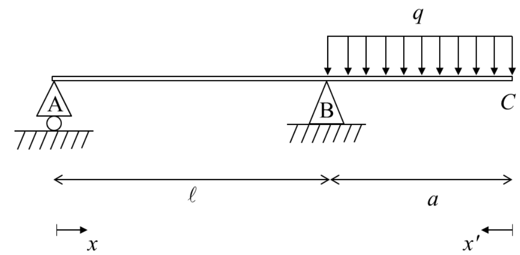
a = 1 m
ℓ = 2 m
q = 5 kN / m



Problème 0.1

Schéma

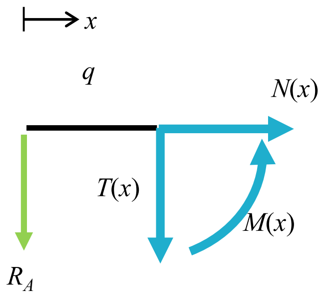


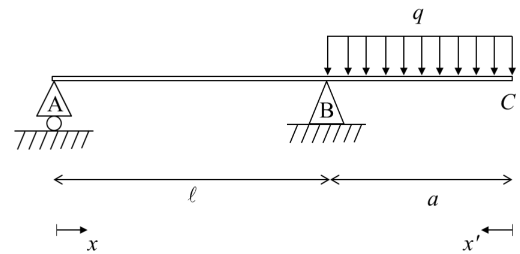


Equilibre des forces et des moments

- ΣF $\quad R_B = q\,a + R_A$
- ΣM_B $\quad R_A \ell = \int_0^a q\,x\,dx = \dfrac{q\,a^2}{2}$
- → $\quad R_A = \dfrac{q\,a^2}{2\ell} = 1250$ N
- → $\quad R_B = q\,a + R_A = 6250$ N

Efforts intérieurs tronçon AB

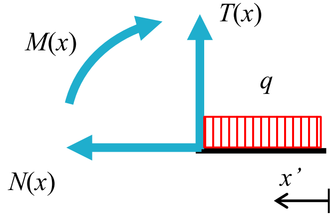




- $N(x) = 0$
- $T(x) = -R_A = -1250\ N$
- $M(x) = -R_A x = -1250x\ Nm$

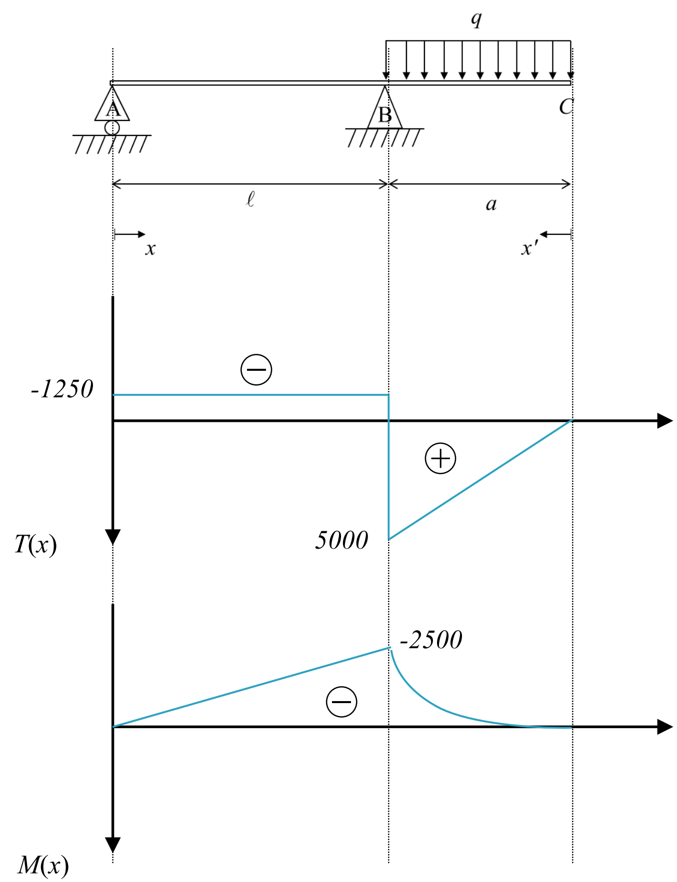
- $M(x = \ell) = -R_A \ell = -2500\ Nm$

Efforts intérieurs tronçon AB



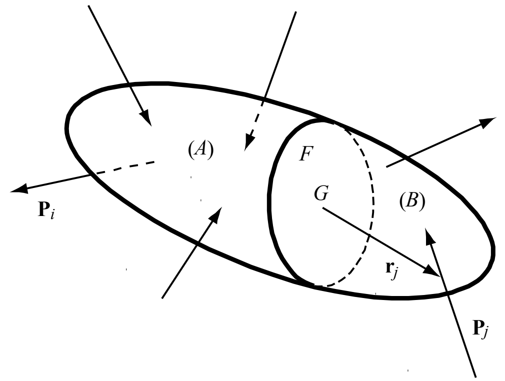
- $N(x') = 0$
- $T(x') = qx' = 5000x'\ N$
- $M(x') = -\frac{1}{2}qx'^2 = -2500\ x'^2\ Nm$

Diagrammes des efforts →



Merci pour vote attention

Mécanique des structures



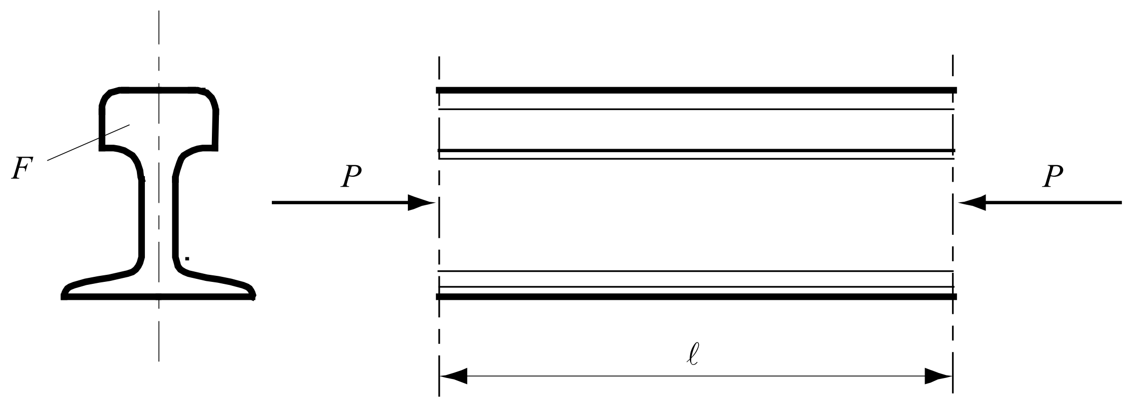
<u>Chapitre 1</u> : Equilibre intérieur d'un solide

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3
EPFL

Problème 1.1

Calculer la contrainte et la force dans un long rail soudé soumis à un écart de température de $\Delta\theta = \pm\, 50\ ^\circ$C

Section	$F = 75$ cm^2
Module	$E = 2.1 \times 10^{-11}$ Pa $= 210$ GPa
Coeff. therm.	$\alpha = 12 \times 10^{-6}$ /°C



Les allongements thermiques et mécaniques se compensent

- $\Delta\theta\ \alpha\ \ell + \frac{\sigma}{E} = 0$

On en tire la contrainte σ

- $\sigma = \Delta\theta\ \alpha\ E$

La loi de Hooke lie la contrainte et la force

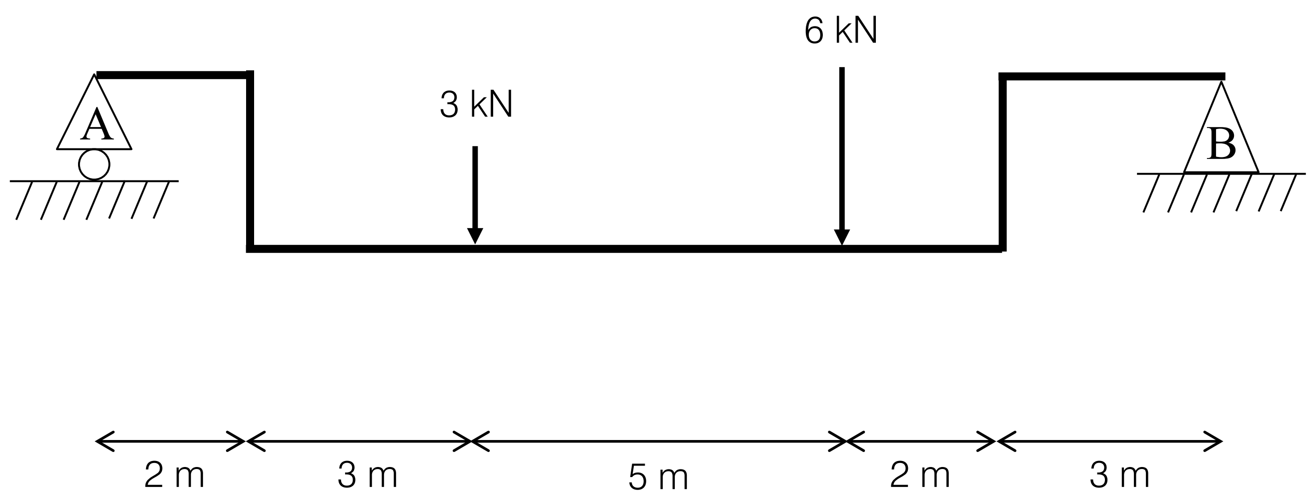
- $P = F\ \sigma$

On trouve alors les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta\theta = +50°\mathrm{C}$ $\sigma = -126\ MPa$ $P = -945\ kN$ (compression)
- $\Delta\theta = -50°\mathrm{C}$ $\sigma = +126\ MPa$ $P = +945\ kN$ (traction)

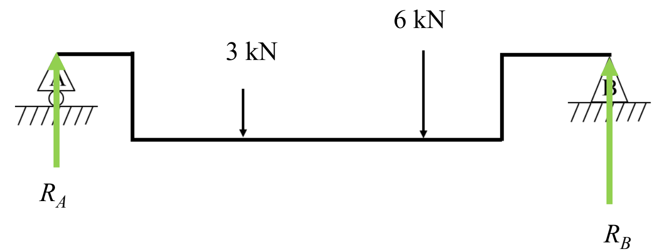
Problème 1.2

Calculer les réactions R_A et R_B pour le système ci-dessous, puis représenter les diagrammes des efforts intérieurs N (effort normal), T (effort tranchant), et M (moment fléchissant), en indiquant les valeurs particulières.



