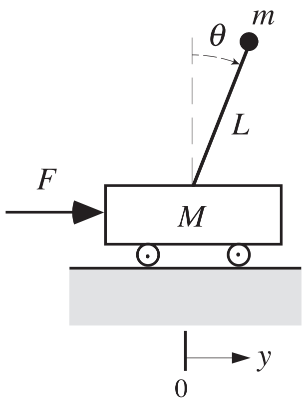
Laboratoire d'Automatique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Prof. D. Bonvin



$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0: \quad \text{système à l'état stationnaire (au repos)}$$

$$y(t) = f[u(t)]: \qquad \text{système statique (pas de mémoire)}$$

Un système dynamique qui possède les propriétés de **l**inéarité, **s**tationarité et **c**ausalité et qui se trouve initialement au **r**epos est appelé un **système lscr**.

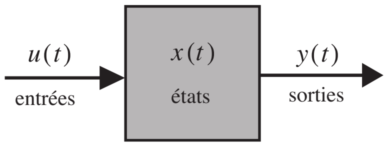


Fig. 1.21 Système $S(\theta)$.

1.5 EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

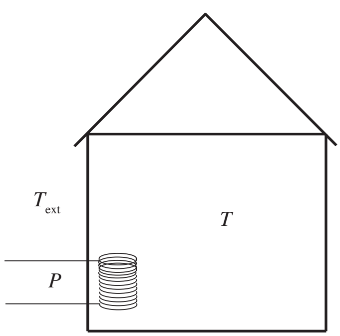
Considérons le comportement thermique d'une maison en hiver. Le système de chauffage permet de réguler la température et de rendre la maison habitable.

a) Quelles variables d'entrée, de sortie et d'état choisir pour établir un modèle qui prédise la température moyenne de la maison en fonction du temps ?

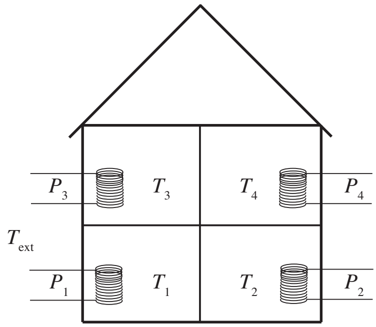
b) Comment étendre ce modèle afin qu'il prédise la température dans plusieurs pièces ?

Solution

a) Entrée : puissance de chauffage P
Etat : chaleur $Q = mc_pT$
Sortie : température mesurée T
Perturbation : température extérieure T_{ext}



b) On considère les pièces séparément, chacune avec son entrée, son état et sa sortie propre :
Entrées : $P_1 - P_4$
Etats : $Q_1 - Q_4$
Sorties : $T_1 - T_4$
Perturbation : T_{ext}



Exercice 2

On a modélisé un système thermique par l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\tau\dot{x}(t) + 3x(t) = u(t) \qquad x(0) = 0$$

où x représente la variation de température autour de son point d'équilibre ($x := T - T_{éq}$), u la variation de la puissance de chauffage autour de son point d'équilibre ($u := P - P_{éq}$) et τ la constante de temps proportionnelle à la capacité thermique du système.

a) Ce système est-il statique ou dynamique ?

b) Calculer sa réponse à un saut unité de l'entrée. Quelle est l'influence du paramètre τ sur la réponse ?

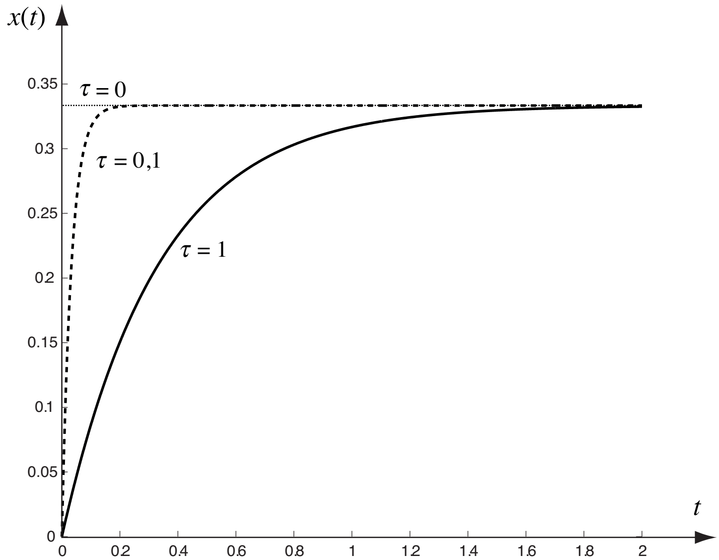
Solution

a) Le système est dynamique car il fait intervenir une équation différentielle pour la variable dépendante $x(t)$.

b) Pour $u(t) = 1$, $t \geq 0$, la résolution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre donne :

$$x(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t/\tau}) \qquad t \geq 0$$

On voit ainsi que τ influence la vitesse à laquelle la température approche la nouvelle valeur stationnaire $\bar{x} = 1/3$ (ou $\overline{T} = T_{éq} + 1/3$). Pour τ très petit (peu d'inertie thermique), la nouvelle valeur stationnaire est atteinte quasi-instantanément. Pour $\tau = 0$, le système devient statique et est décrit par la relation algébrique $3x = u$, qui donne la solution $x = u/3$, dans notre cas $1/3$.



Exercice 3

Pour une voiture roulant à vitesse constante sur une route plane, il existe une relation entre la position de l'accélérateur et la vitesse.

a) Dessiner schématiquement cette relation.

b) Considérons cette voiture en condition de trafic urbain sur plusieurs kilomètres et prenons des mesures instantanées de sa vitesse et de la position de l'accélérateur. Ces mesures instantanées correspondent-elles à la relation du point a) ?

Solution

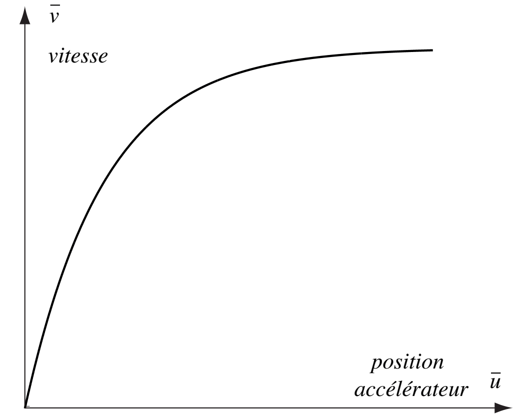
a) Puisque la vitesse est constante, la voiture est dans un état quasi-stationnaire. Le couple fourni par le moteur ne sert qu'à compenser les forces de frottement. En appliquant la loi de mouvement de Newton, on obtient la relation mathématique suivante:

$$m\dot{v}(t) = ku(t) - fv^2(t)$$

où m est la masse de la voiture, v sa vitesse, u l'entrée (la position de l'accélérateur), ku la force fournie par le moteur et fv^2 la force de frottement. A vitesse constante $(\dot{v} = 0)$, on aura $0 = k\bar{u} - f\bar{v}^2$ et donc

$$\bar{v} = c\sqrt{\bar{u}}$$

où la constante c vaut $\sqrt{k/f}$.



b) Les mesures instantanées n'ont plus rien à voir avec la relation quasi-stationnaire du point a) car il s'agit, dans le trafic urbain, d'accélérer et de freiner le véhicule. Les mesures instantanées $u(t)$ et $v(t)$ sont liées entre elles par la loi de mouvement de Newton.

Exercice 4

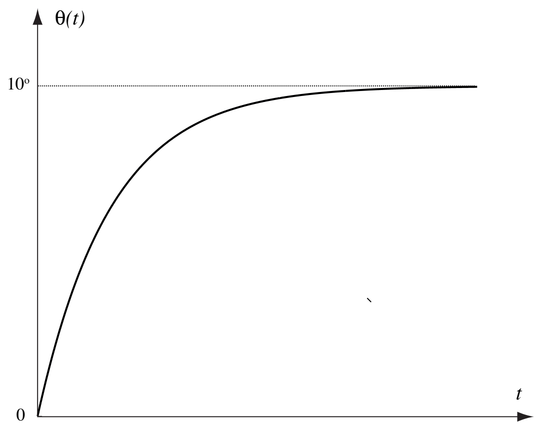
Pour des conditions de vent stables, une girouette pointe dans la direction du vent. Cependant, lorsque le vent tourne, la girouette n'indique pas instantanément la direction du vent.

a) Dessiner schématiquement la direction de la girouette lorsque la direction du vent change soudainement de 10°.

b) Identifier les grandeurs d'entrée, d'état et de sortie susceptibles d'entrer dans un modèle dynamique de la girouette.

Solution

a)



La girouette ne suit pas instantanément la direction du vent car elle a une certaine inertie due d'abord à sa masse non nulle, mais aussi à certains éléments amortisseurs qui sont là pour éviter que la girouette suive trop rapidement tous les petits tourbillons de vent.

b) La girouette peut être modélisée comme un élément mécanique de rotation avec la force du vent comme entrée, la position et la vitesse angulaires comme variables d'état et la position angulaire comme sortie.

Exercice 5

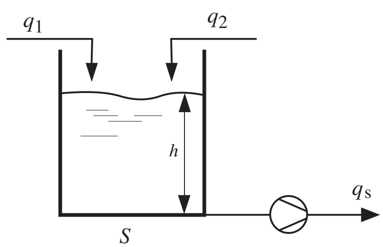
Le niveau d'eau dans un réservoir varie en fonction du temps. On désire établir un modèle dynamique capable de prédire les variations de ce niveau.

a) Quelles variables d'entrée et de sortie choisir ?

b) Combien de variables d'état (nombre d'équations différentielles du premier ordre) sont nécessaires ?

Solution

a)



Le choix des variables d'entrée et de sortie dépend de la situation physique et des mesures disponibles. Les entrées vont correspondre aux variables que l'on peut manipuler indépendamment (un ou plusieurs débits parmi q_1, q_2 et q_s). Les sorties correspondent aux variables dépendantes que l'on mesure, par exemple h.

Les variables d'état sont les variables dépendantes pour lesquelles interviennent des dérivées. Dans le cas particulier, la variation de niveau dans le réservoir s'obtient à partir du bilan de masse

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = w_1 + w_2 - w_s \quad (1)$$

avec $m = \rho Sh$, $w_i = \rho q_i$ où m représente la masse du liquide dans le réservoir, ρ la masse volumique, S la section de la cuve, h le niveau, w_i le débit massique i et q_i le débit volumique correspondant.

L'équation (1) peut aussi s'écrire

$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q_1 + q_2 - q_\mathrm{s}$$

Considérons deux situations physiques différentes:

- Le débit d'alimentation q_1 varie en fonction de la situation en amont mais n'est pas ajustable dans l'étude de ce réservoir et q_2 est constant. Le débit de fuite q_s est ajustable au travers de la pompe. On mesure le niveau h à l'aide de la différence de pression $\Delta p = \rho g h$. Pour cette situation, nous avons les grandeurs d'entrée, d'état, de sortie, de perturbation et les paramètres suivants:

  $u := q_\mathrm{s}, \quad x := h, \quad y := \Delta p, \quad d := q_1, \quad \theta := (S, q_2)$

- Les débits d'alimentation q_1 et q_2 sont ajustables, le débit q_s dépend du niveau, $q_\mathrm{s} = k\sqrt{h}$, et on mesure h directement. Pour cette situation nous avons les grandeurs suivantes:

  $u := (q_1, q_2), \quad x := h, \quad y := h, \quad \theta := (S, k)$

  et le modèle non linéaire:

$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q_1 + q_2 - k\sqrt{h}$$

b) Dans chaque situation considérée, il y a une seule variable d'état, le niveau h.

Exercice 6

Pour les 4 systèmes donnés ci-dessous, indiquer chaque fois si le système est statique ou dynamique, monovariable ou multivariable, linéaire, stationnaire, causal et initialement au repos. On utilise les notations conventionelles, soit u pour les entrées, x pour les variables d'état et y pour les sorties:

a) $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u_1 & \qquad x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u_2 & x_2(0) &= x_{20} \\ y &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \ddot{x} + 2x\dot{x} + 3x &= 3u & \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1 \\ y &= x + 2u \end{aligned}$$

c) $y(t) = (2-t)u^2(t)$

d) $y(t) = u(t-1) + u(t) + u(t+1)$

Solution

a) dynamique: dérivées $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$

multivariable: deux entrées u_1 et u_2, une sortie y
linéaire: les variables u, x et y apparaissent linéairement dans le modèle
stationnaire: tous les paramètres sont constants
causal: pas de dépendance du futur
initialement au repos: considérons $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$, ce qui donne l'état d'équilibre $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$; donc le système sera initialement au repos pour $x_{10} = x_{20} = 0$.

b) dynamique: dérivées $\dot{x}$ et $\ddot{x}$
monovariable: une entrée u, une sortie y
non linéaire: terme non linéaire $x\dot{x}$
stationnaire: tous les paramètres sont constants
causal: pas de dépenance du futur
initialement au repos: considérons $\bar{u} = 0$ pour lequel l'état d'équilibre exige $\bar{x} = 0$, $\dot{x} = 0$; comme $\dot{x}(0) \neq 0$, le système n'est pas initialement au repos.