Problème 1.2

Schéma →



Équations d'équilibre

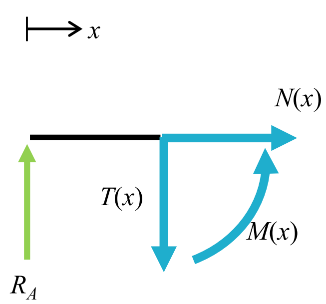
- ΣM_A $\quad 3kN \times 5m + 6kN \times 10m - R_B \times 15m = 0$

  → $\quad R_B = \frac{75}{15} = 5\ kN$

- ΣM_A $\quad 6kN \times 5m + 3kN \times 10m - R_A \times 15m = 0$

  → $\quad R_A = \frac{60}{15} = 4\ kN$

Efforts intérieurs



Problème 1.2

Tronçon AB

- $N(x) = 0$
- $T(x) = R_A = 4\ kN$
- $M(x) = R_A\ x = 4\ x$

Tronçon BC

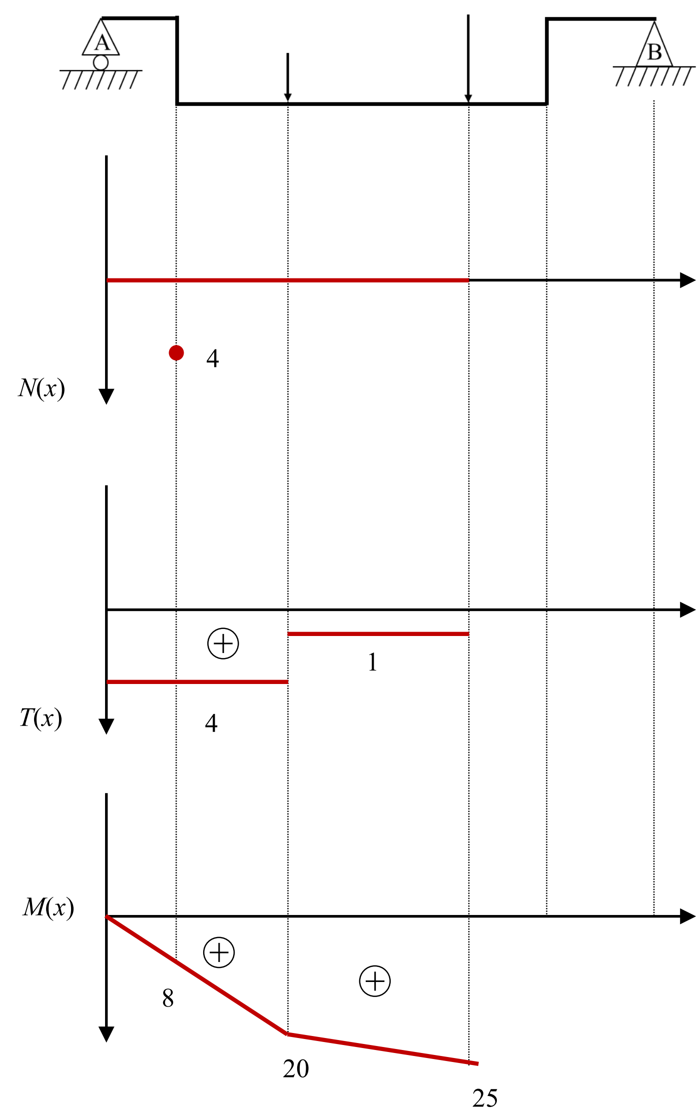
- $N(x) = R_A$
- $T(x) = 0$
- $M(x) = 2R_A = 8\ kNm$

Tronçon CD

- $N(x) = 0$
- $T(x) = R_A = 4\ kN$
- $M(x) = R_A\ x = 4\ x$

Tronçon DE

- $N(x) = 0$
- $T(x) = R_A - 3 = 1\ kN$
- $M(x) = R_A\ x - 3(x - 5)$



Tronçon EF

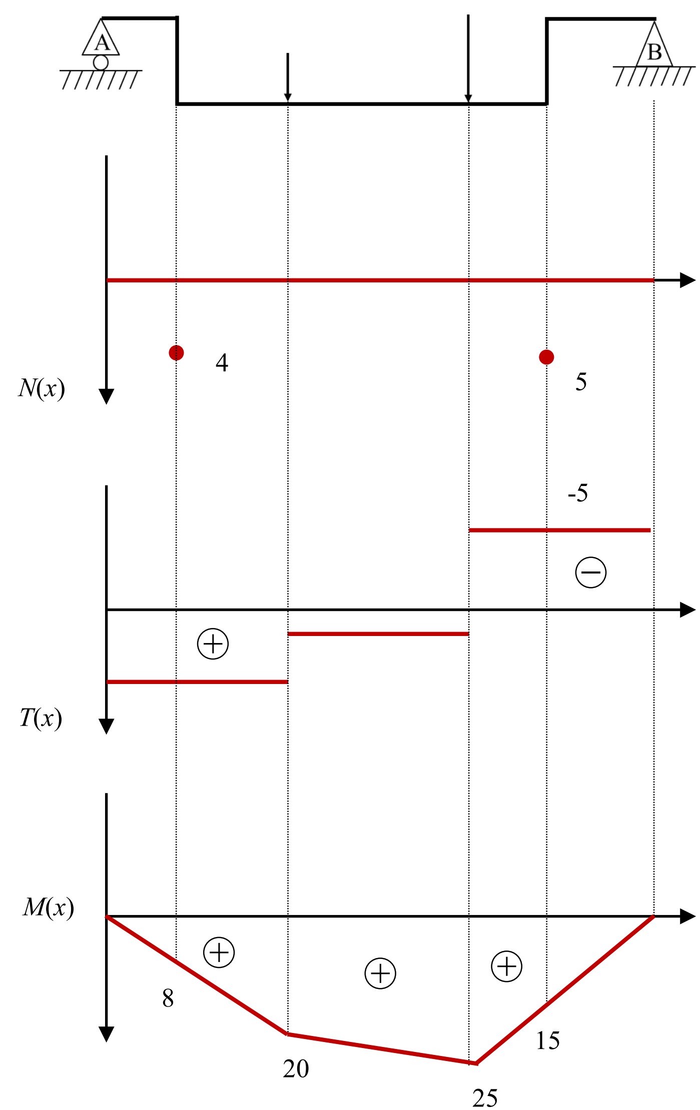
- $N(x) = 0$
- $T(x) = R_A - 5 - 6 = -5\ kN$
- $M(x) = R_A\, x - 3(x-5)$
  $-6(x-10)$

Tronçon FG

- $N(x) = -R_A + 3 + 6 = 5\ kN$
- $T(x) = 0$
- $M(x) = 3R_B = -15\ kNm$

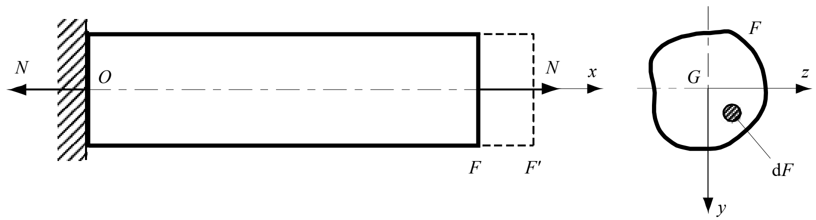
Tronçon GH

- $N(x) = 0$
- $T(x) = -R_B = 5\ kN$
- $M(x) = R_A\, x - 3(x-5)$
  $-6(x-10)$
  $= R_B\, x'$



Merci pour vote attention

Mécanique des structures

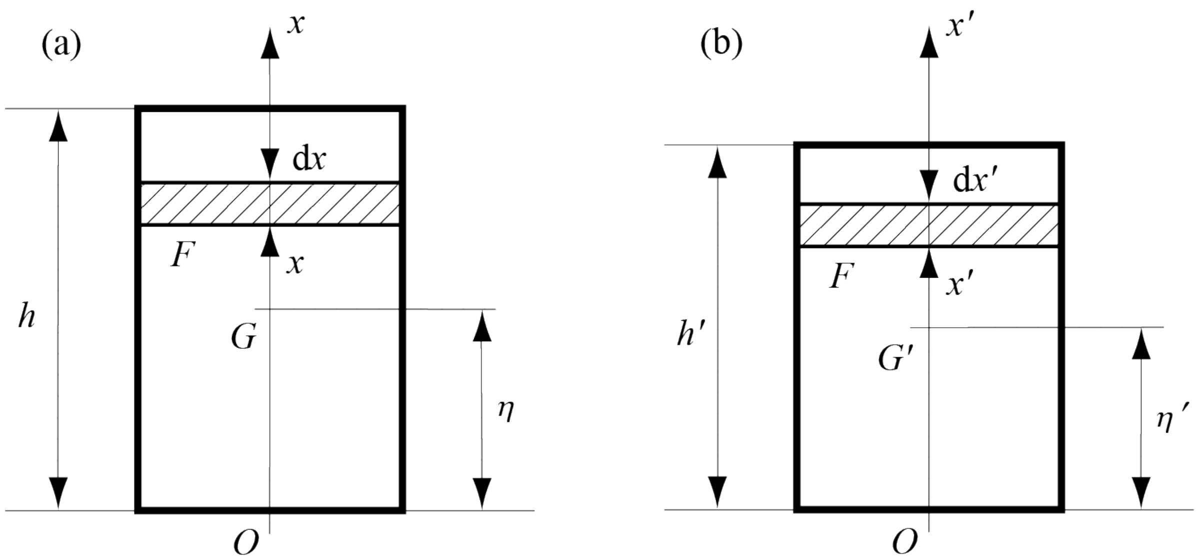


Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3
EPFL

Problème 2.1 : influence du poids propre

En négligeant la dilatation latérale, déterminer le déplacement, sous l'effet de son propre poids, du centre de gravité d'une colonne cylindrique de hauteur h et de poids spécifique γ



Hauteur de la colonne	h	$= 5$ m
Poids spécifique de l'acier	γ	$= 7{,}8 \cdot 10^4$ N/m^3
Module d'élasticité de l'acier	E	$= 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa

Problème 2.1 : influence du poids propre

Après déformation, l'élément dx à hauteur x devient dx' à hauteur x'

- $dx' \;=\; dx\,(1-\frac{\sigma}{E}) \;=\; dx\left(1-\frac{\gamma(h-x)}{E}\right)$
- $x' = \int_0^x x\,dx' = x\left(1-\frac{\gamma h}{2}\right)+\frac{\gamma x^2}{2E}$

Soit g' le poids spécifique de l'élément dx' l'égalité des masses donne

- $F\,\gamma'\,dx' \;=\; F\,\gamma\,dx$

et, par conséquent, on peut écrire

- $\gamma' dx' = \gamma\,dx$

On détermine la hauteur η' du nouveau centre de gravité en calculant le moment statique S' par rapport à la base. Celui-ci est égal au produit de η' par la masse totale M

- $S' \;=\; \eta' M \;=\frac{1}{g}\gamma(\eta\;h\;F) = \frac{1}{g}\gamma F\int_0^h\left[x\left(1-\frac{\gamma h}{2}\right)+\frac{\gamma x^2}{2E}\right]dx$

où g symbolise l'accélération terrestre

En égalant ces deux expressions, on trouve

- $\eta' = \frac{h}{6E}(3E - 2\gamma E)$

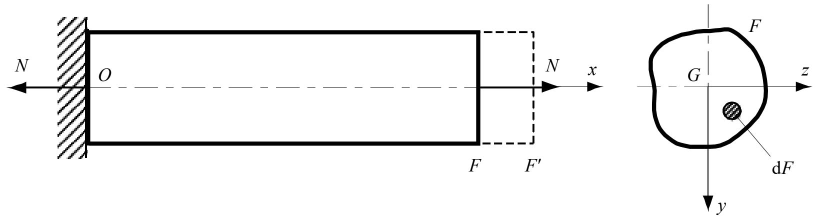
Le déplacement du centre de gravité est ainsi

- $\Delta\eta = \eta - \eta' = \frac{h}{2} - \eta' = \frac{\gamma h^2}{3E}$

Avec les données fournies, on obtient numériquement

- $\Delta\eta = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\, m = 3.1\ \mu m$

Mécanique des structures



Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3
EPFL

Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

Un anneau de cuivre est serti à chaud, sans jeu et sans serrage, sur un anneau d'acier de même largeur B. La température du cuivre est de $\Delta\theta$ plus élevée que celle de l'acier.

Calculer les contraintes dans l'acier et le cuivre, la pression entre les deux anneaux et le raccourcissement relatif de leur rayon commun après refroidissement du cuivre.