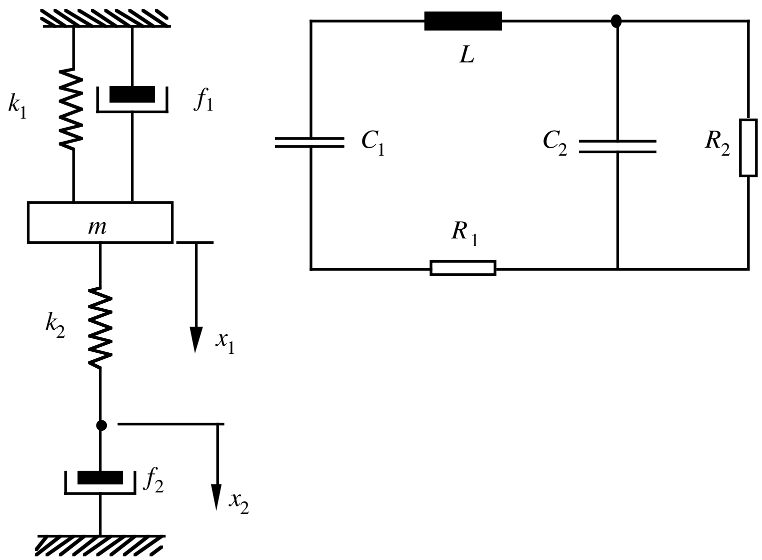
c) statique: pas de dérivée, équation algébrique, $y(t)$ ne dépend que de $u(t)$
monovariable: une entrée u, une sortie y
non linéaire: terme non linéaire u^2
non stationnaire: paramètre variable $(2 - t)$
causal: pas de dépendance du futur
initialement au repos car système statique

d) dynamique: le système a de la mémoire car la sortie au temps t dépend de l'entrée au temps $t-1$
monovariable: une entrée u, une sortie y
linéaire: les variables u et y apparaisssent linéairement
non causal: l'entrée future $u(t+1)$ influence la sortie au temps t
initialement au repos: le système est au repos à $t = 0$ si, étant donné $u_{[0,\infty)} = 0$, il n'évolue pas, c'est-à-dire $y_{[0,\infty)} = 0$. Cela sera le cas si $u_{[-1,0)} = 0$.

2.9 EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

a) Ecrire les équations dynamiques des deux systèmes suivants:



b) Montrer que ces deux systèmes sont analogues et proposer une analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques qui interviennent dans ces deux systèmes.

Solution

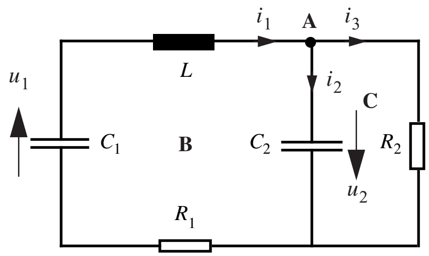
a) Modélisons tout d'abord le *système mécanique*. Pour faciliter la mise en équation, on considère séparement les deux sous-systèmes avec les déplacements respectifs x_1 et x_2.
Le premier sous-système est décrit par l'équation dynamique:

$$m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - f_1\dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

L'équation dynamique du point matériel qui constitue le second sous-système s'écrit:

$$0 = -f_2\dot{x}_2 + k_2(x_1 - x_2) \qquad (2)$$

b) Le modèle du *système électrique* est obtenu sur la base des équations écrites au nœud **A** et pour les mailles **B** et **C** avec: $i_1 = \dot{q}_1 = C_1\dot{u}_1$ et $i_2 = \dot{q}_2 = C_2\dot{u}_2$, où les q_i représentent les charges.



Nœud **A** $$i_2 = i_1 - i_3 \tag{3}$$

Maille **B** $$u_1 + L\frac{di_1}{dt} + u_2 + R_1 i_1 = 0$$

$$\frac{q_1}{C_1} + L\ddot{q}_1 + \frac{q_2}{C_2} + R_1\dot{q}_1 = 0$$

qui s'écrit, grâce à la relation *(3)* et en considérant le débit de charge $i_3 = \dot{q}_3$:

$$L\ddot{q}_1 = -\frac{1}{C_1}q_1 - R_1\dot{q}_1 - \frac{1}{C_2}(q_1 - q_3) \tag{4}$$

Maille **C** $$R_2 i_3 = u_2$$

$$R_2\dot{q}_3 = \frac{q_2}{C_2}$$

$$R_2\dot{q}_3 = \frac{1}{C_2}(q_1 - q_3) \tag{5}$$

Les deux systèmes sont représentés par des équations différentielles structurellement identiques, (1) et (2) d'un côté et (4) et (5) de l'autre. Les deux systèmes sont dits *analogues*. Il est tout à fait possible de réaliser le circuit électrique pour déterminer le comportement du montage mécanique.

En comparant respectivement les relations *(1)* et *(4)* ainsi que *(2)* et *(5)*, il est possible de définir comme grandeurs électriques équivalentes des positions x_1 et x_2 les charges q_1 et q_3. L'équivalent de la masse est l'inductance, l'équivalent d'un coefficient de frottement visqueux (dissipatif) est la résistance (dissipative) et l'équivalent du coefficient de rigidité d'un ressort est l'inverse de la capacité.

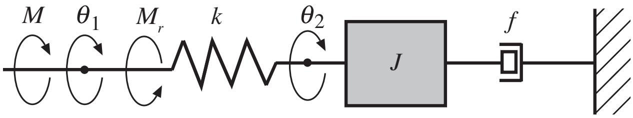
$x_1 \leftrightarrow q_1$ $\qquad$ $k_i \leftrightarrow \frac{1}{C_i}$

$x_2 \leftrightarrow q_3$ $\qquad$ $f_i \leftrightarrow R_i$

$m \leftrightarrow L$

Exercice 2

Soit le système mécanique de rotation suivant:



entraîné par le couple M et caractérisé par le moment d'inertie J, l'élément flexible de rotation k et le frottement visqueux f.

a) Modéliser ce système dynamique.

b) Proposer un système électrique qui soit analogue à ce système mécanique.

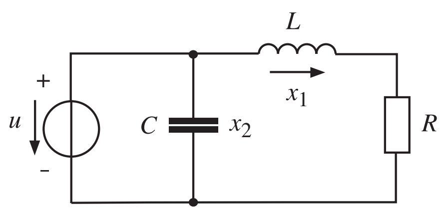
Solution

a) Modèle dynamique (ressort sans inertie, $J_r = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\text{Pour } \theta_1 \text{: } 0\ddot{\theta}_1 = M + M_r = M - k(\theta_1 - \theta_2) \\ &\text{Pour } \theta_2 \text{: } J\ddot{\theta}_2 = -M_R - M_f = k(\theta_1 - \theta_2) - f\dot{\theta}_2 \end{aligned}\right\} J\ddot{\theta}_2 = M - f\dot{\theta}_2$$

$$\text{Avec } \omega_2 = \dot{\theta}_2 \text{ : } J\dot{\omega}_2 + f\omega_2 = M$$

b) inertie $\leftrightarrow$ L
ressort $\leftrightarrow$ C
frottement $\leftrightarrow$ R



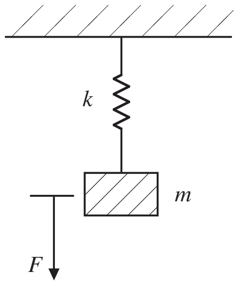
$$L\dot{x}_1 + Rx_1 = u$$

Les systèmes mécaniques et électriques sont analogues.

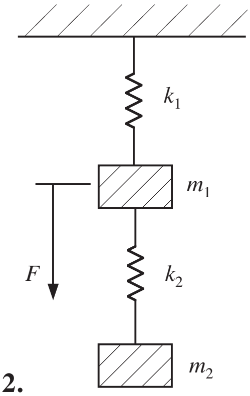
Exercice 3

a) Grouper les 18 systèmes dynamiques suivants (9 systèmes mécaniques et 9 systèmes électriques) en 9 paires de systèmes analogues.

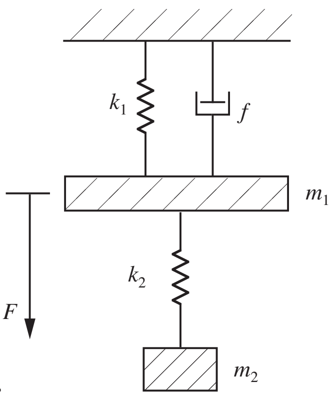
b) Certains de ces systèmes n'ont pas de point d'équilibre. Lesquels?



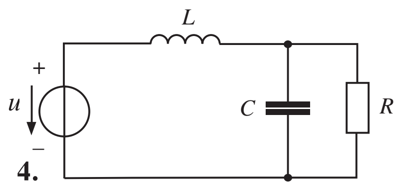
1.



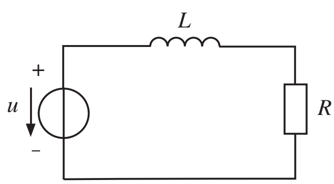
2.



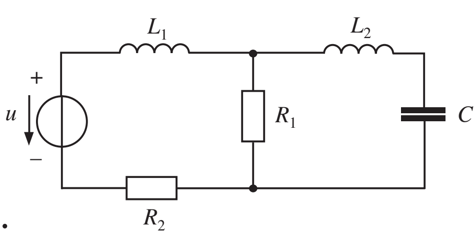
3.



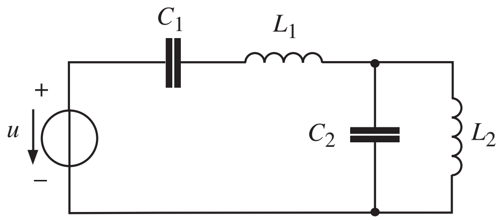
4.



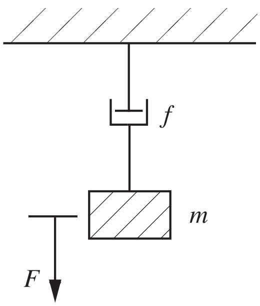
5.



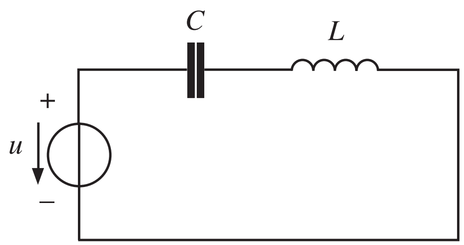
6.



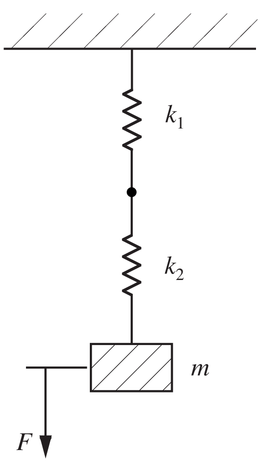
7.



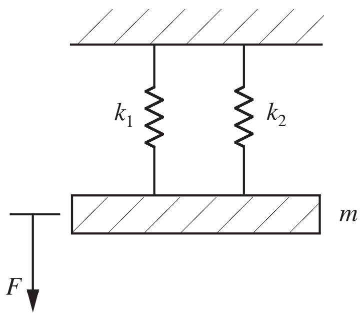
8.



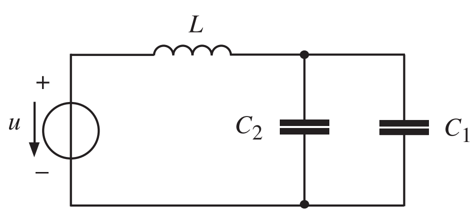
9.



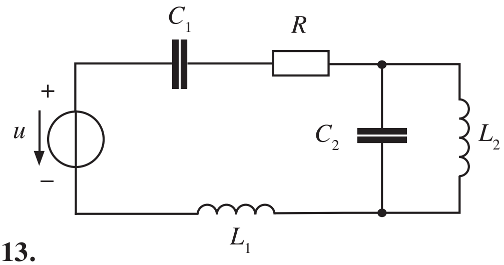
10.



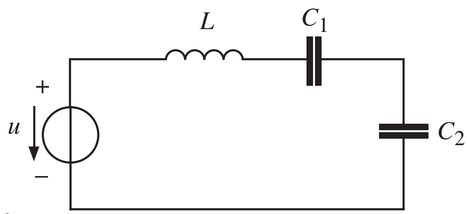
11.



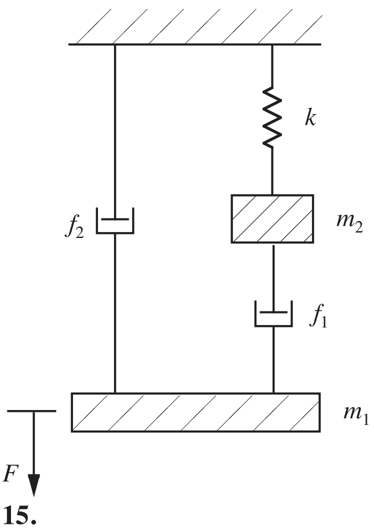
12.