$E_1 = 1{,}17 \cdot 10^{11}$ Pa

$E_2 = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa

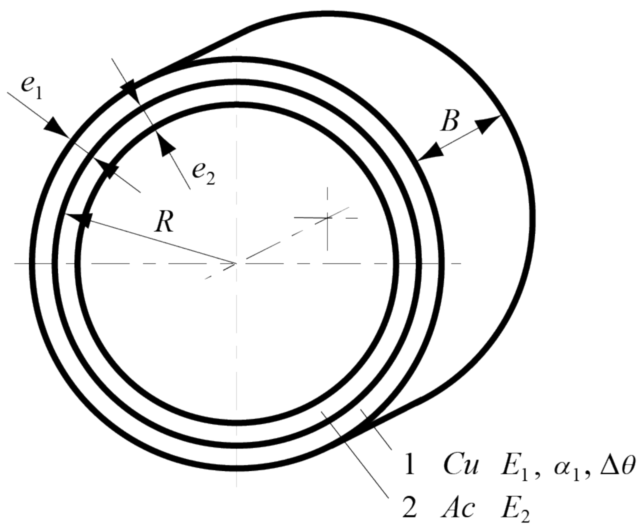
$e_1 = 0{,}5$ cm

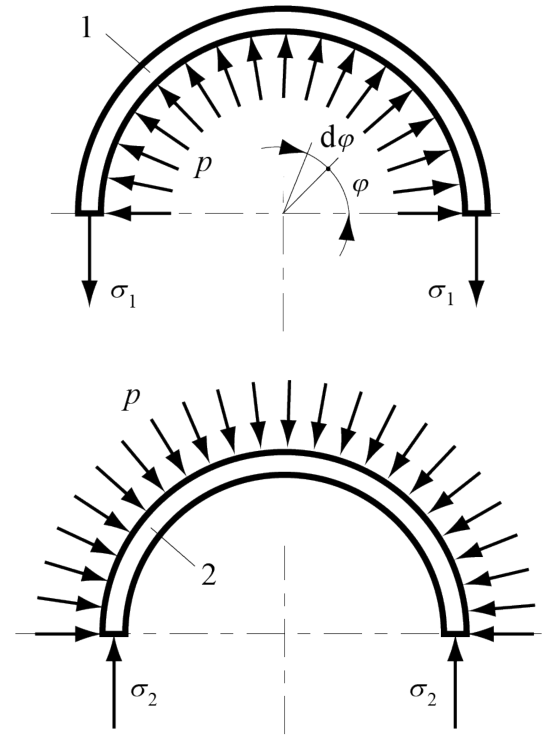
$e_2 = 1$ cm

$R = 10$ cm

$\alpha_1 = 16{,}6 \cdot 10^{-6}$ / °C

$\Delta\theta = 200$ °C





Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

Les anneaux étant minces, on peut confondre leurs rayons moyens avec R et admettre que les contraintes dans chacun d'eux sont constantes dans toute l'épaisseur.

La pression p de serrage provoque une contrainte σ_1 de traction dans le cuivre et une contrainte σ_2 de compression dans l'acier. On peut écrire deux conditions d'équilibre

- $2\, e_1 B \sigma_1 = 2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, p \, dF = 2\, p\, R\, B \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, p \, d\varphi = 2\, p\, R\, B$
- $2 e_2 B \sigma_2 = 2\, p\, R\, B$

qui lient trois grandeurs inconnues σ_1, σ_2 et p, le système étant par conséquent hyperstatique d'ordre $3 - 2 = 1$. La condition de déformation donne la troisième équation nécessaire : le raccourcissement $\Delta\ell$ de la demi-circonférence de l'anneau de cuivre est égal à celui de l'anneau d'acier

- $\Delta\ell = \pi \Delta R = \pi\, R \Delta\theta\, \alpha_1 - \pi\, R\, \frac{\sigma_1}{E_1} = \pi\, R\, \frac{\sigma_2}{E_2}$

Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

Avec la notation $\lambda = (e_2\ E_2)\ /\ (e_1\ E_1)$, la résolution de ces trois équations conduit aux contraintes suivantes σ_1 dans le cuivre et σ_2 dans l'acier

- $\sigma_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda} \Delta\theta\ \alpha_1\ E_1 = 304\ MPa$ et $\sigma_2 = \frac{1}{1+\lambda} \Delta\theta\ \alpha_1\ E_2 = 152\ MPa$

Liées par la relation

- $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{e_2}{e_1}$

ainsi qu'à la pression de contact ci-après

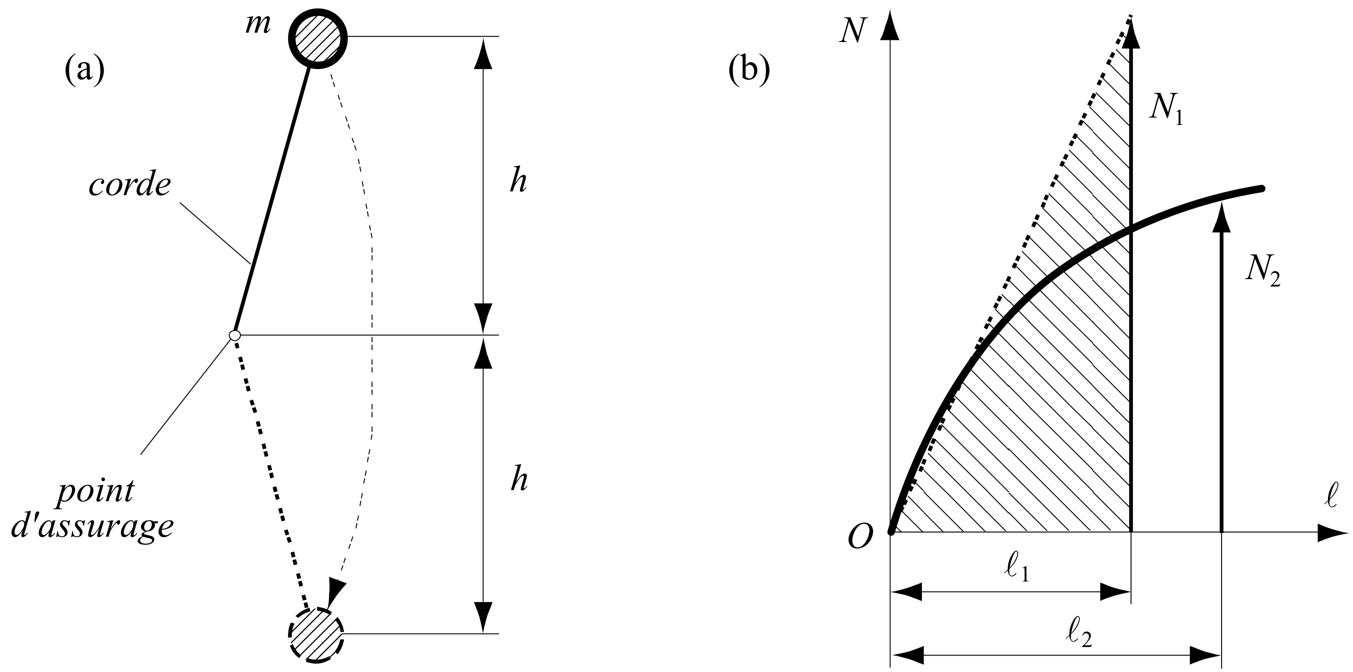
- $p\ = \sigma_1 \frac{e_1}{R} = \sigma_2 \frac{e_2}{R} = 15.2\ MPa$

Finalement, le raccourcissement relatif du rayon commun se déduit de la troisième équation

- $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{1}{1+\lambda}\ \Delta\theta\ \alpha_1 = 0.72\ ‰$

Problème 2.5

Calculer la force subie par un alpiniste de masse m tombant d'une hauteur $2h$ et retenu par une corde en nylon de section F.



Masse de l'alpiniste	m = 80 kg
Section de la corde	F = 0,5 cm^2 (Ø 8 mm)
Module d'élasticité du nylon	E = 2,8·10^9 Pa
Demi-hauteur de chute	h = 15 m

Problème 2.5

Dans sa partie initiale, le diagramme d'une corde de nylon est rectiligne. Bien que fortement tributaire du mode de tressage, le module d'élasticité de la corde est égal environ au quart de celui d'un fil unique

- $Ec \approx E / 4 = 0{,}7 \cdot 109\ Pa$

En supposant que le diagramme force-déplacement reste linéaire, égalons l'énergie de chute à l'énergie dans la corde (accélération terrestre $g = 9{,}81$ m/s^2)

- $m\ g\ (2h) = \frac{N_1^2\ h}{2E_C F}$

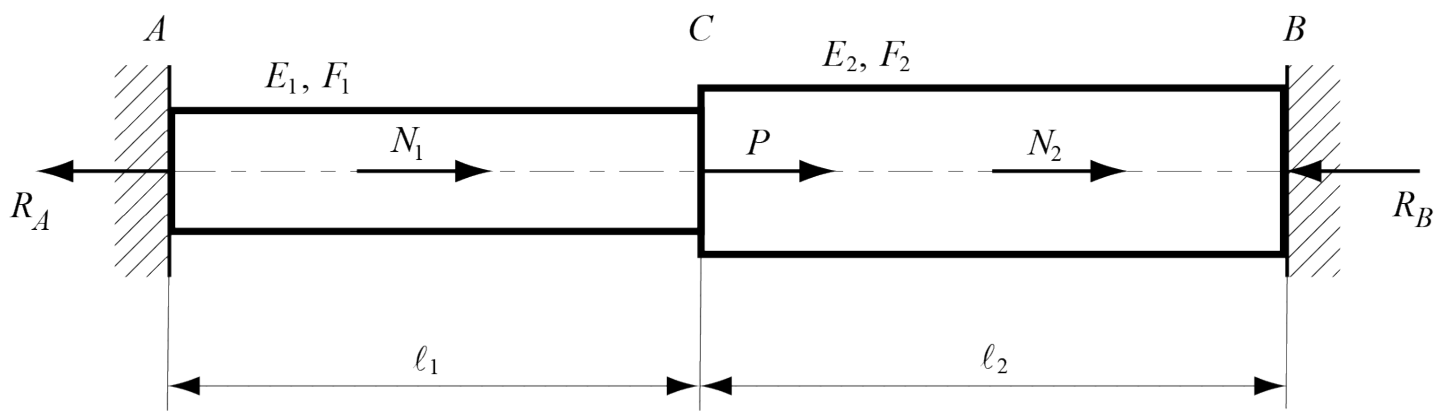
pour extraire la force de blocage cherchée N1, indépendante de la hauteur de chute,

- $N_1 = 2\sqrt{mgE_C F} = 10.5\ kN$

En réalité, le diagramme de la corde n'est pas rectiligne et la force maximum N_2 effectivement atteinte pour la même énergie est plus faible. Pour une corde correspondant au diagramme de la figure, cette force serait réduite dans le rapport $N_2 / N_1 \approx$ 0,6 et serait donc égale à environ 6 kN.