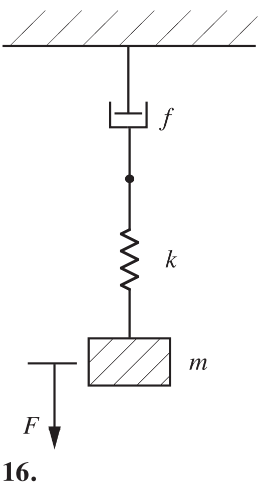
13.



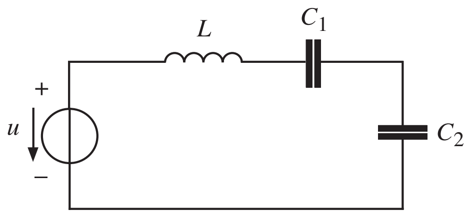
14.



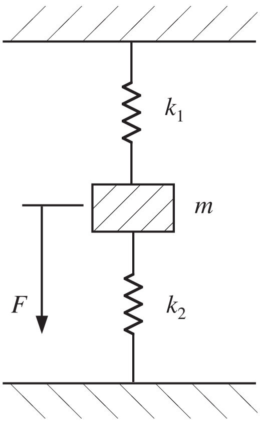
15.



16.



17.



18.

Solution

a) (1, 9), (2, 7), (3, 13), (4, 16), (5, 8), (6, 15), (10, 12), (11, 17), (14, 18).

b) Sans point d'équilibre: (4, 16), (5, 8), (6, 15).

Exercice 4

Soit la paire de systèmes analogues (14, 18) donnée à l'exercice précédent. Montrer que ces deux systèmes dynamiques ont bien le même ordre, c'est-à-dire le même nombre d'équations différentielles du premier ordre.

Solution

a) La modélisation du système mécanique 18 donne:

$$m\ddot{x} = F - k_1 x - k_2 x = F - k_t x$$

avec x le déplacement de la masse et $k_t = k_1 + k_2$ la constante de ressort totale résultant de la mise en parallèle des ressorts (même déplacement).
En définissant $x_1 := x$ et $x_2 := \dot{x}$, on obtient les deux équations différentielles du premier ordre suivantes:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}[F - k_t x_1] \qquad x_2(0) = x_{20}$$

b) Le système électrique a trois éléments dynamiques (L, C_1 et C_2) pour lesquels on peut écrire 3 équations différentielles de premier ordre. On note cependant que les 2 capacités sont en série et donc traversées par le même courant, ce qui permet de travailler avec la capacité toale C_t selon la loi

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

En notant x_1 la tension aux bornes des deux capacités en série et x_2 le courant qui les traverse, la modélisation donne :

$$C_t\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = x_{10}$$

$$L\dot{x}_2 + x_1 - u = 0 \qquad x_2(0) = x_{20}$$

ou

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_t}x_2 \qquad x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}[u - x_1] \qquad x_2(0) = x_{20}$$

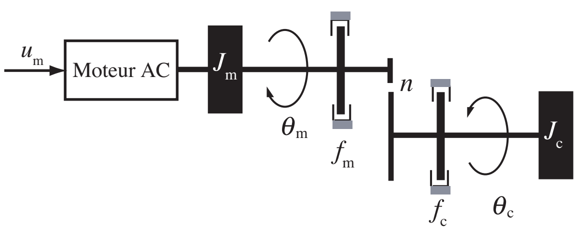
Les deux systèmes dynamiques sont donc bien d'ordre 2 avec l'analogie position ↔ charge et vitesse ↔ courrant.

Exercice 5

Les moteurs AC travaillent souvent à hautes vitesses et sont connectés à la charge par l'intermédiaire d'un système d'engrenage. La figure représente un moteur AC entraînant une charge au travers d'un système d'engrenage idéal (conserve la puissance) avec un rapport de réduction de n, c'est-à-dire $\theta_m = -n\,\theta_c$, n > 1. J_m représente le moment d'inertie du moteur et de son système d'entraînement, f_m son coefficient de frottement visqueux et θ_m sa position angulaire. J_c, f_c et θ_c sont les grandeurs correspondantes du côté de la charge. Sachant que le couple développé par le moteur AC est donné par :

$$M_m = K_1 u_m - K_2\dot{\theta}_m$$

où u_m représente la tension électrique appliquée au moteur et K_1 et K_2 sont des constantes,



a) Modéliser ce système dynamique.
b) Quel est son ordre ?

Solution

a) *Entraînement :* $$J_m\ddot{\theta}_m = M_m - f_m\dot{\theta}_m - M_{Tm} \tag{1}$$

Charge : $J_c\ddot{\theta}_c = M_{Rc} - f_c\dot{\theta}_c$ (2)

où M_{Tm} et M_{Rc} représentent les couples transmis et reçus au travers de l'engrenage.

Engrenage : $P_{Tm} = P_{Rc} \quad M_{Tm}\dot{\theta}_m = M_{Rc}\dot{\theta}_c \quad \dot{\theta}_m = -n\dot{\theta}_c$ (3)

$$M_{Tm} = M_{Rc}\frac{\dot{\theta}_c}{\dot{\theta}_m} = -M_{Rc}\frac{1}{n} \qquad (4)$$

Moteur électrique : $M_m = K_1u_m - K_2\dot{\theta}_m$ (5)

(1), (3), (4), (5) $\rightarrow$ $J_m(-n)\ddot{\theta}_c = K_1u_m - K_2(-n)\dot{\theta}_c - f_m(-n)\dot{\theta}_c + M_{Rc}\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ $M_{Rc} = -n^2J_m\ddot{\theta}_c - nK_1u_m - n^2(K_2 + f_m)\dot{\theta}_c$ (6)

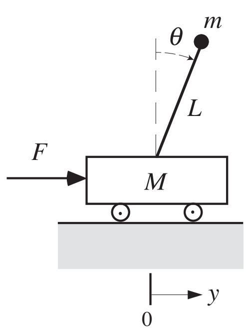
(2) + (6) $\rightarrow$

$$J_c\ddot{\theta}_c = -n^2J_m\ddot{\theta}_c - nK_1u_m - n^2(K_2 + f_m)\dot{\theta}_c - f_c\dot{\theta}_c$$
$$(J_c + n^2J_m)\ddot{\theta}_c + [f_c + n^2(K_2 + f_m)]\dot{\theta}_c = -nK_1u_m$$

b) Système d'ordre 2 pour décrire $\theta_c(t)$. Notons toutefois que ce système électromécanique ne contient pas d'élément flexible et donc ne fait pas intervenir θ_c dans les équations. On peut donc travailler avec la vitesse angulaire $\omega_c = \dot{\theta}_c$ et obtenir un modèle du premier ordre pour décrire ω_c : $(J_c + n^2J_m)\dot{\omega}_c + [f_c + n^2(K_2 + f_m)]\omega_c = -nK_1u_m$.

Exercice 6

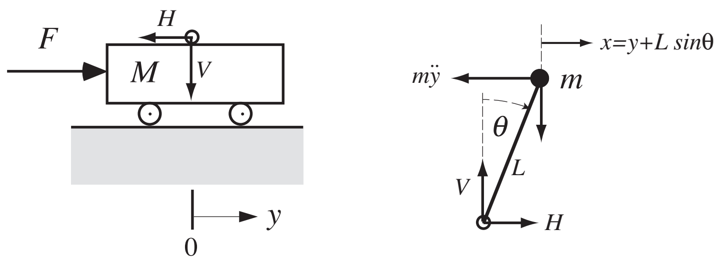
Soit un chariot de masse M pouvant se déplacer horizontalement et supportant un pendule inversé de masse m. On néglige les forces de frottement ainsi que la masse du bras de longueur L. On désire mettre au point une commande dont le but consiste à maintenir le bras en position verticale en exerçant une force F sur le chariot.



- Ecrire les équations dynamiques pour ce système.

Solution

Dénotons par H et V les forces horizontale et verticale exercées par le bras sur le chariot et, par réaction, par le chariot sur le bras en sens inverse. Nous pouvons ainsi considérer les deux sous-systèmes chariot et pendule indépendamment:



L'axe de rotation du bras se déplace avec le chariot dans le sens horizontal. L'accélération du chariot dans la direction y tend à diminuer l'angle θ. Son effet au niveau du couple de rotation correspond donc à une force horizontale de sens inverse, $m\ddot{y}$. L'effet des forces H et V au niveau du couple de rotation est nul.

Loi de mouvement de Newton:

$$M\frac{d^2y}{\mathrm{d}t^2} = F - H \qquad \text{chariot horizontal} \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2}{\mathrm{d}t^2}(y + L\sin\theta) = H \qquad \text{pendule horizontal} \qquad (2)$$

$$m\frac{d^2}{\mathrm{d}t^2}(L\cos\theta) = mg - V \qquad \text{pendule vertical} \qquad (3)$$

$$mL^2\frac{d^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = mgL\sin\theta - m\ddot{y}L\cos\theta \qquad \text{rotation} \qquad (4)$$

Le système est non linéaire à cause des termes $\sin\theta$ et $\cos\theta$. On peut obtenir une approximation linéaire en considérant de petits déplacements θ et ainsi, avec $\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1$:

$$M\ddot{y} = F - H \qquad (5)$$

$$m(\ddot{y} + L\ddot{\theta}) = H \qquad (6)$$

$$0 = mg - V \qquad (7)$$

$$mL^2\ddot{\theta} = mgL\theta - m\ddot{y}L \qquad (8)$$

Les équations (6) et (7) permettent de définir H et V. En éliminant ces variables, le modèle linéaire résultant, avec la variable d'entrée $F(t)$ et les variables dépendantes $y(t)$ et $\theta(t)$, s'écrit:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{y} + mL\ddot{\theta} = F & (9) \\ \ddot{y} + L\ddot{\theta} - g\theta = 0 & (10) \end{cases}$$

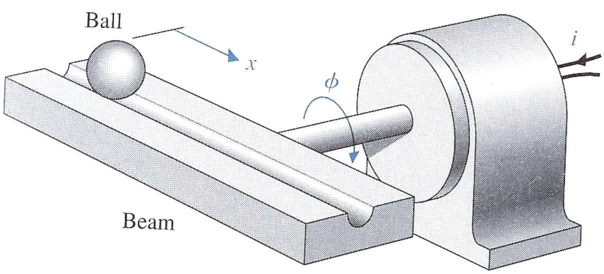
Exercice 7

On souhaite balancer une balle sur une barre, laquelle est actionnée sans frottement par un moteur DC dont l'entrée est le courant $i(t)$. Pour la modélisation du système, on considère deux hypothèses différentes:

a) La balle ne roule pas mais glisse simplement sans frottement sur la barre.

b) La balle roule sans glisser sur la barre.

La balle de rayon r a une masse m. La constante de couple du moteur est K_{m}. Le moment d'inertie du système barre-balle est J, indépendamment de la position de la balle.



- Pour chaque cas, introduire les hypothèses nécessaires supplémentaires et écrire les équations dynamiques du système barre-balle.

Solution

a) Système barre-balle sans frottement:

$$J\ddot{\phi} = K_{\mathrm{m}} i \tag{1}$$

Balle qui glisse sans frottement:

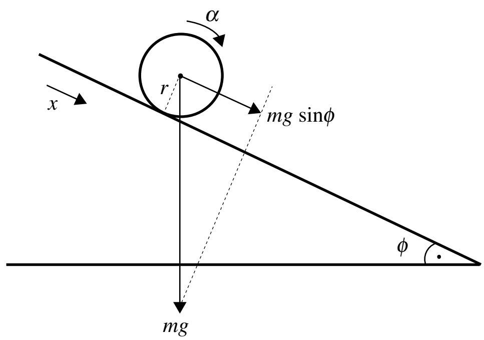
$$m\ddot{x} = mg\sin\phi \tag{2}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = g\sin\phi$$

Système dynamique comprenant les équations (1) et (2). Pour de petits angles, $\sin\phi \simeq \phi$.

b) Balle qui roule sans glisser autour du point A:

$$J_{\mathrm{A}}\ddot{\alpha} = (mg\sin\phi)r \qquad x = r\alpha$$



$$J_A = J_{\text{balle}} + mr^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

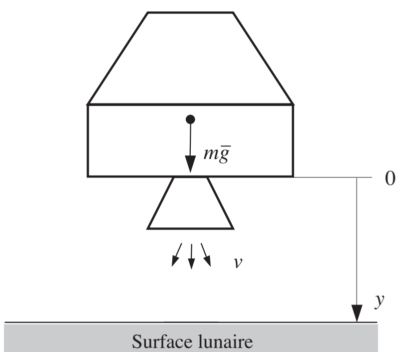
$$\rightarrow \frac{7}{5}mr^2\frac{\ddot{x}}{r} = (mg\sin\phi)r$$

$$\rightarrow \frac{7}{5}\ddot{x} = g\sin\phi \qquad (3)$$

Système dynamique comprenant les équations (1) et (3). Pour de petits angles, $\sin\phi \simeq \phi$.