Problème 2.3

Une force P est appliquée au point C du système représenté. Calculer les efforts intérieurs N_1 et N_2 dans les barres, les réactions en A et B, ainsi que le déplacement δ_C



Problème 2.3

La statique ne permet d'en calculer qu'une : dans un tel cas, le système est dit hyperstatique d'ordre $2 - 1 = 1$

Le déplacement δ_C du point C est égal à l'allongement de la barre AC et au raccourcissement de la barre CB

- $\delta_C = \frac{N_1 \ell_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 F_2}$

D'autre part, on peut écrire la relation suivante

- $P = N_1 + N_2$

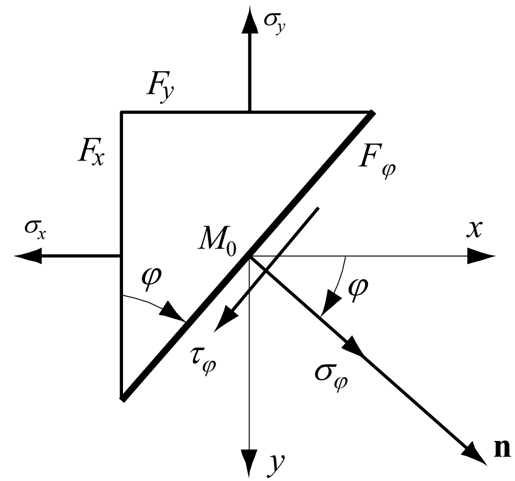
De ces deux égalités, on tire facilement, avec la notation $\ell = (E_2 F_2) / (E_1 F_1)$

- $N_1 = P \frac{\ell_2}{\lambda \ell_1 + \ell_2}$ $\qquad$ $N_2 = P \frac{\lambda \ell_1}{\lambda \ell_1 + \ell_2}$
- $\delta_C = P \frac{\ell_1 \ell_2}{(\lambda \ell_1 + \ell_2) E_1 F_1}$

Enfin, il est évident que $R_A = N_1$ et $R_B = N_2$

Merci pour vote attention

Mécanique des structures



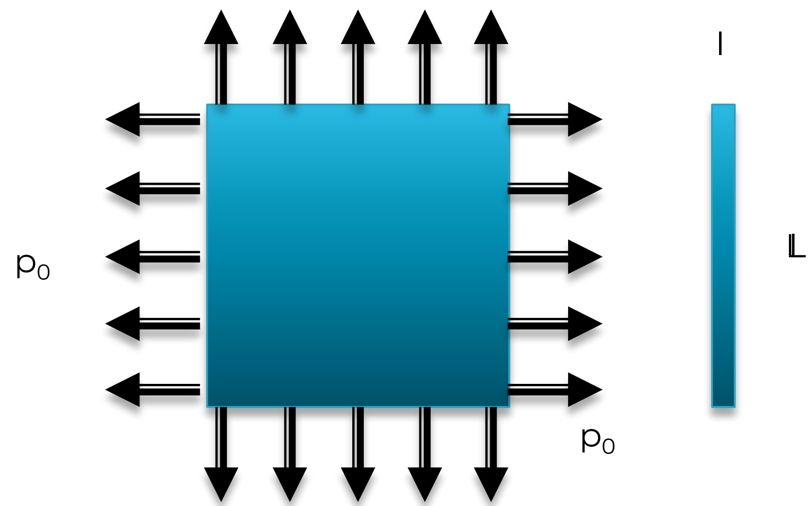
Chapitre 3 : Etat de contrainte bidimensionnel

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3
EPFL

Exemple plaque carrée

Une plaque carrée, en acier laminé à chaud, de 50 cm de côté et 2 mm d'épaisseur, subi sur son contour une charge linéique de $P_0 = 2 \times 10^5$ N/m.

$L = 50$ cm
$l = 2$ mm
$E = 201$ GPa
$\mu = 0.27$



Calculer :

1) Les contraintes σ_x et σ_y au centre de la plaques et la contrainte de cisaillement sur le plan à 45°
2) Les allongements relatif ε et absolu ΔL des côtés
3) La variation relative de volume
4) La densité d'énergie

Exemple plaque carrée

1) $\sigma_x = \sigma_y = \frac{N}{A} = \frac{P_0 L}{l\, L} = \frac{P_0}{l} = 100 \text{ MPa}$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x$

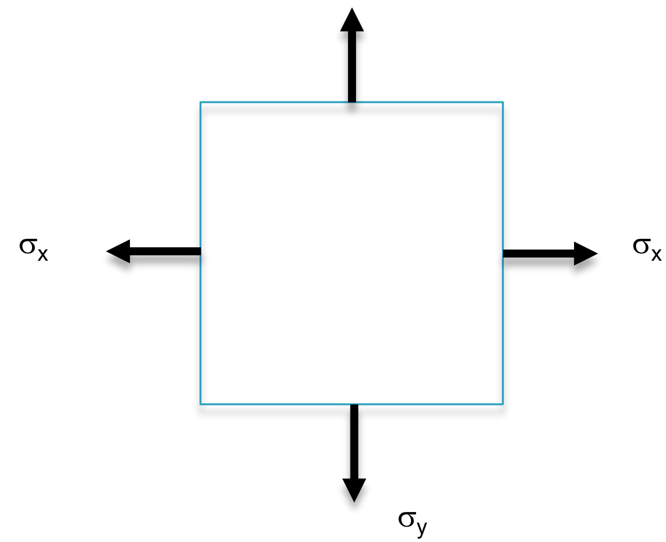
$\tau(\varphi = 45°) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau\, cos 2\varphi = 0$

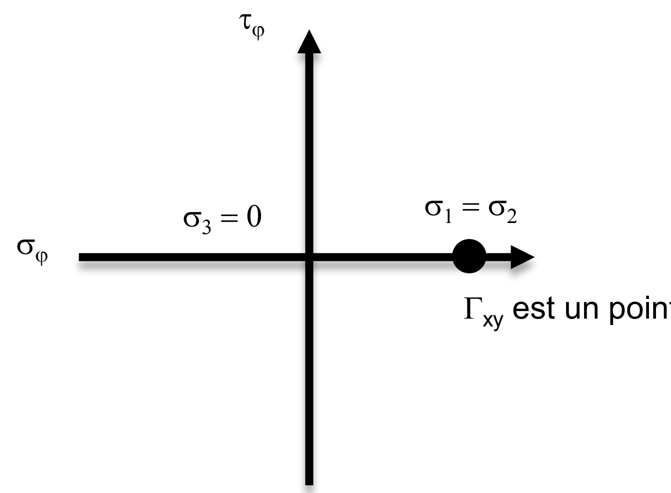
2) $\varepsilon = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) = 3.48\ 10^{-4}$

$\Delta L = \varepsilon\, L = 0.1738\, mm$

3) $v = (1 - 2\mu)\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} = 4.38\ 10^{-4}$

4) $u = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{\sigma_y^2}{2} - \mu\sigma_x\sigma_y\right) = 34'761\, \frac{J}{m3}$



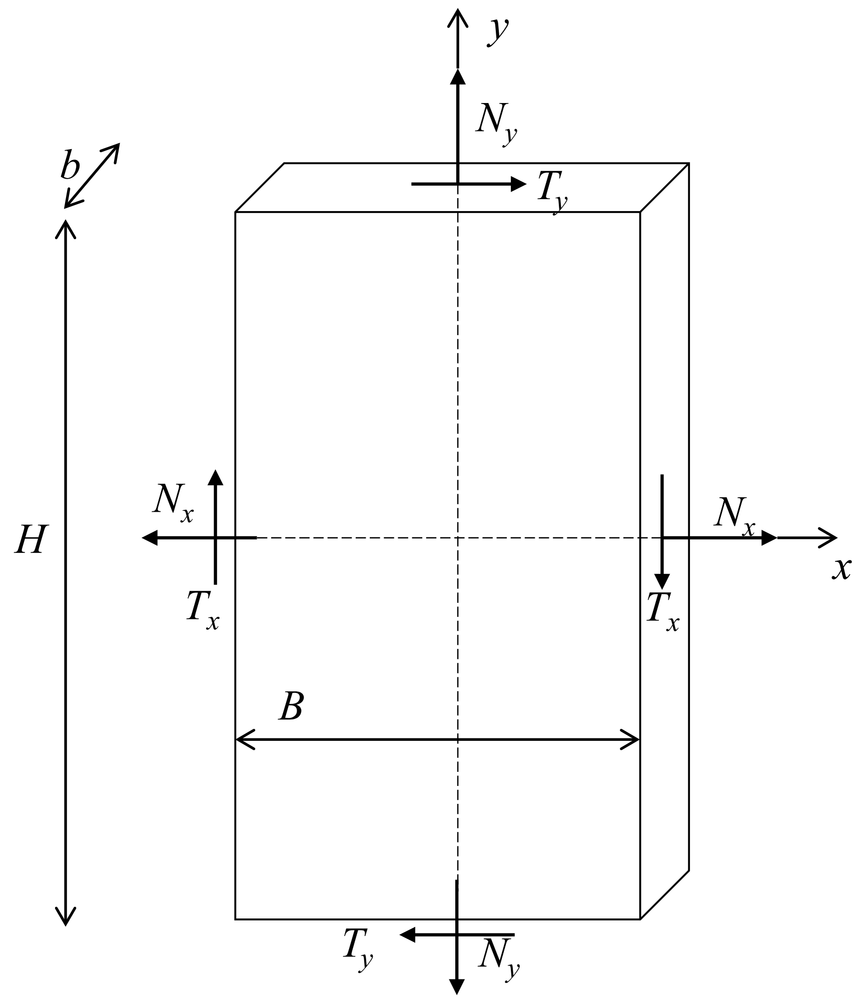


Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

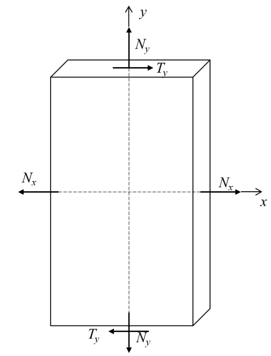
La figure montre un bloc solide soumis à un état de contraintes pour lequel on connais les composantes normales et tangentielles. Déterminer, par le calcul et sur le cercle de Mohr, les valeurs des contraintes principales.

- $N_x = 2 \text{ x } 10^5$ N
- $N_y = -3.6 \text{ x } 10^4$ N
- $T_x = 9 \text{ x } 10^4$ N

- $B = 6$ cm
- $b = 1$ cm
- $H = 10$ cm



Exemple bloc soumis à des charges biaxiales



Contraintes normales

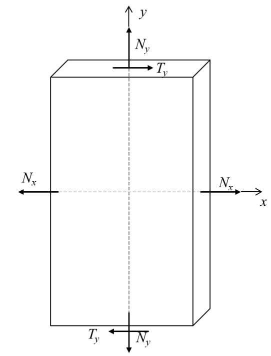
- $\sigma_x = \dfrac{N_x}{b\ H} = \dfrac{200000}{10 \times 100} = 200$ MPa
- $\sigma_y = \dfrac{N_y}{B\ b} = \dfrac{36000}{60 \times 10} = -60$ MPa

Contraintes tangentielles

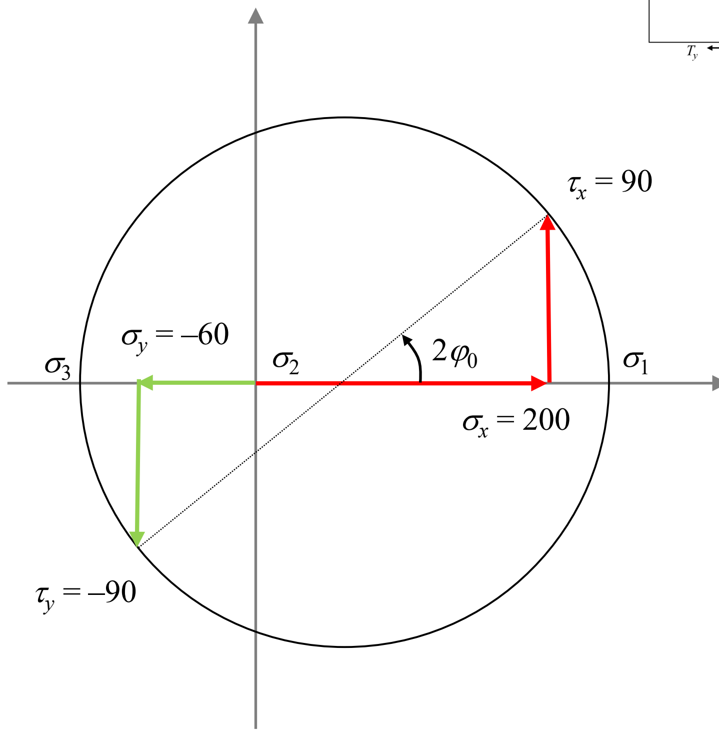
- $\tau_x = \dfrac{T_x}{b\ H} = \dfrac{90000}{10 \times 100} = 90$ MPa
- $\tau_y = -\tau_x$
- $T_y = \tau_y\ B\ b = 54\ kN$