Exercice 8

Considérons un module lunaire qui veut alunir. La poussée vers le haut est due à l'expulsion des gaz. La variable de commande (entrée) est le débit massique w de gaz expulsé vers l'extérieur. La vitesse d'expulsion est proportionnelle à ce débit, $v = kw$.



a) Ecrire un modèle dynamique qui permette de décrire la position $y(t)$ et la masse $m(t)$.

b) Quel est l'ordre de ce modèle ? Est-il linéaire et stationnaire ? (justifier)

Solution

a) Bilan de masse pour le module:

$$\dot{m}(t) = -w(t) \tag{1}$$

Bilan de quantité de mouvement pour le module:

$$\dot{p} = m\bar{g} \tag{2}$$

Ce système est particulier en ce sens qu'avec l'expulsion de gaz il y a formation d'un deuxième système (le gaz expulsé) avec une vitesse différente de celle du module.
Pour calculer $\dot{p}$, on considère la quantité de mouvement aux temps t et $t + \Delta t$ après expulsion de la masse $\Delta m < 0$:

	Temps t	Temps $t + \Delta t$
Module:	$m\dot{y}$	$(m + \Delta m)(\dot{y} + \Delta\dot{y})$
Gaz expulsé:	0	$-\Delta m(\dot{y} + v)$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(m + \Delta m)(\dot{y} + \Delta\dot{y}) - \Delta m(\dot{y} + v)] - [m\dot{y}]}{\Delta t}$$

$$\simeq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m\Delta\dot{y} - \Delta m v}{\Delta t} = m\ddot{y} - \dot{m}v \tag{3}$$

(1), (2) et (3) avec $v = kw$ donnent:

$$m(t)\ddot{y}(t) = m(t)\bar{g} - kw^2(t) \tag{4}$$

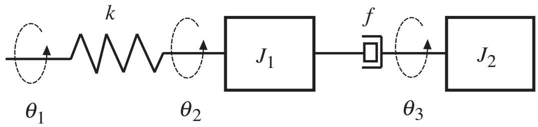
Le modèle dynamique est donné par les équations (1) et (4).

b) Ce modèle dynamique est d'ordre 3 avec la position et la vitesse du module, ainsi que sa masse comme variables d'état. On remarque que la masse dans cet exemple n'est pas un paramètre constant, mais bien une variable d'état qui varie.
Le modèle est non linéaire à cause des termes $m\ddot{y}$ et w^2.
Le modèle est stationnaire car les paramètres $\bar{g}$ et k sont constants.

3.6 EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Soit le système de rotation caractérisé par le coefficient de rigidité k et le couple de frottement $M_\mathrm{f} = f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)$.



a) Ecrire le modèle d'état liant l'entrée θ_1 à la sortie θ_3. Le modèle est-il linéaire ?

b) Expliciter les matrices d'état A, B et C.

Solution

a) $J_1\ddot{\theta}_2 = k(\theta_1 - \theta_2) - f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)$

$J_2\ddot{\theta}_3 = f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)$

Modèle linéaire

$$x_1 := \theta_2 \quad x_2 := \dot{\theta}_2 \quad x_3 := \theta_3 \quad x_4 := \dot{\theta}_3 \quad u := \theta_1 \quad y := \theta_3$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{k}{J_1}(u - x_1) - \dfrac{f}{J_1}(x_2 - x_4) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{f}{J_2}(x_2 - x_4) \\ y = x_3 \end{cases}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k}{J_1} & -\dfrac{f}{J_1} & 0 & \dfrac{f}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{f}{J_2} & 0 & -\dfrac{f}{J_2} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Soit le système non linéaire :

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2 + u \qquad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \qquad x_2(0) = 1$$

- Proposer une approximation linéaire de ce système pour le point de fonctionnement correspondant à $\bar{u} = 2$ et à des valeurs positives de $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$.

Solution

Au point d'équilibre correspondant à $\bar{u} = 2$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2 \\ 0 &= \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= 2 \\ \bar{x}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Linéarisation

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\text{éq}} = -\bar{x}_2 = -1 \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\text{éq}} = -\bar{x}_1 = -2$$

$$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\text{éq}} = 1 \qquad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\text{éq}} = -2$$

$$b_1 = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{\text{éq}} = 1 \qquad b_2 = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{\text{éq}} = 0$$

Système linéarisé

$$\delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 - 2\delta x_2 + \delta u \qquad \delta x_1(0) = 0$$

$$\delta\dot{x}_2 = \delta x_1 - 2\delta x_2 \qquad \delta x_2(0) = 0$$

Exercice 3

Soit le système dynamique :

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \qquad x_1(0) = 0$$

$$\ddot{x}_2 = x_1 - 2\dot{x}_2 - 2u \qquad x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

a) Ce système est-il linéaire et stationnaire? Quel est son ordre?
b) Quelle est la valeur finale de y qui résulte d'un saut de u de deux unités?

Solution

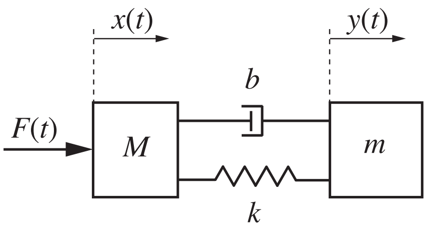
a) Système linéaire et stationnaire d'ordre 3.
b) A l'état stationnaire final, on aura:

$$\left|\begin{array}{l} 0 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2 \\ 0 = \bar{x}_1 - 4 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \bar{x}_1 = 4 \\ \bar{x}_2 = 2 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \bar{y} = \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 8$$

Exercice 4

Soit le modèle d'un système mécanique soumis à la force $F(t)$ et caractérisé par la constante de rigidité k et le coefficient de frottement visqueux b.



a) Ecrire les équations dynamiques pour ce système.
b) Ecrire le modèle d'état correspondant, la sortie à considérer étant $y(t)$.

Solution

a) $$M\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F(t) - b\frac{d}{dt}(x-y) - k(x-y)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = b\frac{d}{dt}(x-y) + k(x-y)$$

b) entrée: $F(t)$
sortie: $y(t)$

$$x_1 := x \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 := \dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{M}\{F - b(x_2 - x_4) - k(x_1 - x_3)\}$$

$$x_3 := y \quad \rightarrow \quad \dot{x}_3 = x_4$$

$$x_4 := \dot{y} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_4 = \frac{1}{m}\{b(x_2 - x_4) + k(x_1 - x_3)\}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & \frac{k}{M} & \frac{b}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Exercice 5

La dynamique d'un moteur électrique est décrite par l'équation

$$\ddot{\theta}(t) + \alpha\dot{\theta}(t) + \theta^2(t) = u(t)$$

où α est une constante.

a) Déterminer le modèle d'état de ce système, en considérant la tension d'alimentation $u(t)$ comme l'entrée du système et la position angulaire $\theta(t)$ comme sa sortie.

b) Linéariser ce modèle pour le point d'équilibre correspondant à $\bar{u} = 1$ et à une valeur positive de $\bar{\theta}$.

Solution

a) $x_1 := \theta \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 := \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - x_1^2 + u$

$y := x_1$

b) Linéarisation

• Calcul du point d'équilibre pour $\bar{u} = 1$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \bar{x}_2 \\ 0 &= -\alpha\bar{x}_2 - \bar{x}_1^2 + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} &\bar{x}_2 = 0 \\ &\bar{x}_1^2 = 1 \rightarrow \bar{x}_1 = \pm 1 \rightarrow \bar{x}_1 = 1 \end{aligned}$$

(hypothèse: $\bar{x}_1 = \bar{\theta} > 0$)

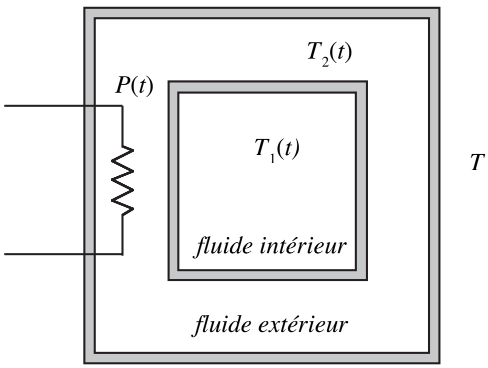
• Modèle d'état linéaire:

$$\delta\dot{x} = A\delta x + b\delta u$$
$$\delta y = c^{\mathrm{T}}\delta x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\bar{x}_1 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\alpha \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 6

La dynamique de l'échangeur de chaleur représenté ci-dessous est régie par les équations différentielles suivantes:



$$m_1c_1\dot{T}_1(t) = k_{12}[T_2(t) - T_1(t)]$$

$$m_2c_2\dot{T}_2(t) = P(t) - k_{12}[T_2(t) - T_1(t)] - k_{20}[T_2(t) - T]$$

La température extérieure T est constante et les valeurs numériques des paramètres du système sont:

$$m_1c_1 = 0{,}5\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right],\ m_2c_2 = 2\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right],\ k_{12} = 1\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}\right] \text{ et } k_{20} = 0{,}5\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}\right]$$

a) Ecrire ce système sous la forme d'un modèle d'état sachant que l'entrée est l'apport de puissance $P(t)$ et la sortie la température du fluide interne $T_1(t)$.

b) Déterminer l'état au point d'équilibre spécifié par une puissance de 20 W et une température extérieure de 20°C.

c) Le modèle d'état du point a) est-il linéaire? Sinon, déterminer un modèle d'état linéaire valable pour des évolutions autour du point de fonctionnement déterminé au point b).

Solution

a) Modèle d'état

$x_1(t) := T_1(t) \qquad u(t) := P(t)$

$x_2(t) := T_2(t) \qquad y(t) := T_1(t)$

$$\left|\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{k_{12}}{m_1c_1}x_1(t) + \frac{k_{12}}{m_1c_1}x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= \frac{k_{12}}{m_2c_2}x_1(t) - \left(\frac{k_{12}}{m_2c_2} + \frac{k_{20}}{m_2c_2}\right)x_2(t) + \frac{k_{20}}{m_2c_2}T + \frac{u(t)}{m_2c_2}\end{aligned}\right.$$

$$\left|y(t) = x_1(t)\right.$$

b) Point d'équilibre

$\bar{u} = 20\ \text{W}, T = 20°\text{C}$

- $0 = -k_{12}\bar{x}_1 + k_{12}\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2$
- $0 = k_{12}\bar{x}_1 - (k_{12} + k_{20})\bar{x}_2 + k_{20}T + \bar{u} \Rightarrow \bar{x}_2 = T + \dfrac{\bar{u}}{k_{20}} = 60°\text{C}$

c) Le modèle d'état est affine mais non linéaire à cause du terme constant $k_{20}T/(m_2c_2)$.
Un modèle d'état linéaire peut s'obtenir en soustrayant des équations dynamiques du processus les équations correspondant au point d'équilibre et en introduisant les variables écart:

$$\delta\dot{x}_1 = -\frac{k_{12}}{m_1c_1}\delta x_1 + \frac{k_{12}}{m_1c_1}\delta x_2$$

$$\delta\dot{x}_2 = \frac{k_{12}}{m_2c_2}\delta x_1 - \left(\frac{k_{12} + k_{20}}{m_2c_2}\right)\delta x_2 + \frac{1}{m_2c_2}\delta u$$

Exercice 7

La dynamique simplifiée d'un avion est décrite par les équations suivantes où l'angle δ est l'entrée du système et l'angle θ sa sortie:

$$\dot{\gamma} = 0{,}5(\gamma - \theta) - 0{,}4\delta - 0{,}05\cos\gamma$$

$$\dot{q} = -5(\gamma - \theta) + 25\gamma - 1{,}5q$$

$$\dot{\theta} = q$$

a) Déterminer le point d'équilibre de ce système lorsque l'avion descend selon un angle constant $\bar{\gamma} = \pi/9$.

b) Donner le modèle d'état linéarisé autour de ce point d'équilibre.

Solution

a) Point d'équilibre

$$0 = 0{,}5(\bar{\gamma} - \bar{\theta}) - 0{,}4\bar{\delta} - 0{,}05\cos\bar{\gamma}$$
$$0 = -5(\bar{\gamma} - \bar{\theta}) + 25\bar{\gamma} - 1{,}5\bar{q}$$
$$0 = \bar{q}$$

Pour $\bar{\gamma}$ donné, il en résulte un système de 3 équations non linéaires avec les 3 inconnues $\bar{\delta}$, $\bar{\theta}$ et $\bar{q}$. Sa résolution donne:

$$\left|\begin{array}{l} \bar{\delta} = 2{,}06 \text{ rad} \\ \bar{q} = 0 \\ \bar{\theta} = -1{,}40 \text{ rad} \\ \bar{\gamma} = \pi/9 = 0{,}35 \text{ rad} \end{array}\right.$$

b) Linéarisation

Soit $x_1 := \gamma, x_2 := q, x_3 := \theta, u := \delta, y := \theta$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0{,}5x_1 - 0{,}05\cos x_1 - 0{,}5x_3 - 0{,}4u = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 = 20x_1 - 1{,}5x_2 + 5x_3 = f_2(x, u) \\ \dot{x}_3 = x_2 = f_3(x, u) \end{array}\right.$$

$$|\, y = x_3 = g(x, u)$$

Le modèle d'état linéarisé est:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \\ \delta\dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 + 0{,}05\sin\bar{\gamma} & 0 & -0{,}5 \\ 20 & -1{,}5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u$$

$$\delta y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix}$$

Pour $\bar{\gamma} = \pi/9, a_{11} = 0{,}52$.

Exercice 8

Soit le système dynamique monovariable

$$\ddot{y} + ay = \dot{u} + bu \qquad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = v_0, u(0) = u_0$$

a) Quel est son ordre?

b) Peut-on mettre ce système dynamique sous la forme d'un modèle d'état?

Solution

a) Ce système est d'ordre 2 car il est décrit par une équation différentielle du deuxième ordre.

b) La particularité de ce système est qu'il fait intervenir $\dot{u}$, la dérivée de l'entrée. De ce fait, il n'est pas directement amenable à la formulation $\dot{x} = Ax + Bu$.

On présente ci-dessous trois tentatives, les deux premières infructueuses, la troisième plus heureuse.

b1) Approche standard

On peut définir

$$x_1 := y \qquad\qquad u_1 := u$$

$$x_2 := \dot{y} \qquad\qquad u_2 := \dot{u}$$

pour obtenir un modèle d'état d'ordre 2 avec deux entrées:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -ax_1 + u_2 + bu_1$$

Malheureusement, les deux entrées $u(t)$ et $\dot{u}(t)$ de ce modèle ne sont pas indépendantes car le fait de spécifier $u(t)$ détermine entièrement sa dérivée $\dot{u}(t)$.

b2) Variable d'état supplémentaire

On introduit une troisième variable d'état pour décrire la dynamique de l'entrée. On a ainsi:

$$x_1 := y \qquad\qquad v := \dot{u}$$

$$x_2 := \dot{y}$$

$$x_3 := u$$

et un modèle d'état d'ordre 3 avec comme entrée $\dot{u}(t)$:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -ax_1 + v + bx_3$$

$$\dot{x}_3 = v$$

Ce modèle d'état n'est malheureusement plus commandé par l'entrée $u(t)$ mais par sa dérivée $\dot{u}(t)$.

b3) Théorie de la réalisation

La théorie de la réalisation (cf. C.T. Chen, Linear System Theory and Design, Oxford Press, 2012) permet de définir deux états x_1 et x_2,

$$x_1 := y$$

$$x_2 := \dot{y} - u$$

qui amènent le système dynamique sous la forme $\dot{x} = Ax + bu$:

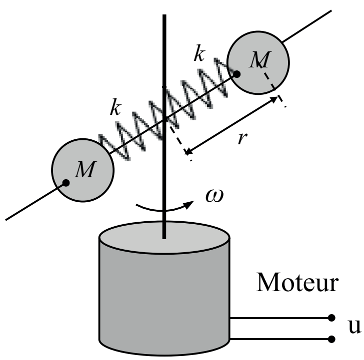
$$\dot{x}_1 = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -ax_1 + bu$$

Notons que les états x_1 et x_2 sont de nature mathématique et ne possèdent en général pas de sens physique particulier.

Exercice 9

Le dispositif mécanique de stabilisation de la vitesse d'un entraînement est représenté ci-dessous:



Lorsque la vitesse du moteur augmente, les deux sphères s'écartent de l'axe de rotation sous l'effet de la force centrifuge. L'augmentation de l'inertie qui en résulte s'oppose à la cause du mouvement. Soit $r_0 = 0{,}02$ [m] la position radiale du centre des sphères à l'arrêt et r cette même position lorsque le système est en rotation. Le déplacement sans frottement des sphères sur leur support est régi par l'équation:

$$M\ddot{r}(t) = M\omega^2(t)r(t) - k[r(t) - r_0], \text{ où } k = 12{,}5 \text{ [N/m]}$$

L'inertie de chacune des sphères de masse $M = 0{,}1$ [kg] et de rayon $\rho = 0{,}01$ [m] par rapport à l'axe de rotation du moteur est donnée par:

$$I(r) = \frac{2}{5}M\rho^2 + Mr^2(t)$$

Le mouvement de ce système peut être grossièrement décrit par la relation:

$$2I(r)\dot{\omega}(t) = -a\omega(t) + bu(t), \text{ où } a = 2 \text{ et } b = 1$$

L'entrée de ce système est la tension d'alimentation $u(t)$ et sa sortie la vitesse angulaire du moteur $\omega(t)$.

a) Décrire la dynamique de ce système par un modèle d'état.

b) Déterminer la tension $\bar{u}$ à appliquer pour maintenir la vitesse à 10 [rad/sec]. Calculer l'état du système au point de fonctionnement spécifié par $\bar{u}$.

c) Linéariser le modèle d'état autour du point de fonctionnement obtenu au point b).

Solution

a) Variables d'état et modèle d'état:

$$\begin{array}{ll} x_1(t) := \omega(t) \rightarrow & \left| \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{a}{2I(x_2)}x_1(t) + \dfrac{b}{2I(x_2)}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1^2(t)x_2(t) - \dfrac{k}{M}x_2(t) + \dfrac{k}{M}r_0 \end{array} \right. \\ x_2(t) := r(t) \rightarrow & \\ x_3(t) := \dot{r}(t) \rightarrow & \end{array}$$

$$|\ \ y(t) = x_1(t)$$

où $I(x_2) = \frac{2}{5}M\rho^2 + Mx_2^2(t)$

b) Pour la vitesse constante $\overline{\omega} = 10$ rad/sec:

$$0 = -a\overline{\omega} + b\bar{u} \Rightarrow \bar{u} = \frac{a}{b}\overline{\omega} \Rightarrow \bar{u} = 20V$$

Point d'équilibre:

$\bar{x}_1 = 10$ rad/sec

$$\bar{x}_2 = \frac{kr_0}{k - M\bar{x}_1^2} = 0{,}1 \text{ m}$$

$\bar{x}_3 = 0$

c) Linéarisation

$$f_1(x_1, x_2, u) = -\frac{a}{2I(x_2)}x_1 + \frac{b}{2I(x_2)}u$$

$$f_2(x_3) = x_3$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - \frac{k}{M}x_2 + \frac{k}{M}r_0$$

$$g_1(x_1) = x_1$$

Le modèle d'état linéarisé est:

$$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t)$$

avec:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{-a}{2I(x_2)} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 - \dfrac{k}{M} & 0 \end{bmatrix}_{\text{éq}} = \begin{bmatrix} -996 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{(-ax_1 + bu)}{2\left(\frac{2}{5}M\rho^2 + Mx_2^2\right)}\right\} = \frac{-(-ax_1 + bu)Mx_2}{\left(\frac{2}{5}M\rho^2 + Mx_2^2\right)^2}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{2I(x_2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{éq}} = \begin{bmatrix} 498 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 10

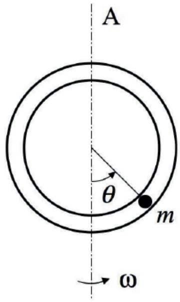
Le mouvement d'une bille de masse m dans un cerceau vertical de rayon r en rotation à vitesse ω autour de l'axe vertical A est régi par l'équation:

$$mr\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - mg\sin\theta + mr\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

La masse $m = 0{,}1$ kg et le coefficient de frottement $b = 0{,}14$ kg m/s sont des paramètres constants du système.

a) En régime stationnaire, identifier tous les points d'équilibre pour $r\omega^2/g > 1$. Calculer numériquement le point d'équilibre $\bar{\theta} \in (0, \pi)$ pour le cas où $r = 1$ m, $\bar{\omega} = 3{,}3657$ rad/s, $g = 9{,}81$ m/s^2.

b) Proposer un modèle d'état pour ce système.



c) Linéariser le modèle d'état autour du point d'équilibre $\bar{\theta}$ en prenant comme entrée la variation de vitesse $\delta\omega$ et comme sortie la variation angulaire $\delta\theta$.

Solution

a) En régime stationnaire ($\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$) :

$$mg\sin\bar{\theta} - mr\bar{\varpi}^2\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} = 0$$

$$\sin\bar{\theta}(g - r\bar{\varpi}^2\cos\bar{\theta}) = 0$$

- $\sin\bar{\theta} = 0$ → $\bar{\theta} = 0$; $\bar{\theta} = \pi$

- $g - r\bar{\varpi}^2\cos\bar{\theta} = 0 \Rightarrow \cos\bar{\theta} = \dfrac{g}{r\bar{\varpi}^2} \Rightarrow \bar{\theta} = \arccos\left(\dfrac{g}{r\bar{\varpi}^2}\right)$

Valeur numérique: $\bar{\theta} = \arccos\dfrac{9{,}81}{(3{,}37)^2} = 0{,}52 \text{ rad} = 30°$

b) Modèle d'état

Entrée $u := \omega$, sortie $y := \theta$

$$\begin{array}{ll} x_1 := \theta \quad \rightarrow & \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_2) \\ x_2 := \dot{\theta} \quad \rightarrow & \dot{x}_2 = \dfrac{-b}{mr}x_2 - \dfrac{g}{r}\sin x_1 + u^2\sin x_1\cos x_1 = f_2(x_1, x_2, u) \end{array}$$

$$y = x_1 = g(x_1)$$

c) Linéarisation

On linéarise le système autour du point d'équilibre

$\bar{u} = 3{,}3657$, $\bar{x}_1 = 0{,}5236$, $\bar{x}_2 = 0$:

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-g}{r}\cos x_1 + u^2(\cos^2 x_1 - \sin^2 x_1) & \dfrac{-b}{mr} \end{bmatrix}_{\bar{x}_1,\, \bar{x}_2,\, \bar{u}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2u\sin x_1 \cos x_1 \end{bmatrix}_{\bar{x}_1,\, \bar{x}_2,\, \bar{u}} \; ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2{,}83 & -1{,}4 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2{,}91 \end{bmatrix} \delta u$$

$$\delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \delta x$$

4.3 EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Un système dynamique possède la réponse impulsionnelle $g(t) = e^{-3t}$.

- Calculer la réponse du système à un saut unité.

Solution

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t e^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}\mathrm{d}\tau = e^{-3t}\frac{1}{3}(e^{3t}-1) = \frac{1}{3}(1-e^{-3t}) \qquad t \geq 0$$

Exercice 2

- Utiliser le *produit de convolution temporel* pour calculer la réponse du système dynamique

$$\dot{x} + 2x = 2u \qquad\qquad x(0) = 0$$

à l'entrée $u(t) = 2\varepsilon(t)$. Noter que la réponse impulsionnelle de ce système vaut $g(t) = 2e^{-2t}$.

Solution

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t 2e^{-2\tau}2\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 4\int_0^t e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau = 4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2\tau}\Big|_0^t$$

$$= 2(1-e^{-2t}) \qquad\qquad t \geq 0$$

Exercice 3

Un circuit électrique est excité par une tension de type impulsion rectangulaire d'amplitude 10 V et de durée 10 µs. La réponse observée à l'aide d'un oscilloscope s'avère être approximativement égale à $y(t) = 0{,}5e^{-100t}$.

a) Déterminer la réponse impulsionnelle du système.

b) A l'aide de l'intégrale de convolution, calculer la réponse indicielle.

Solution

a) Vu la durée très courte de l'entrée, l'impulsion rectangulaire peut être approchée par $a\delta(t)$ où a est déterminé par l'aire de l'impulsion rectangulaire:

$$u(t) = a\delta(t) = 10^{-4}\delta(t) \rightarrow a = 10^{-4}\ Vs$$

Réponse impulsionnelle, c'est-à-dire pour $u(t) = \delta(t)$:

$$g(t) = \frac{y(t)}{a} = 5 \cdot 10^3 e^{-100t} \quad t \geq 0$$

b) Réponse indicielle

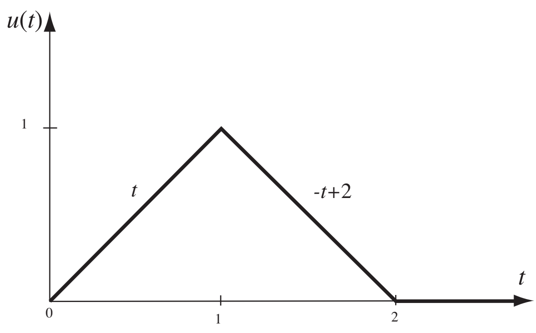
$$\gamma(t) = \varepsilon(t) * g(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t 5 \cdot 10^3 e^{-100(t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau$$

$$= 5 \cdot 10^3 e^{-100t} \int_0^t e^{100\tau}\, \mathrm{d}\tau = 50(1 - e^{-100t}) \quad t \geq 0$$

Exercice 4

La réponse impulsionnelle d'un système dynamique est $g(t) = \varepsilon(t)$.