Exemple bloc soumis à des charges biaxiales

Cercle Mohr

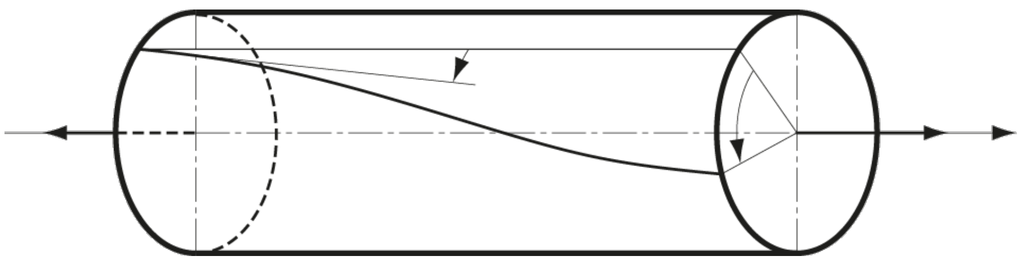


- $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = 158$ MPa
- $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = 228$ MPa
- $\sigma_2 = 0$ MPa
- $\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = -88$ Mpa
- $\varphi_0 = \frac{1}{2} tan^{-1}\left(\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = 24°$



Merci pour vote attention

Mécanique des structures



Chapitre 5 : Torsion simple

Dr. Alain Prenleloup

SGM BA3

EPFL

Problème 5.1

En choisissant une contrainte de cisaillement admissible τ_{adm} de 50 MPa, calculer le diamètre – supposé uniforme – d'un arbre de turbine à gaz transmettant une puissance de 25 MW à 8000 t/min

Problème 5.1

Le moment de torsion M_t est lié à la puissance P par l'inverse de la vitesse de rotation ω

- $$M_t = {}^{P}/_{\omega} = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 60}{2\pi\, 8000} = 29.8 \cdot 10^{-3}\ Nm$$

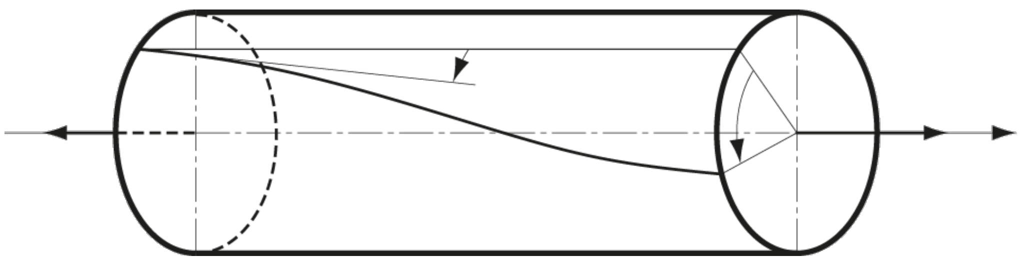
La contrainte tangentielle admissible τ_{adm} est égale à la contrainte maximale τ_{max}

- $$\tau_{adm} = \tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$$

de sorte que le diamètre cherché D vaut

- $$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_{adm}}} = 14.5\ cm$$

Mécanique des structures

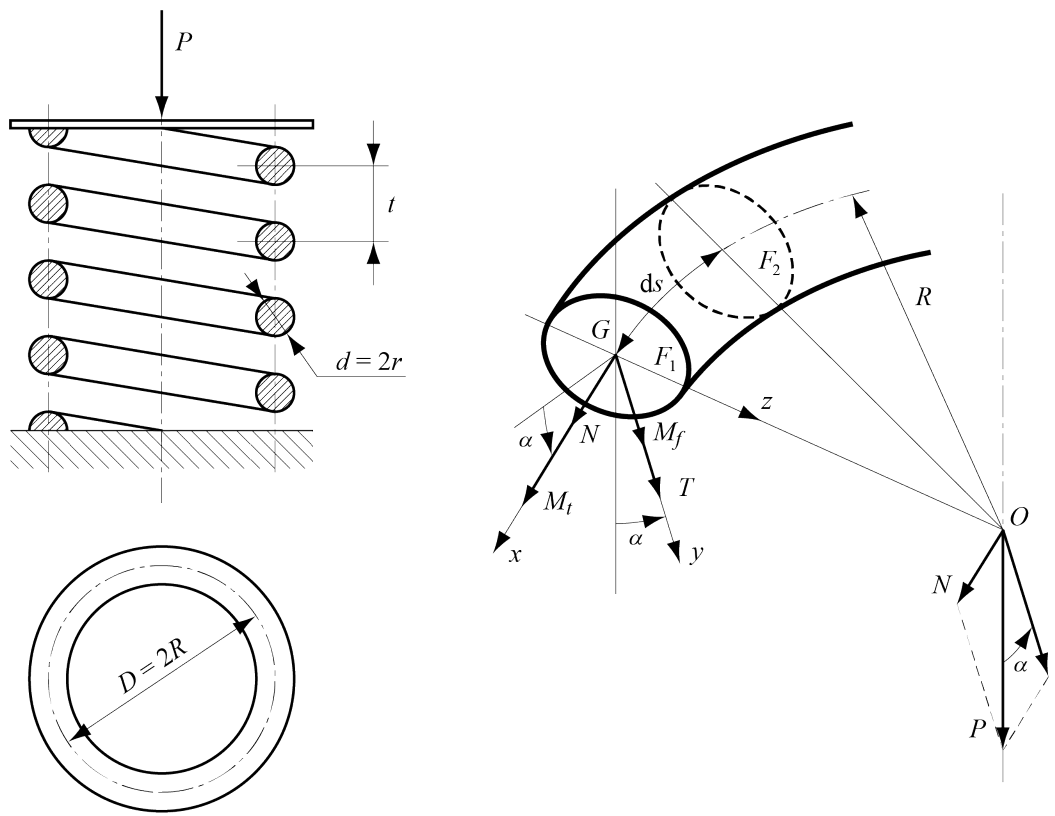


Chapitre 5 : Torsion simple

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3
EPFL

Problème 5.2

Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre D, formé de n spires de diamètre d et soumis à une charge de compression P. Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.



Problème 5.2

La fibre moyenne du ressort est une hélice d'angle α en fonction du pas t d'une spire

- $a \approx \tan \alpha = \dfrac{t}{2\pi\, R}$

Par le centre de gravité G d'une section normale du ressort, construisons les axes orthogonaux G_x, G_y et G_z ainsi définis :

- G_z est horizontal et coupe l'axe du ressort au point O
- G_x est tangent à la fibre moyenne et forme l'angle a avec l'horizontale
- G_y complète le trièdre droit avec G_x et G_z et forme l'angle a avec la verticale

Au point O, décomposons la force P selon les directions des axes G_x et G_y (la composante selon l'axe G_z est nulle)

- $N = P \sin \alpha$ selon G_x
- $T = P \cos \alpha$ selon G_y

où les grandeurs N et T sont les efforts intérieurs normal et tranchant au point G

Problème 5.2

Les deux autres efforts intérieurs sont les moments de torsion M_t et de flexion M_f

- $M_t = R\,T = P\,R\cos\alpha$ selon G_x
- $M_f = R\,N = P\,R\sin\alpha$ selon G_y

L'influence du moment de torsion est prédominante, de sorte que les autres efforts intérieurs sont négligés dans l'analyse. Il s'ensuit que la contrainte maximale de cisaillement peut s'écrire

- $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16M_t}{\pi d^3} = \frac{16P\,R\cos\alpha}{\pi d^3} \approx \frac{16P\,R}{\pi d^3} = \frac{8P\,D}{\pi d^3}$

Deux sections F_1 et F_2 distantes de ds tournent relativement l'une à l'autre d'un angle $\mathrm{d}\varphi$ qui entraîne une flèche $df = R\,d\varphi$. En adaptant l'expression pour prendre en compte l'abscisse curviligne, on obtient

- $df = R\frac{M_t\,ds}{G\,I_p} = R\frac{P\,R\cos\alpha\,ds}{G\,I_p} \approx \frac{P\,R^2 ds}{G\,I_p} = \frac{P\,D^2 ds}{4\,G}\frac{32}{\pi\,d^4} = \frac{8\,P\,D^2 ds}{\pi\,d^4\,G}$

Problème 5.2

Pour obtenir la flèche totale, il suffit d'intégrer sur la longueur totale du ressort égale à $n\,\pi\,D\,/\cos\alpha \;\approx\; n\,\pi\,D$ et l'on trouve donc

- $f = \frac{8nPD^3}{Gd^4}$

La rigidité ou constante k du ressort est le facteur de proportionnalité entre la charge et la flèche totale et peut être explicitée sous la forme

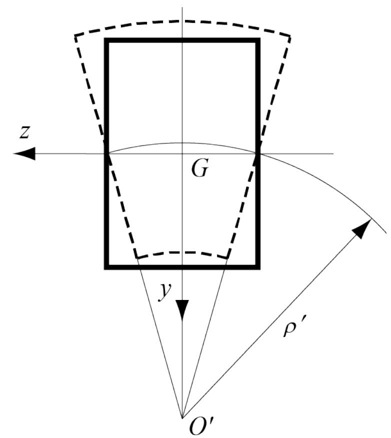
- $k = \frac{P}{f} = f = \frac{Gd^4}{8nD^3}$

de sorte que l'énergie U emmagasinée dans le ressort a pour valeur

- $U = \frac{Pf}{2} = \frac{P^2}{2k} = \frac{4nP^2D^3}{Gd^4}$

Merci pour vote attention

Mécanique des structures

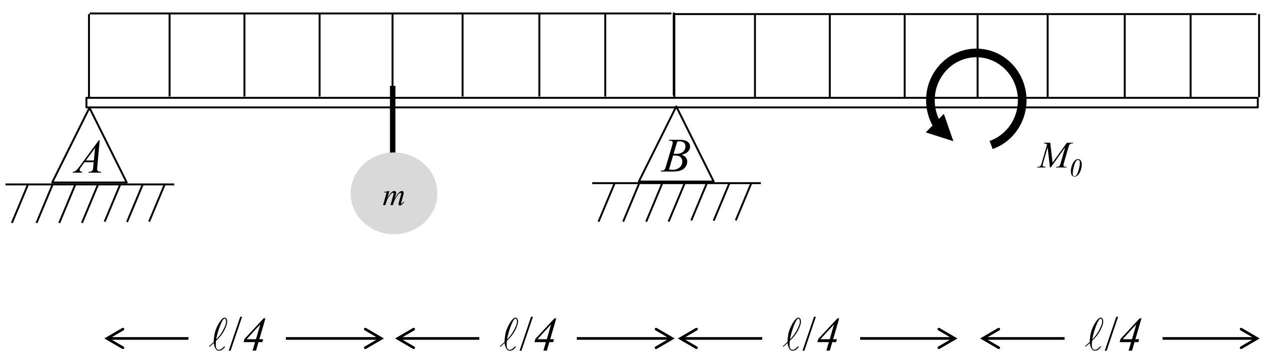


Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3
EPFL

Problème 6.0

Dessiner les diagramme des effort intérieur



Problème 6.0

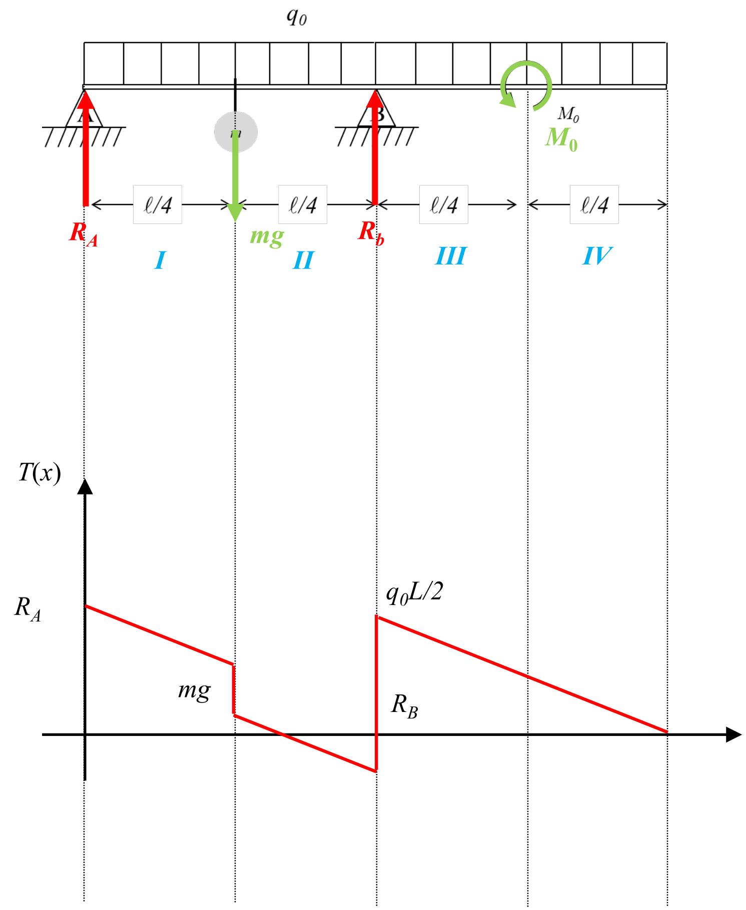
Schéma et équations d'équilibre

- ΣM_A $\quad mg\frac{\ell}{4} + M_0 = R_A\frac{\ell}{4}$

$$\rightarrow R_A = \frac{mg}{2} + \frac{2M_0}{\ell}$$

- ΣF $\quad R_A + R_B = mg + q_0\ell$

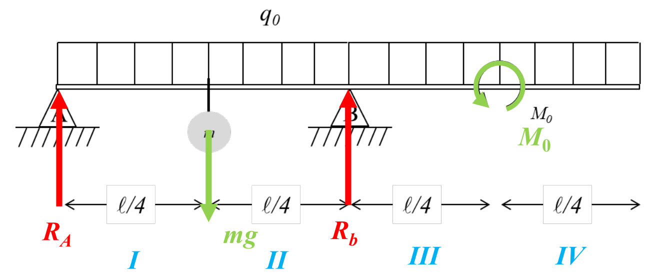
$$\rightarrow R_B = \frac{mg}{2} + q_0\ell - \frac{2M_0}{\ell}$$