- Calculer la sortie $y(t)$ de ce système à l'entrée $u(t)$ représentée à la figure ci-dessous:

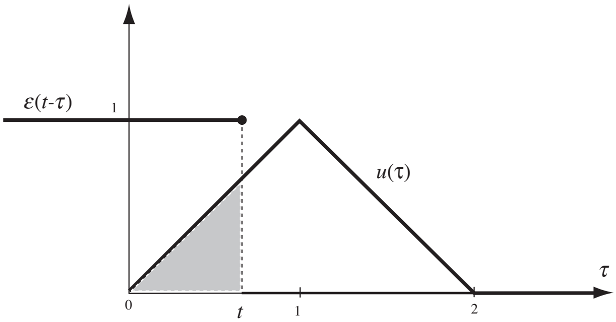


Solution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

a) pour $0 \leq t < 1$

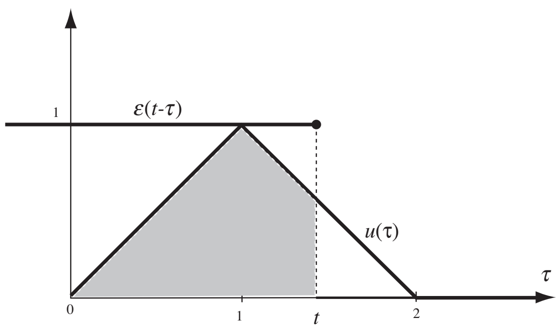
$$\int_0^t u(\tau)\varepsilon(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \tau \cdot 1 \cdot \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}t^2$$



b) pour $1 \leq t < 2$

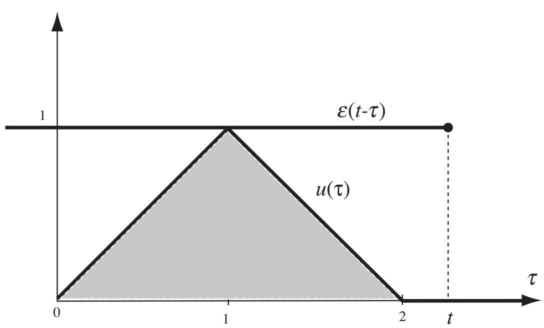
$$\int_0^t u(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^1 \tau \cdot 1 \cdot \mathrm{d}\tau + \int_1^t (-\tau + 2) \cdot 1 \cdot \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\tau + 2\tau\right)\Bigg|_1^t = -\frac{1}{2}(t^2 - 4t + 2)$$



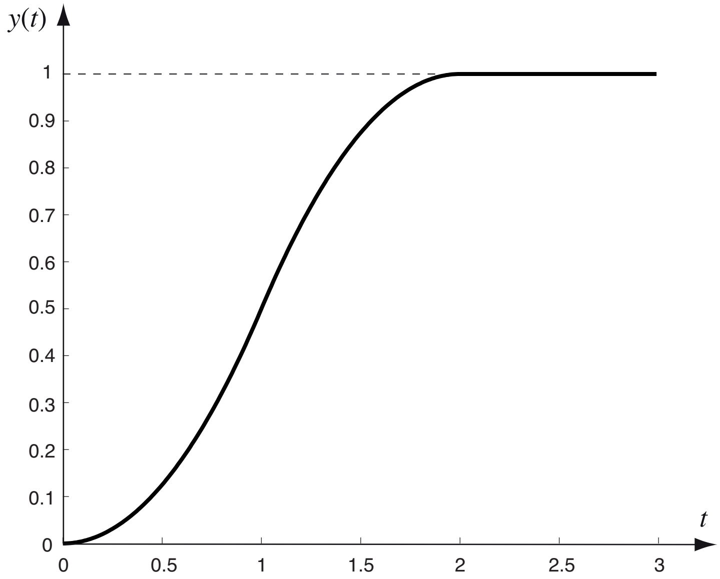
c) pour $t \geq 2$

$$\int_0^t u(\tau)\varepsilon(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$



Ainsi la solution complète devient :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \dfrac{1}{2}t^2 & \text{pour } 0 \le t < 1 \\ -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1 & \text{pour } 1 \le t < 2 \\ 1 & \text{pour } t \ge 2 \end{cases}$$



5.8 EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Soit le système dynamique:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \qquad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \qquad x_2(0) = 0$$

- Calculer la fonction de transfert $X_2(s)/U(s)$ correspondant aux points de fonctionnement
  a) $\bar{u} = 1$
  b) $\bar{u} = 2$

Solution

La fonction de transfert est la même pour $\bar{u} = 1$ et $\bar{u} = 2$ car le système est *linéaire*.

$$\mathcal{L} \quad \rightarrow \quad X_1(s)[s+1] = X_2(s) + U(s)$$

$$X_2(s)[s+2] = X_1(s)$$

$$\rightarrow \quad X_2(s)[s+2][s+1] = X_2(s) + U(s)$$

$$\rightarrow \quad \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

Exercice 2

- Calculer la réponse du système dynamique suivant à une impulsion de Dirac au temps $t = 0$:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = 2u(t) \qquad y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Solution

$$\mathcal{L} \quad \rightarrow \quad [s^2 Y(s) + s] + 2[sY(s) + 1] = 2U(s)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+2)} U(s) - \frac{(s+2)}{s(s+2)}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{s(s+2)}U(s)}_{\text{réponse forcée}} - \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{réponse libre}}$$

Pour $U(s) = 1 \rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s(s+2)} - \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} - \frac{1}{s}$

Méthode des résidus pour calculer A et B:

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{2}{s+2} = 1$$

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{2}{s} = -1$$

On obtient ainsi: $Y(s) = -\frac{1}{s+2}$

$\mathcal{L}^{-1} \quad \rightarrow \quad y(t) = -e^{-2t} \qquad t \geq 0$

Exercice 3

a) Calculer la transformée de Laplace de:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-(t-1)/4} & t \geq 1 \end{cases}$$

b) Calculer la transformée de Laplace inverse de:

1. $Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$

2. $Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4s + 5}$

Solution

a) $\qquad y(t) = e^{-(t-1)/4} \qquad t \geq 1 \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}} \qquad Y(s) = \frac{e^{-s}}{s + \frac{1}{4}} = \frac{4e^{-s}}{4s+1}$

b) 1. $Y(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightarrow} \quad y(t) = 2te^{-t} \qquad t \geq 0$

2. $Y(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+4s+5} = e^{-2s}Y_1(s)$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s+2)^2+1} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightarrow} \quad y_1(t) = e^{-2t}\sin t \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_1(t-2) = e^{-2(t-2)}\sin(t-2) \qquad t \geq 2$$

Exercice 4

La modélisation d'un système dynamique a donné l'équation différentielle suivante:

$$\dot{y}(t) + 2y(t) - 3 = u(t) \qquad y(0) = 1$$

- Evaluer la fonction de transfert correspondante.

Solution

Système non linéaire à cause du terme constant –3. Introduisons:

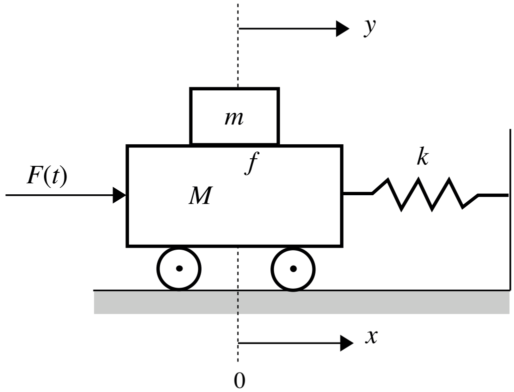
$$\tilde{u} = u + 3 \qquad \rightarrow \qquad \dot{y} + 2y = \tilde{u} \qquad y(0) = 1$$

Fonction de transfert:

$$\frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Exercice 5

Un chariot mobile de masse M est attaché à un mur à l'aide d'un ressort de coefficient de rigidité k. Sur ce chariot se trouve un parallélipipède de masse m qui peut se déplacer par inertie relativement au chariot. Ce déplacement relatif est caractérisé par un frottement visqueux (linéaire) de coefficient f. Le chariot est soumis à la force $F(t)$. Les grandeurs x et y dénotent les déplacements du chariot et du parallélipipède par rapport à un repère fixe, et z le déplacement du parallélipipède relatif au chariot, $z = y - x$.



a) Evaluer la fonction de transfert $Z(s)/F(s)$.

b) Evaluer la fonction de transfert $Z(s)/F(s)$ pour les cas limites «sans frottement» et «avec grand frottement».

Solution

a)
$$\begin{cases} M\ddot{x} = -kx - f(\dot{x}-\dot{y}) + F \\ m\ddot{y} = f(\dot{x}-\dot{y}) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = \dot{x}(0) = 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{matrix}$$

$$\mathcal{L} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} X(s)[Ms^2 + fs + k] = fsY(s) + F(s) \\ Y(s)[ms^2 + fs] = fsX(s) \end{cases}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{fs}{ms^2 + fs} = \frac{f}{ms + f}$$

$$X(s)\left[Ms^2 + fs + k - fs\left(\frac{f}{ms+f}\right)\right] = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{ms + f}{Mms^3 + (M+m)fs^2 + mks + fk}$$

$$\frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{Y(s) - X(s)}{F(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)}\frac{X(s)}{F(s)} - \frac{X(s)}{F(s)} = \left(\frac{Y(s)}{X(s)} - 1\right)\frac{X(s)}{F(s)}$$

$$= \left(\frac{f}{ms+f} - \frac{ms+f}{ms+f}\right)\frac{(ms+f)}{Mms^3 + (M+m)fs^2 + mks + fk}$$

$$= \frac{-ms}{Mms^3 + (M+m)fs^2 + mks + fk}$$

b) $f \to 0$: pas de frottement. La masse m ne bouge pas ($y = 0$) et $z = -x$ (oscillations non amorties du chariot).

$$\lim_{f \to 0} \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{-ms}{Mms^3 + mks} = \frac{-1}{Ms^2 + k}$$

$f \to \infty$: grand frottement. Les deux masses sont collées et il n'y pas de déplacement relatif z.

$$\lim_{f \to \infty} \frac{Z(s)}{F(s)} = 0$$

Exercice 6

Soit le système dynamique avec l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2u(t) - x(t)u(t) \qquad x(0) = 1$$

$$y(t) = x(t-2)$$

a) Ce système est-il linéaire, stationnaire, initialement au repos?
b) Evaluer la fonction de transfert $Y(s)/U(s)$ pour le point de fonctionnement correspondant à $\bar{u} = 1$.

Solution

a) Le système est non linéaire à cause du terme xu, stationnaire car les coefficients sont constants, causal car $y(t)$ ne dépend pas des entrées futures. Pour déterminer si le système est initialement au repos, il faut connaître la valeur de $\bar{u}$. Par exemple, $\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ et le système avec $x(0) = 1$ n'est pas initialement au repos. Par contre, pour $\bar{u} = 1$, $x(0) = \bar{x} = 1$ et le système est initialement au repos.
b) A l'état stationnaire pour $\bar{u} = 1$:

$$0 = -\bar{x} + 2 - \bar{x} \qquad \to \bar{x} = 1$$

Linéarisation de xu:

$$xu \cong \bar{x}\bar{u} + \bar{u}\delta x + \bar{x}\delta u = 1 + \delta x + \delta u$$

Système linéarisé (en variables écart):

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = -\delta x(t) + 2\delta u(t) - \delta x(t) - \delta u(t) = -2\delta x(t) + \delta u(t) & \delta x(0) = 0 \\ \delta y(t) = \delta x(t-2) \end{cases}$$

$$\mathcal{L} \quad \rightarrow \qquad \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-2s}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-2s}}{s+2}$$

Exercice 7

Soit le système dynamique

$$G(s) = \frac{1+\alpha s}{1+s}$$

a) Calculer sa réponse indicielle

b) Esquisser les réponses indicielles pour $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$

Solution

a) $$U(s) = \frac{1}{s}$$

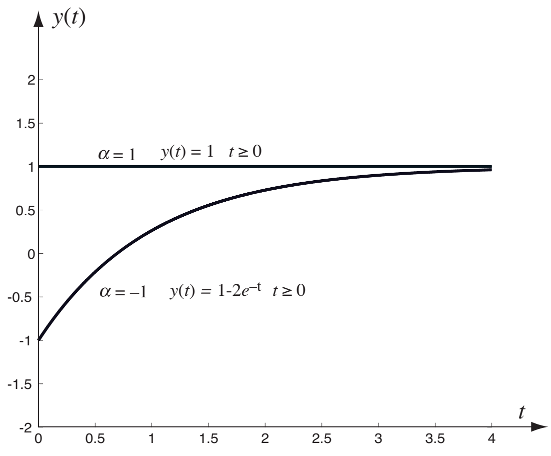
$$Y(s) = \frac{1+\alpha s}{1+s}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+s} = \frac{1}{s} + \frac{\alpha-1}{s+1}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{1+\alpha s}{1+s} = 1$$

$$B = \lim_{s \to -1} \frac{1+\alpha s}{s} = \alpha - 1$$

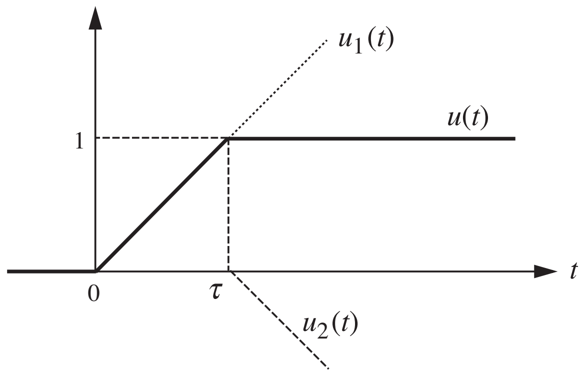
$$\mathcal{L}^{-1} \quad \rightarrow \quad y(t) = 1 + (\alpha-1)e^{-t} \qquad t \geq 0$$

b)



Exercice 8

a) Calculer la transformée de Laplace du signal temporel suivant:



b) Evaluer le signal temporel dont la transformée de Laplace vaut:

$$Y(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Solution

a) $$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau}t & t \geq 0 \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ -\frac{1}{\tau}(t-\tau) & t \geq \tau \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{1}{\tau s^2} - \frac{1}{\tau s^2}e^{-\tau s} = \frac{1}{\tau s^2}[1 - e^{-\tau s}]$$

b) $$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{4s + 10}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{4s+10}{s+2} = 6$$

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{4s+10}{s+1} = -2$$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad \to \quad y(t) = \delta(t) + 6e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Exercice 9

- Calculer la réponse indicielle du système dynamique suivant :

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 5u \qquad\qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Solution

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \qquad\qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$5 = A(s^2 + 2s + 5) + (Bs + C)s$$

$$\begin{array}{lll} s^2 : \ 0 = A + B & & A = 1 \\ s^1 : \ 0 = 2A + C & \rightarrow & B = -1 \\ s^0 : \ 5 = 5A & & C = -2 \end{array}$$

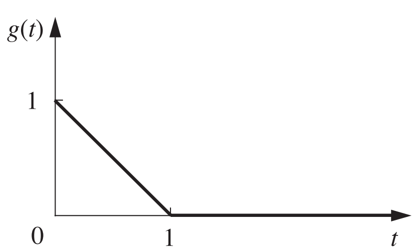
$$\frac{s+2}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \qquad t \geq 0$$

Exercice 10

Soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle d'un système dynamique :



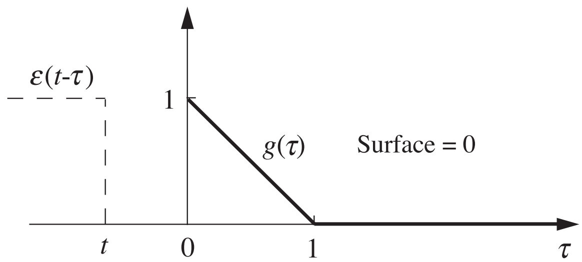
Calculer le produit de convolution $y(t) = g(t) * u(t)$ pour $u(t) = \varepsilon(t)$,
a) par voie temporelle,
b) par voie fréquentielle.

Solution

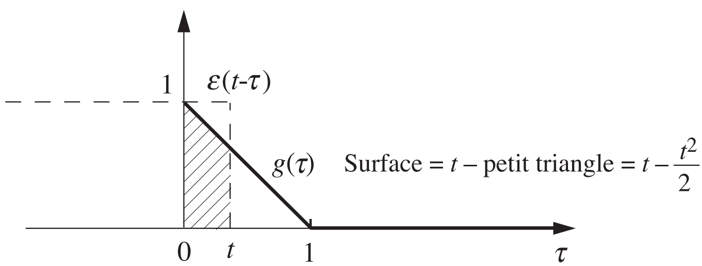
$$g(t) = \varepsilon(t) - t\varepsilon(t) + (t-1)\varepsilon(t-1)$$

a) Calcul par voie temporelle: $y(t) = \int_0^t g(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

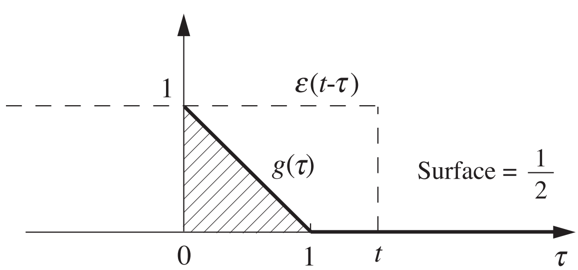
$t < 0$



$0 \le t < 1$

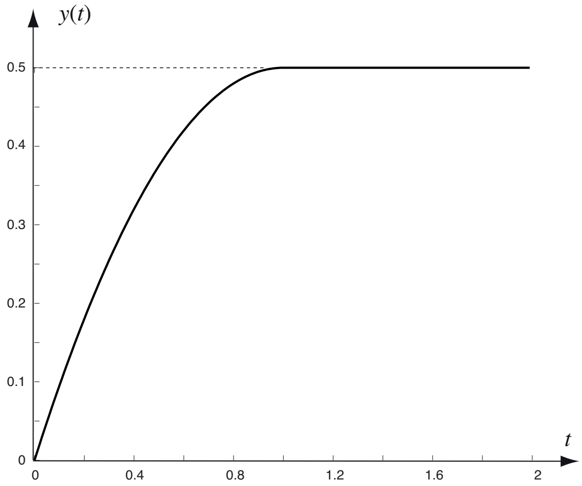


$t \ge 1$



La solution devient ainsi:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t - \dfrac{t^2}{2} & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{2} & t \ge 1 \end{cases}$$



b) Calcul par voie fréquentielle

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2}, \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{e^{-s}}{s^3}$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$y(t) = t\varepsilon(t) - \frac{t^2}{2}\varepsilon(t) + \frac{(t-1)^2}{2}\varepsilon(t-1)$$

$$= \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\varepsilon(t) + \frac{(t-1)^2}{2}\varepsilon(t-1)$$

Exercice 11

Soit $Y(s) = (s + 12)/(s^2 + 4s)$ la transformée de Laplace de la réponse indicielle d'un système dynamique.

a) Calculer $y(t)$.

b) Evaluer la *valeur finale* de la réponse du système à l'entrée $u(t) = 1 - e^{-2t}$.

Solution

a) $Y(s) = \dfrac{s+12}{s^2+4s} = \dfrac{s+12}{s(s+4)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+4}$

$$A = \lim_{s \to 0} sY(s) = \frac{12}{4} = 3$$

$$B = \lim_{s \to -4} (s+4)Y(s) = \frac{-4+12}{-4} = -2$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} - \frac{2}{s+4}\right] = 3 - 2e^{-4t} \quad t \geq 0$$

b) $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{\dfrac{s+12}{s(s+4)}}{\dfrac{1}{s}} = \dfrac{s+12}{s+4}$

Pour $u(t) = 1 - e^{-2t}$, $U(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2}$

$$Y(s) = \left(\frac{s+12}{s+4}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{s+12}{s(s+4)} - \frac{s+12}{(s+4)(s+2)} = \frac{2(s+12)}{s(s+4)(s+2)}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2(s+12)}{(s+4)(s+2)} = 3$$

Le théorème de la valeur finale s'applique car les deux pôles de $sY(s)$ sont négatifs.

Exercice 12

Soit le système décrit par l'équation dynamique

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \qquad y(0) = 1\,,\ \dot{y}(0) = 0$$

- Déterminer sa réponse libre dans le domaine temporel.

Solution

La transformation de Laplace donne:

$$[s^2Y(s) - s] - 2[sY(s) - 1] + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)[s^2 - 2s + 1] - (s-2) = U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-1)^2}U(s)}_{\text{réponse forcée}} + \underbrace{\frac{s-2}{(s-1)^2}}_{\text{réponse libre}}$$

Calcul de la réponse libre $y_1(t)$:

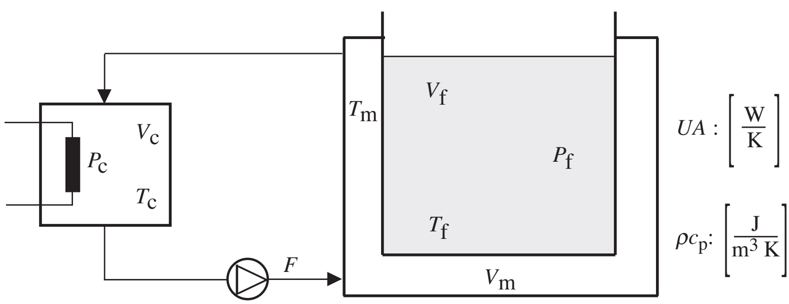
$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}\right]$$

$$y_1(t) = e^{t}\varepsilon(t) - te^{t}\varepsilon(t) = \varepsilon(t)e^{t}[1-t]$$

Exercice 13

On considère le transfert d'énergie d'une source chaude (cuve de volume constant V_c, température T_c, puissance de chauffe P_c) vers un puit froid (réacteur endothermique de volume constant V_f, température T_f, puissance consommée $P_f < 0$). Le transfert a lieu par l'intermédiaire d'un manteau de chauffe (volume constant V_m, température homogène T_m, coefficient de transfert UA entre T_m et T_f).

Le liquide caloporteur circule à l'aide d'une pompe avec un débit volumique F. Les capacités calorifiques du caloporteur et du mélange réactionnel sont identiques et égales à ρc_p. On suppose que le système est bien isolé et qu'il n'y a pas de perte thermique vers l'extérieur.



a) Ecrire un modèle dynamique pour ce système.

b) Sachant que F est constant et que V_m et V_c peuvent être négligés par rapport à V_f ($V_m, V_c \to 0$), déterminer la fonction de transfert $T_f(s)/P_c(s)$.

Solution

a) Bilans thermiques

$$\rho c_p V_f \frac{dT_f}{dt} = UA(T_m - T_f) + P_f \qquad T_f(0) = T_{f0} \qquad (1)$$

$$\rho c_p V_m \frac{dT_m}{dt} = \rho c_p F(T_c - T_m) - UA(T_m - T_f) \qquad T_m(0) = T_{m0} \tag{2}$$

$$\rho c_p V_c \frac{dT_c}{dt} = \rho c_p F(T_m - T_c) + P_c \qquad T_c(0) = T_{c0} \tag{3}$$

b) Hypothèse: $V_m = V_c = 0$

(2) $\rightarrow$ $\quad 0 = \rho c_p F(T_c - T_m) - UA(T_m - T_f)$

(3) $\rightarrow$ $\quad 0 = \rho c_p F(T_m - T_c) + P_c$

$$\rightarrow \qquad UA(T_m - T_f) = \rho c_p F(T_c - T_m) = P_c \tag{4}$$

$$(1) + (4) \rightarrow \rho c_p V_f \frac{dT_f}{dt} = P_c + P_f \tag{5}$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$\rho c_p V_f s T_f(s) = P_c(s) + P_f(s)$$

Fonction de transfert:

$$\frac{T_f(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{\rho c_p V_f s}$$

Exercice 14

Déterminer pour le système dynamique

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 3u \qquad y(0) = 1 \qquad \dot{y}(0) = 0$$

a) la fonction de transfert $Y(s)/U(s)$,
b) un modèle d'état.

Solution

a) La fonction de transfert $Y(s)/U(s)$ ne considère pas les conditions initiales:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2 + 5s + 1}$$

b) $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_2 - x_1 + 3u \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{matrix}$

Exercice 15

Le système dynamique

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u \qquad y(0) = 1 \qquad \dot{y}(0) = -2$$

est soumis à l'entrée $u(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$.

- Calculer sa réponse libre et sa réponse forcée.

Solution

$$\mathcal{L} \rightarrow [s^2Y(s) - s + 2] + 2\,[sY(s) - 1] + Y(s) = 2U(s)$$

$$Y(s)[s^2 + 2s + 1] = 2U(s) + s$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2}U(s) + \frac{s}{(s+1)^2}$$

Réponse libre pour $U(s) = 0$

$$Y_\ell(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y_\ell(t) = e^{-t} - te^{-t} \qquad t \geq 0$$

Réponse forcée pour $U(s) = 1/(s+2)$ et des conditions initiales nulles

$$Y_f(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s+2}\right) = \lim_{s \to -1}\left(-\frac{2}{(s+2)^2}\right) = -2$$

$$B = \lim_{s \to -1}\left(\frac{2}{s+2}\right) = 2$$

$$C = \lim_{s \to -2}\frac{2}{(s+1)^2} = 2$$

$$y_f(t) = -2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Réponse totale

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = -e^{-t} + te^{-t} + 2e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Exercice 16

- Transformer le système dynamique

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t) \qquad x(0) = 2$$

sous la forme d'un système dynamique avec des conditions initiales nulles.