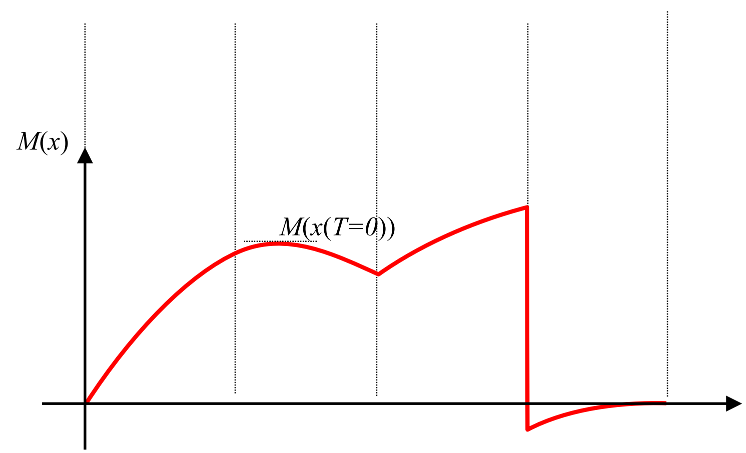
Efforts tranchants

- I $\quad T(x) = R_A - q_0 x$
- II $\quad T(x) = R_A - mg - q_0 x$
- III $\quad T(x) = R_A - mg + R_B - q_0 x$
- IV $\quad T(x) = R_A - mg + R_B - q_0 x$

Moments de flexion

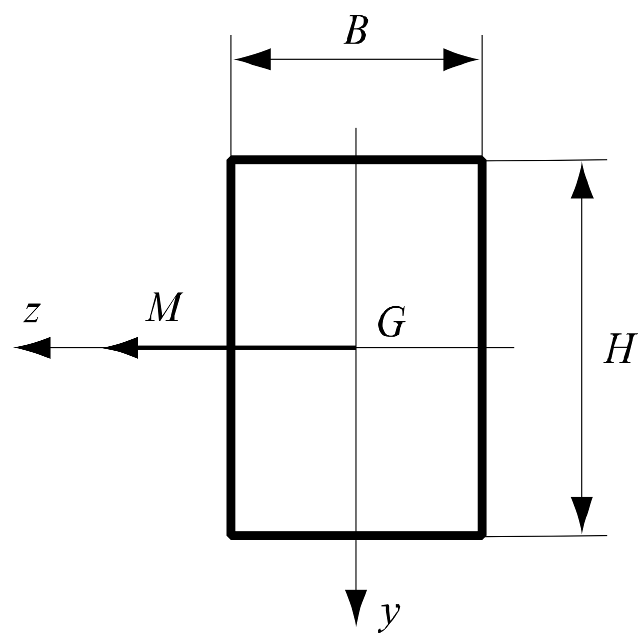


- $I \qquad M(x) = R_A x - \frac{1}{2} q_0 x^2$
- $II \qquad M(x) = R_A x - mg\left(x - \frac{\ell}{4}\right) - \frac{1}{2} q_0 x^2$
- $III \qquad M(x) = R_A x - mg\left(x - \frac{\ell}{4}\right) + R_B\left(x - \frac{\ell}{2}\right) - \frac{1}{2} q_0 x^2$
- $IV \qquad M(x) = R_A x - mg\left(x - \frac{\ell}{4}\right) + R_B\left(x - \frac{\ell}{2}\right) - M_0 - \frac{1}{2} q_0 x^2$



Problème 6.1 : Calculer les contraintes maximale et minimale dans la section d'une poutre rectangulaire de hauteur $H = 6$ cm et de largeur $B = 4$ cm en acier soumise à un moment de flexion $M = 5000$ Nm. Déterminer ensuite le rayon de courbure r.

Problème 6.2 : Calculer les contraintes tangentielles t dans une section rectangulaire de hauteur H et de largeur B d'une poutre soumise à la flexion simple.



Problème 6.1

Le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe G_z, ainsi que les moments correspondants de résistance à la flexion, valent

- $I = \iint_F \; y^2 dF = 2B \int_0^{H/2} y^2 dy = \frac{BH^3}{12} = 0{,}72 \cdot 10{-}\, 6\; m4$
- $W_1 = W_2 = \frac{I}{H/2} = 24 \cdot 10{-}\, 6\; m3$

Les contraintes normales $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$ ont ainsi pour valeur

- $\sigma_{max} = \frac{M}{W_1} = 208\; MPa$
- $\sigma_{min} = \frac{-M}{W_2} = -208\; MPa$

Le rayon de courbure r est quant à lui obtenu

- $\rho = \frac{E\, I}{M} = 30{,}2\; m$

Problème 6.2

Le moment statique de la section partielle se calcule immédiatement sans expliciter l'intégrale

- $S' = B\left(\frac{H}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} + y\right) = \frac{BH^2}{8}\left[1 - \left(\frac{y}{H/2}\right)^2\right]$

Comme le moment d'inertie I de la section et la largeur b à l'abscisse y valent

- $I = \frac{BH^3}{12}$
- $b = B$

Les contraintes tangentielles τ s'écrivent

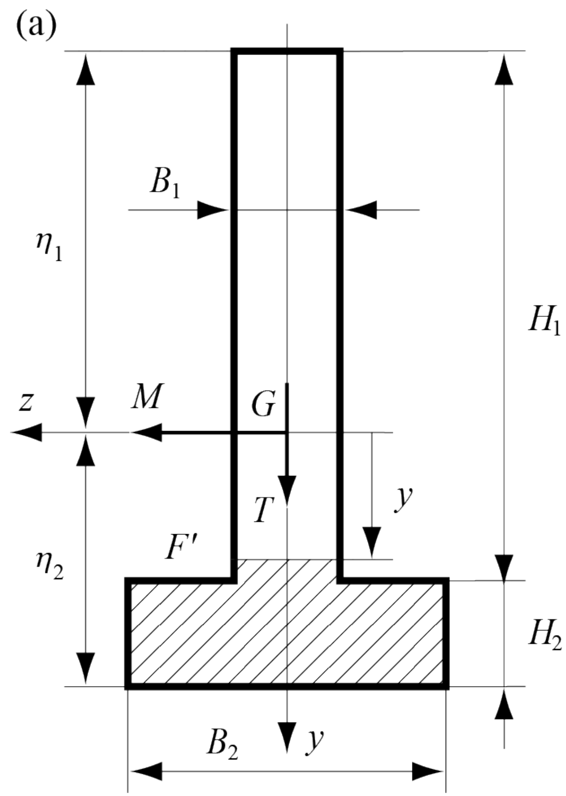
- $\tau = \frac{3}{2}\tau_{moy}\left[1 - \left(\frac{y}{H/2}\right)^2\right]$

où τ_{moy} représente la contrainte tangentielle moyenne dans la section, définie par le rapport suivant

- $\tau_{moy} = \frac{T}{B\,H}$

Problème 6.3

Evaluer les contraintes normales σ et tangentielles τ dans la section en forme de T inversé d'une poutre droite soumise à un moment de flexion M et à un effort tranchant T



Problème 6.3

Calculons d'abord l'aire F de la section, les distances h_1 et h_2 du centre d'inertie G de la section aux fibres extrêmes et le moment d'inertie $I_z = I$ de la section.

En considérant la section totale comme l'assemblage de l'âme de hauteur H_1 et de largeur B_1 et de la semelle de hauteur H_2 et de largeur B_2

- $F = H_1 B_1 + H_2 B_2$
- $\eta_1 = \frac{H_1 B_1 (H_1/2) + H_2 B_2 (H_1 + H_2/2)}{F}$
- $\eta_2 = H_1 + H_2 - \eta_1$
- $I = \frac{B_2 H_2^3}{3} + \frac{B_1 H_1^3}{12} + H_1\, B_1 \left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) - \eta_2^2 F$

Dès lors que les grandeurs qui apparaissent dans l'équation de la contrainte norame sont globales, les contraintes normales demeurent continues sur la hauteur de la section malgré le changement brusque de largeur. Leur distribution est linéaire et a pour expression

- $\sigma(y) = \frac{M}{I} y$

Problème 6.3

Les valeurs maximales de contraintes normales sont atteintes sur les fibres extrêmes inférieure (traction) et supérieure (compression)

- $\sigma_{max} = \frac{M}{I}\eta_2$ $\qquad\qquad$ $\sigma_{min} = \frac{-M}{I}\eta_1$

Les moments statiques $S_1{}'$ et $S_2{}'$ de la section partielle F' pour respectivement l'âme et la semelle s'écrivent

- $S_1' = B_1(\eta_1 + y)\cdot(\eta_1 - y)/2$ $\qquad\qquad$ $-\eta_1 \leq y \leq \eta_2 - H_1$
- $S_2' = B_2(\eta_2 - y)\cdot(\eta_2 + y)/2$ $\qquad\qquad$ $\eta_2 - H_2 \leq y \leq \eta_2$

La largeur b à l'abscisse y valant B_1 dans l'âme et B_2 dans la semelle, les contraintes tangentielles sont, après transformations mathématiques, données par

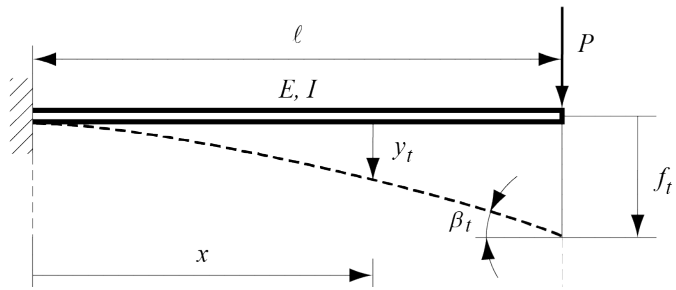
- $\tau(y) = \frac{T\eta_1^2}{2I}\left[1 - (y/\eta_1)^2\right]$ $\qquad\qquad$ $-\eta_1 \leq y \leq \eta_2 - H_1$
- $\tau(y) = \frac{T\eta_2^2}{2I}\left[1 - (y/\eta_2)^2\right]$ $\qquad\qquad$ $\eta_2 - H_2 \leq y \leq \eta_2$

et leur amplitude maximale surgit sur l'axe neutre

- $\tau_{max} = \tau(0) = T\eta_1^2/(2I)$

Merci pour vote attention

Mécanique des structures



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Dr. Alain Prenleloup

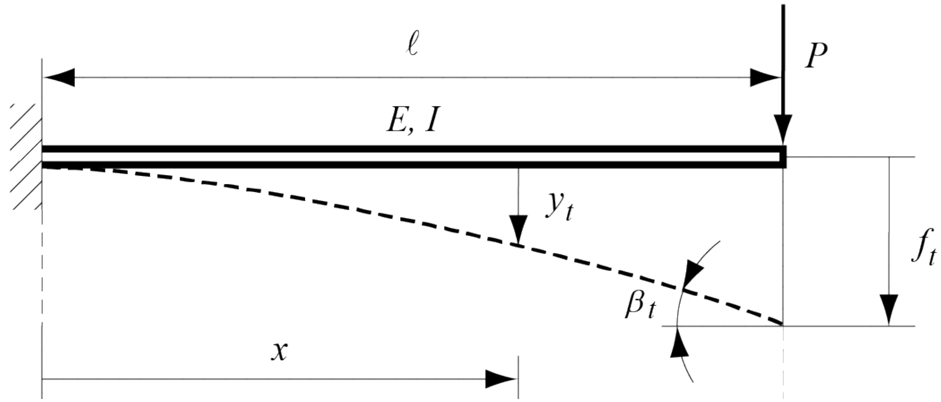
SGM BA3

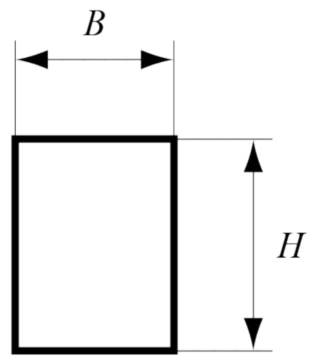
Problème 7.1

Chercher la déformée d'une poutre en console de section rectangulaire supportant une force ponctuelle en son extrémité libre

Données numériques

$$
\begin{aligned}
P &= 30 \text{ kN} \\
\ell &= 1 \text{ m} \\
H &= 10 \text{ cm} \\
B &= 5 \text{ cm} \\
E &= 2{,}1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\
G &= 0{,}8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}
\end{aligned}
$$





Déformée due au moment :

Le moment de flexion M provoqué par la force P est donné par

- $M(x) = -P(\ell - x)$

L'équation différentielle du second ordre avec le moment devient

- $E\,I\,y'' = P(\ell - x)$

En intégrant successivement cette équation, on obtient

- $E\,I\,y' = P\ell x - P\dfrac{x^2}{2} + C_1$
- $E\,I\,y = P\ell\dfrac{x^2}{2} - P\dfrac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

où C_1 et C_2 constituent les constantes d'intégration, déterminées par les conditions aux limites du problème

- $y'(x = 0) = 0 = C_1$
- $y(x = 0) = 0 = C_2$

Problème 7.1

L'équation de la déformée due au moment et celle de sa dérivée s'écrivent ainsi

- $y = \frac{P}{6\,EI} x^2 \,(3\ell - x)$
- $y' = \frac{P}{2\,EI} x \,(2\ell - x)$

La flèche f et la rotation b maximales apparaissent sous la charge en $x = \ell$

- $f = \frac{P\ell^3}{3\,EI}$
- $\beta \approx tg\, \beta = \frac{P\ell^2}{2\,EI}$

Déformée due à l'effort tranchant

Comme l'effort tranchant T est constant et vaut

- $T(x) = P$

l'équation différentielle du premier ordre a pour expression

- $y'_T = \eta \dfrac{P}{G\,F}$

dont l'intégration triviale donne

- $y_T = \eta \dfrac{P}{G\,F} x + C_1$

L'unique constante d'intégration C_1 est à nouveau calculée grâce à la condition de bord en déplacement

- $y_T(x = 0) = 0 = C_1$

L'équation de la déformée due à l'effort tranchant a dès lors pour expression

- $y_T = \eta \dfrac{P}{G\,F} x$

La flèche maximum f_T due à l'effort tranchant apparaît également sous la charge, mais la rotation β_T est indépendante de la variable x

- $f_T = \eta \frac{P\,\ell}{G\,F}$
- $\beta_T = \eta \frac{P}{G\,F}$

On relèvera que l'effort tranchant provoque, même à l'encastrement, une rotation constante lorsque la charge est concentrée.

Déformée totale

La déformée totale y_t et sa dérivée sont obtenues par sommation des déformées partielles y et y_T et de leurs dérivées

- $y_t = y + y_T = \frac{P}{6\,EI} x^2\,(3\ell - x) + \eta\,\frac{P}{G\,F} x$
- $y_t' = y' + y_T' = \frac{P}{2\,EI} x\,(2\ell - x) + \eta\,\frac{P}{G\,F}$

De manière analogue, la flèche totale f_t et la rotation totale β_t sont trouvées par addition des contributions partielles

- $f_t = f + f_T = \frac{P\ell^3}{3\,EI} + \eta\,\frac{P\,\ell}{G\,F}$
- $\beta_t = \beta + \beta_T = \frac{P\ell^2}{2\,EI} + \eta\,\frac{P}{G\,F}$

Problème 7.1

Application numérique

En portant les données numériques fournies dans les relations calculées précédemment, on obtient, compte tenu du coefficient de forme $h = 1{,}2$ de même que de l'aire $F = B\,H = 50$ cm^2 et de l'inertie $I = B\,H_3\,/\,12 = 417$ cm^4 de la section,

- $f = 11{,}4\ mm$
- $f_T = 0{,}09\ mm$
- $\beta = 0{,}017\ rad = 0{,}98\ °$
- $\beta_T = 0{,}09 \cdot 10^{-3}\ rad = 0{,}005\ °$

Il est à noter que les rapports des flèches et des rotations sont très faibles

- $f_T/f\ = 8\ ‰$
- $\beta_T/\beta = 5\ ‰$

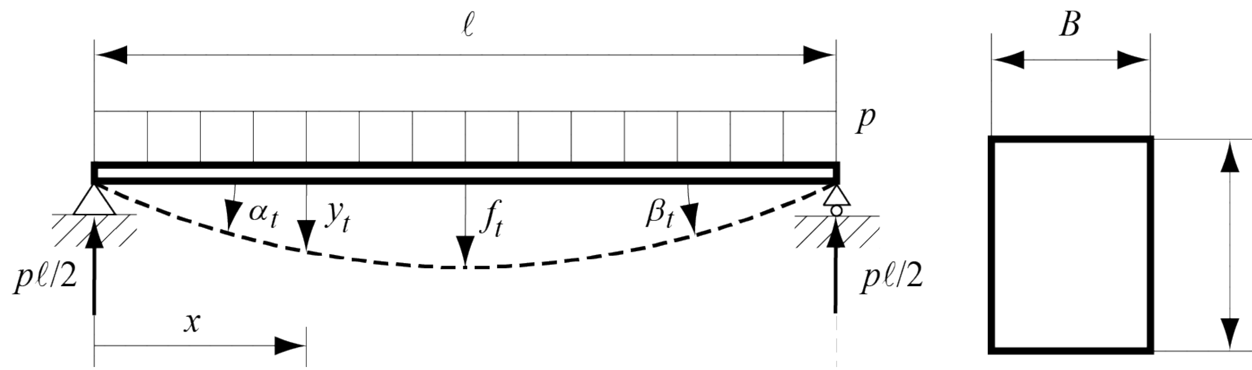
L'influence de l'effort tranchant T est négligeable en comparaison de celle du moment de flexion M

Problème 7.2

Chercher la déformée d'une poutre sur deux appuis simples de section rectangulaire supportant une charge uniformément répartie.

Données numériques

$p = 200$ kN/m
$\ell = 1$ m
$H = 10$ cm
$B = 5$ cm
$E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa
$G = 0{,}8 \cdot 10^{11}$ Pa



Déformée due au moment et à l'effort tranchant

Compte tenu de la charge répartie $p(x) = p$, le moment de flexion M s'écrit

- $M(x) = \frac{p\,\ell}{2} x - p\,\frac{x^2}{2}$

Comme la charge appliquée est continue, il est possible d'utiliser directement l'équation différentielle combinant les effets dus au moment de flexion et à l'effort tranchant

- $y_t'' = -\frac{M}{EI} - \eta\,\frac{p}{GF} = \frac{p}{2\,EI}\left(x^2 - \ell\,x\right) - \eta\,\frac{p}{GF}$

L'intégration successive de cette équation donne

- $y_t' = \frac{p}{2\,EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell\,x^2}{2}\right) - \eta\,\frac{p}{GF}\,x + C_1$
- $y_t = \frac{p}{2\,EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell\,x^3}{6}\right) - \eta\,\frac{p}{GF}\,\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

Problème 7.2

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont évaluées à partir des conditions aux limites du problème

- $y_t(x=0) = 0 = C2$
- $y_t(x=\ell) = 0 = \frac{p}{EI}\frac{\ell^4}{24} - \eta\frac{p}{GF}\frac{\ell^2}{2} + C_1\ell$

Les équations de la déformée et de sa dérivée ont pour expression

- $y_t = \frac{p}{24\,EI}\left(\ell^3 x - 2\ell x^3 + x^4\right) + \eta\frac{p}{2\,GF}\left(\ell x - x^2\right)$
- $y_t' = \frac{p}{24\,EI}\left(\ell^3 - 6\ell x^2 + 4x^3\right) + \eta\frac{p}{2\,GF}(\ell - 2x)$

Par symétrie, la flèche maximum f_t apparaît au milieu de la poutre en $x = \ell/2$

- $f_t = y_t(x=\ell/2) = \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI} + \eta\frac{p\ell^2}{8\,GF} = f + f_T$

tandis que la rotation maximale surgit sous les appuis en $x=0$ et $x=\ell$

- $\alpha_t = |\beta_t| = \frac{p\ell^3}{24\,EI} + \eta\frac{p\ell}{2\,GF} = \alpha + \alpha_T$

Application numérique

Les données numériques fournies conduisent, compte tenu du coefficient de forme $h = 1{,}2$ et en vertu de l'aire $F = B\,H = 50$ cm^2 et de l'inertie $I = B\,H_3\,/\,12 = 417$ cm^4 de la section, aux flèches f et f_T et rotations α et α_T, dues respectivement au moment de flexion M et à l'effort tranchant T,

- $f = 3{,}0\ mm$
- $f_T = 0{,}075\ mm$
- $\alpha = 0{,}0095\ rad = 0{,}55\ °$
- $\alpha_T = 0{,}3 \cdot 10^{-3}\ rad = 0{,}017\ °$

On relèvera que les rapports des flèches et des rotations sont à nouveau très faibles

- $f_T/f = 2{,}5\ \%$
- $\beta_T/\beta\ = 3{,}2\ \%$

Problème 7.3

En appliquant le principe de superposition et en ne considérant que l'influence du moment de flexion, calculer la flèche au centre d'une poutre de section rectangulaire soumise au cas de charge suivant :

Données numériques

$P = 40$ kN

$P = 100$ kN/m

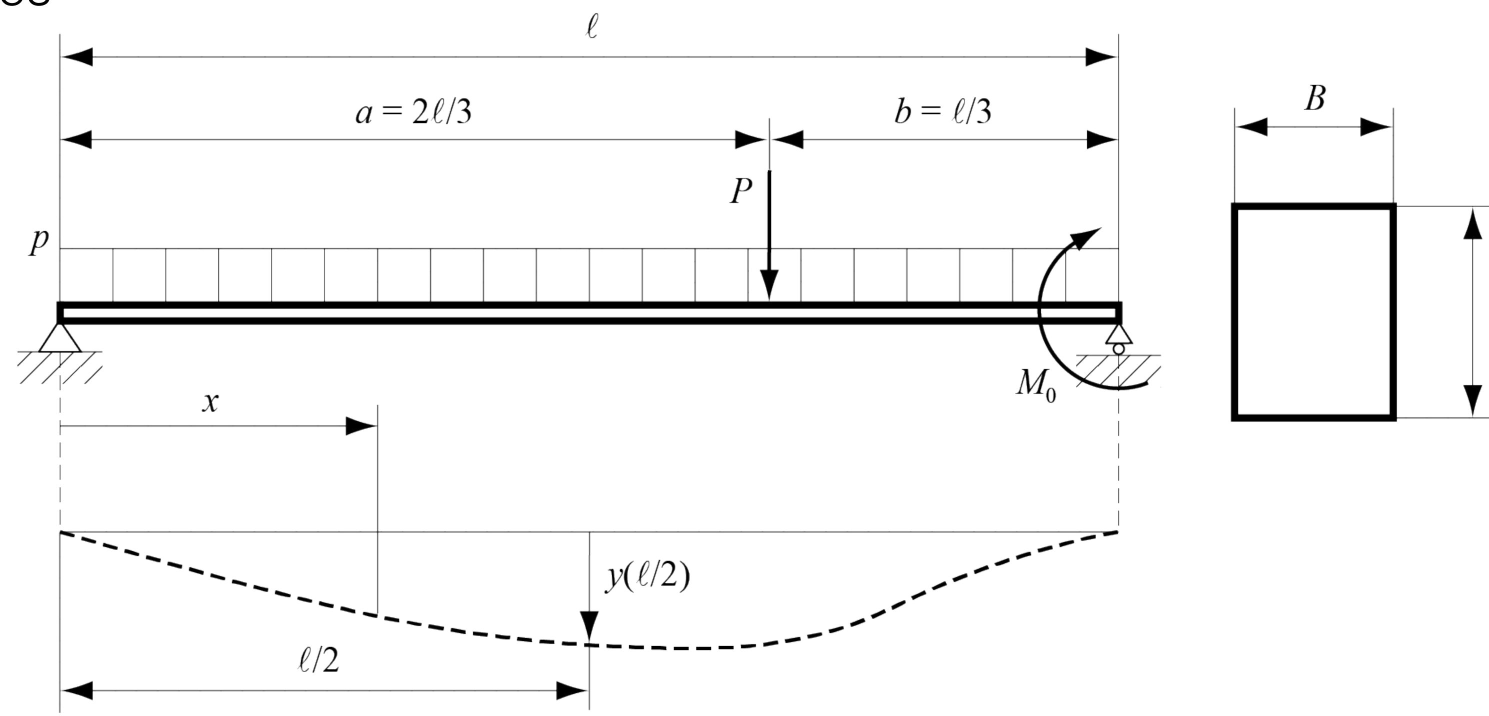
$M_0 = 12$ kNm

$\ell = 1$ m

$H = 10$ cm

$B = 5$ cm

$E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa



Problème 7.3

Conformément à l'annexe II, la déformée y_1 due à une charge concentrée P a pour expression

- $y_1 = \frac{P}{6\ell\, EI}\left(2ab^2x + a^2bx - bx^3\right)$

La prise en compte de la position de la charge ($a = 2\ell/3$, $b = \ell/3$) permet de récrire cette égalité sous la forme

- $y_1 = \frac{P}{18\, EI}\left(\frac{8}{9}\ell^2x - x^3\right)$

La charge répartie p entraîne la déformée y_2 suivante, aussi donnée par l'annexe II,

- $y_2 = \frac{p}{24\, EI}\left(x^4 - 2\ell\, x^3 + \ell^3x\right)$

Tandis que la déformée y_3 provoquée par le moment appliqué M_0 se déduit du résultat donné dans la même annexe après remplacement de la variable x par la quantité $\ell - x$ et inversion du signe de M_0

- $y_3 = \frac{-M_0}{6\ell\, EI}\left(\ell^2x - x^3\right)$

En vertu du principe de superposition, la flèche au centre de la poutre a pour valeur

- $f = y(\ell/2) = y_1(\ell/2) + y_2(\ell/2) + y_3(\ell/2)$

$$= \frac{23}{1296}\frac{P\ell^3}{EI} + \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI} - \frac{1}{16}\frac{M_0\ell^2}{EI}$$

Application numérique

Les données numériques fournies conduisent, d'après l'aire $F = B\ H = 50$ cm^2 et l'inertie $I = B\ H_3\ /\ 12 = 417$ cm^4 de la section, à la flèche totale suivante

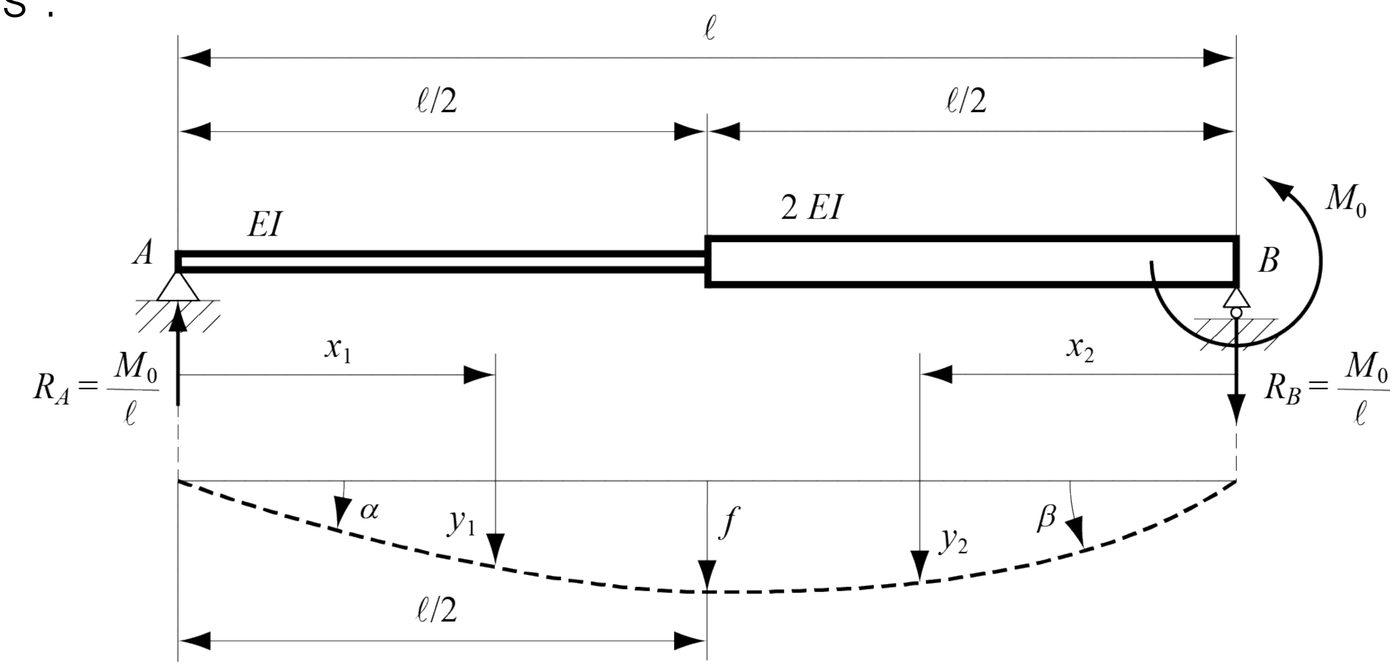
- $f = 0{,}81\ mm\ +\ 1{,}49\ mm - 0{,}86\ mm\ =\ 1{,}44\ mm$

Problème 7.4

En négligeant l'influence de l'effort tranchant, calculer la flèche au centre de la poutre à section variable, ainsi que les rotations aux extrémités.

Données numériques :

$$E = 210 \text{ GPa}$$
$$I = 250 \text{ cm}^4$$
$$M_0 = 20 \text{ kNm}$$
$$\ell = 1 \text{ m}$$



Problème 7.4

Comme la structure présente deux tronçons à section constante, séparons la déformée de la poutre en deux fonctions y_1 et y_2 devant satisfaire des conditions de compatibilité au point de discontinuité de la section.

Le moment de flexion M_1 relatif à la première moitié de la poutre ($0 < x_1 < \ell/2$)

- $M_1(x_1) = R_A x_1 = M_0 \frac{x_1}{\ell}$

L'équation différentielle associée à la déformée y_1 prend la forme suivante

- $EIy_1'' = -M_0 \frac{x_1}{\ell}$

L'intégration successive de cette équation permet d'écrire

- $EIy_1' = -M_0 \frac{x_1^2}{2\ell} + C_1$
- $EIy_1 = -M_0 \frac{x_1^3}{6\ell} + C_1 x_1 + C_2$

où C_1 et C_2 constituent les constantes d'intégration.

De manière analogue, le moment de flexion M_2 sur le deuxième tronçon ($0 < x_2 < \ell/2$)

- $M_2(x_2) = M_0 - R_B x_2 = M_0\left(1 - \frac{x_2}{\ell}\right)$

L'intégration de l'expression différentielles entraîne successivement

- $2EIy_2'' = -M_0\left(1 - \frac{x_2}{\ell}\right)$
- $2EIy_2' = -M_0\left(x_2 - \frac{x_2^2}{2\ell}\right) + D_1$
- $2EIy_2 = -M_0\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6\ell}\right) + D_1 x_2 + D_2$

où D_1 et D_2 sont deux nouvelles constantes d'intégration. Ces quatre inconnues sont déterminées, d'une part, par les conditions aux limites aux extrémités de la poutre (déplacement nul au droit des appuis simples)

- $y_1(x_1 = 0) = 0 = C_2$
- $y_2(x_2 = 0) = 0 = C_2$

D'autre part, par la condition d'égalité des déformées et des pentes au point de discontinuité de la section ($x_1 = x_2 = \ell/2$)

- $y_1(x_1 = \ell/2) = \dfrac{-M_0\ell^2}{48\ EI} + C_1\dfrac{\ell}{2\ EI} = y_2(x_2 = \ell/2) = \dfrac{-5M_0\ell^2}{96\ EI} + D_1\dfrac{\ell}{4\ EI}$
- $y_1'(x_1 = \ell/2) = \dfrac{-M_0\ell}{8\ EI} + C_1\dfrac{1}{EI} = y_2'(x_2 = \ell/2) = \dfrac{3M_0\ell}{16\ EI} - D_1\dfrac{1}{2EI}$

Ce système de deux équations à deux inconnues a pour solution

- $C_1 = \dfrac{M_0\ell}{8}$ $\qquad D_1 = \dfrac{3\ M_0\ell}{8}$

de sorte que les deux déformées et leurs dérivées peuvent être explicitées finalement sous les formes suivantes

- $y_1(x_1) = \dfrac{M_0}{24\ell\ EI}\left(3\ell^2 x_1 - 4x_1^3\right) \qquad 0 < x_1 < \ell/2$
- $y_1'(x_1) = \dfrac{M_0}{8\ell\ EI}\left(\ell^2 - 4x_1^2\right)$
- $y_2(x_2) = \dfrac{M_0}{48\ell\ EI}\left(9\ell^2 x_2 - 12\ell x_2^2 + 4x_2^3\right) \qquad 0 < x_2 < \ell/2$
- $y_2'(x_2) = \dfrac{M_0}{16\ell\ EI}\left(3\ell^2 - 8\ell x_2 + 4x_2^2\right)$

Problème 7.4

La flèche f au centre de la poutre et les rotations α et β aux extrémités s'écrivent

- $f = y_1(\ell/2) = y_2(\ell/2) = \frac{M_0 \ell^2}{24\, EI}$
- $\alpha = y_1'(0) = \frac{M_0 \ell}{8\, EI}$
- $\beta = -y_2'(0) = -\frac{3\, M_0 \ell}{16\, EI}$

Application numérique

Avec les grandeurs numériques données, la flèche f et les rotations α et β valent

- $f = 1{,}6\; mm$
- $\alpha = 0{,}0048\; rad = 0{,}27\,^\circ$
- $\beta = -\,0{,}0071\; rad = -\,0{,}41\,^\circ$

Merci pour vote attention