Solution

La transformation de Laplace du système dynamique donne:

$$[sX(s) - 2] + 2X(s) = U(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2}[U(s) + 2] = \frac{1}{s+2}[U(s) + 2\Delta(s)] \tag{1}$$

où $\Delta(s) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

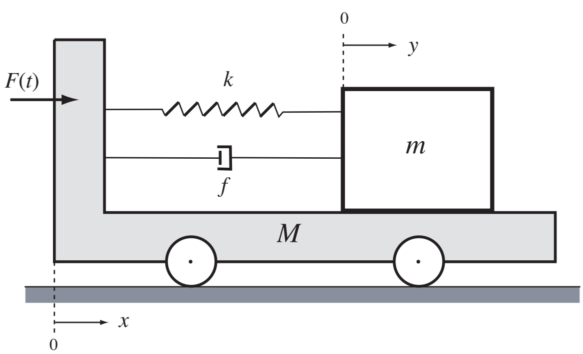
La transformation de Laplace inverse de (1) donne:

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t) + 2\delta(t) \qquad x(0) = 0$$

On voit ainsi que, pour un système dynamique linéaire, des conditions initiales différentes de zéro correspondent à l'application d'une impulsion de Dirac au temps initial.

Exercice 17

On considère un objet de masse m placé sur un chariot de masse M:



L'objet est fixé sur le chariot avec un élément flexible de constante de rigidité k. D'autre part, le mouvement de l'objet est caractérisé par un frottement visqueux de coefficient f. Le chariot est soumis à une force F. On dénote par x la position du chariot par rapport à un repère fixe et par y la position de l'objet par rapport au chariot.

a) Ecrire les équations dynamiques pour ce système et déterminer la fonction de transfert $Y(s)/F(s)$.

b) Considérer le cas limite où l'objet est fixé par un lien rigide et évaluer la fonction de transfert $X(s)/F(s)$.

Solution

a) Chariot: $$M\ddot{x} = F + ky + f\dot{y} \tag{1}$$

Objet: $$m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -ky - f\dot{y} \tag{2}$$

$\Big\downarrow \mathcal{L}$

$$Ms^2X(s) = F(s) + (fs + k)Y(s) \tag{3}$$

$$m[s^2X(s) + s^2Y(s)] = -(fs + k)Y(s) \tag{4}$$

(3) $\rightarrow$ $$X(s) = \frac{F(s) + (fs + k)Y(s)}{Ms^2} \tag{5}$$

(4) + (5) $\rightarrow$ $$\frac{Y(s)}{F(s)} = -\frac{1}{Ms^2 + (M/m + 1)fs + (M/m + 1)k} \tag{6}$$

Le signe négatif de la fonction de transfert indique qu'une force dans le sens de x déplacera l'objet dans le sens négatif de y.

b) Fonction de transfert $X(s)/F(s)$

(5) + (6) $\rightarrow$ $$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + (f/m)s + k/m}{s^2[Ms^2 + (M/m + 1)fs + (M/m + 1)k]} \tag{7}$$

Cas limite d'un lien rigide: $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{X(s)}{F(s)} = \lim_{k \to \infty} \frac{s^2 + (f/m)s + k/m}{s^2[Ms^2 + (M/m + 1)fs + (M/m + 1)k]} = \frac{1}{s^2(M + m)}$$

$$\Rightarrow (M + m)\ddot{x} = F$$

Equation de mouvement pour le cas où l'objet est solidaire du chariot.

Exercice 18

Soit le système dynamique

$$G(s) = \frac{2e^{-s}}{s(5s + 1)}$$

a) Exprimer la relation entrée-sortie à l'aide d'un modèle d'état et déterminer l'*ensemble* des conditions initiales qui assurent que le système soit relâché au temps initial.

b) Calculer la réponse indicielle de ce système.

Solution

a) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2e^{-s}}{5s^2 + s}$

$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$5\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 2u(t-1)$$

Dû à la présence du retard unité, le système dynamique est d'ordre infini (voir exemple 3, section 3.2.2). On peut cependant l'exprimer sous la forme d'un modèle d'état du deuxième ordre avec retard pur:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{5}x_2(t) + \frac{2}{5}u(t-1) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} u(t-1) \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

Pour que le système soit relâché au temps initial $t = 0$, c'est-à-dire qu'il ne subisse plus l'effet des entrées passées, il convient d'avoir:

$$x_{10} = x_{20} = 0 \qquad u_{[-1,\,0)} = 0$$

b) Réponse indicielle pour $U(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{2e^{-s}}{s^2(5s+1)} = Y'(s)e^{-s}$$

$$Y'(s) = \frac{2}{s^2(5s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{5s+1}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left[\frac{2}{5s+1}\right] = \lim_{s \to 0}\left[-\frac{10}{(5s+1)^2}\right] = -10$$

$$B = \lim_{s \to 0} \frac{2}{5s+1} = 2$$

$$C = \lim_{s \to -1/5} \frac{2}{s^2} = 50$$

$$\to y'(t) = -10\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t)t + 10\varepsilon(t)e^{-t/5}$$

$$y(t) = -10\varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t-1)(t-1) + 10\varepsilon(t-1)e^{-(t-1)/5}$$

Exercice 19

Un système dynamique est représenté par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{5(cs+1)}{(as+1)(bs+1)}$$

où a, b et c sont des paramètres que l'on peut choisir par un dimensionnement approprié du système.

a) Montrer que la réponse impulsionnelle de ce système est, en général, discontinue à $t = 0$.

b) Choisir a, b et c pour qu'il n'y ait pas de discontinuité dans la réponse impulsionnelle.

Solution

a) Réponse impulsionnelle:

$$Y(s) = G(s) = \frac{5(cs+1)}{(as+1)(bs+1)}$$

Théorème de la valeur initiale:

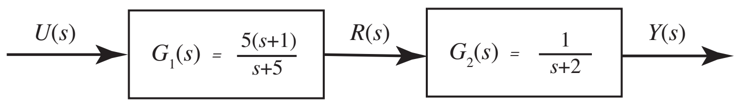
$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = \frac{5s(cs+1)}{(as+1)(bs+1)} = \frac{5c}{ab}$$

La réponse impulsionnelle est, en général, discontinue à $t = 0$ car elle «saute» de 0 à $5c/ab \neq 0$.

b) $\frac{5c}{ab} = 0$ pour $c = 0$ $a, b \neq 0$ (cette dernière condition pour éviter d'avoir un système du premier ordre qui «saute» à $t = 0$)

Exercice 20

Un système mécanique est composé de deux sous-systèmes décrits par leur fonction de transfert $G_1(s)$ et $G_2(s)$.



a) Calculer la réponse indicielle temporelle $y(t)$ du système.

b) Pour $u(t) = \varepsilon(t)$, évaluer la valeur finale du signal $r(t)$.

c) Déduire l'équation différentielle qui régit la dynamique du système complet.

Solution

a) $Y(s) = G_2(s)R(s)$

$R(s) = G_1(s)U(s)$

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

$$= \frac{5(s+1)}{(s+5)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1/2}{s} - \frac{4/3}{s+5} + \frac{5/6}{s+2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}e^{-5t} + \frac{5}{6}e^{-2t} \qquad \text{pour } t \geq 0$$

b) Valeur finale de $r(t)$

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = \lim_{s \to 0} sR(s) = \lim_{s \to 0} sG_1(s)U(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s\frac{5(s+1)}{s+5}\frac{1}{s} = 1$$

Le théorème de la valeur finale est applicable car le pôle de $sR(s)$ vaut –5.

c) $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = G_2(s)G_1(s) = \dfrac{5(s+1)}{(s+5)(s+2)} = \dfrac{5s+5}{s^2+7s+10}$

$$Y(s)(s^2+7s+10) = (5s+5)U(s)$$

La transformation de Laplace inverse nous conduit à l'équation différentielle du système complet:

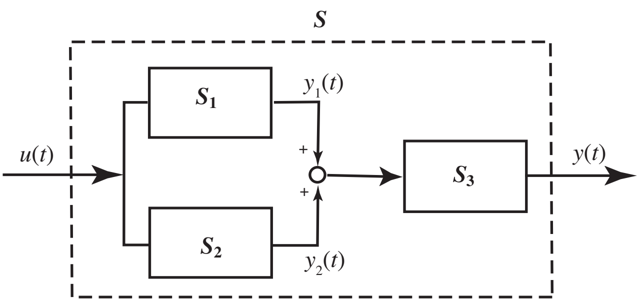
$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 10y(t) = 5\dot{u}(t) + 5u(t)$$

Les conditions initiales $y(0)$, $\dot{y}(0)$ et $u(0)$ ne peuvent pas être déduites de la fonction de transfert du système.

Exercice 21

Un système physique S est composé des trois sous-systèmes S_1, S_2 et S_3. Le sous-système S_1 est régi par l'équation différentielle:

$$\ddot{y}_1(t) + 5\dot{y}_1(t) + 6y_1(t) = \dot{u}(t) + u(t), \qquad y_1(0) = \dot{y}_1(0) = u(0) = 0$$



Les sous-systèmes S_2 et S_3 sont décrits par les fonctions de transfert:

$$G_2(s) = \frac{1}{s+2}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{s}$$

a) Calculer la fonction de transfert $Y(s)/U(s)$ du système complet S.
b) Evaluer la valeur initiale et la valeur finale de la réponse impulsionnelle du système S.

Solution

Système 1

$$s^2Y_1(s) + 5sY_1(s) + 6Y_1(s) = sU(s) + U(s)$$

$$Y_1(s)(s^2 + 5s + 6) = (s+1)U(s)$$

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Système 2

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Système 3

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{Y_1(s)+Y_2(s)} = \frac{1}{s}$$

a) *Système global S*

$$Y(s) = G_3(s)[G_1(s) + G_2(s)]U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_3(s)[G_1(s) + G_2(s)]$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} + \frac{1}{s+2}\right] = \frac{2}{s(s+3)}$$

b) *Valeur initiale*

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{s \to \infty} sG(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{2}{s+3} = 0$$

Valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2}{s+3} = \frac{2}{3}$$

Le théorème de la valeur finale est applicable car le pôle de $sG(s)$ vaut -3.

Exercice 22

Un système dynamique est décrit par le modèle d'état

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)\,, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1 \;\; 0)x(t)$$

a) Déterminer la fonction de transfert de ce système.
b) Calculer sa réponse impulsionnelle.
c) Calculer sa réponse libre.

Solution

a) La fonction de transfert ne considère pas les condition initiales. Pour des conditions initiales nulles:

$$\dot{x}_1(t) = ax_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX_1(s) = aX_2(s) \tag{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_1(t) + u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX_2(s) = -aX_1(s) + U(s) \tag{2}$$

$$y(t) = x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = X_1(s) \tag{3}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

b) Pour $U(s) = 1$, $Y(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \varepsilon(t)\sin(at)$

c) Equation dynamique: $\ddot{y}(t) + a^2 y(t) = au(t)$

avec $y = x_1$ et $\dot{y} = \dot{x}_1 = ax_2$

Réponse libre pour $u(t) = 0$:

$$\ddot{y}(t) + a^2 y(t) = 0 \qquad y(0) = x_{10}\,, \quad \dot{y}(0) = ax_{20}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2 Y(s) - sx_{10} - ax_{20} + a^2 Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + a^2) = sx_{10} + ax_{20}$$

$$Y(s) = \frac{sx_{10} + ax_{20}}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}x_{10} + \frac{a}{s^2 + a^2}x_{20}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x_{10}\varepsilon(t)\cos(at) + x_{20}\varepsilon(t)\sin(at) \\ &= \varepsilon(t)[x_{10}\cos(at) + x_{20}\sin(at)] \end{aligned}$$

Exercice 23

Montrer que la transformée de Laplace de $\varepsilon(t)\sin(\omega t + \phi)$ correspond bien à l'entrée 10 du dictionnaire de la transformation de Laplace:

$$\frac{s\sin\phi + \omega\cos\phi}{s^2 + \omega^2}$$

Solution

La relation trigonométrique

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

permet d'écrire:

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi$$

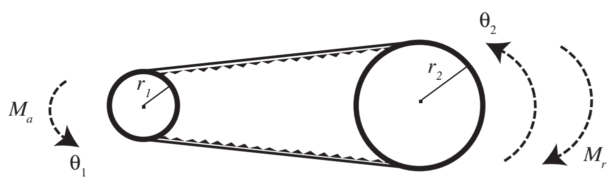
On a ainsi:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\sin(\omega t + \phi)\} = \cos\phi\ \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} + \sin\phi\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$$

$$= \frac{\omega\cos\phi}{s^2 + \omega^2} + \frac{s\sin\phi}{s^2 + \omega^2}$$

Exercice 24

Soit le système de transmission par courroie crantée suivant:



Un couple $M_a(t)$ est appliqué à la petite poulie de rayon r_1 caractérisée par le moment d'inertie J_1 et un frottement visqueux de coeffcient f_1. La transmission par courroie crantée est considérée idéale, c'est-à-dire sans perte de puissance. La grande roue de rayon r_2 caractérisée par le moment d'inertie J_2 et un frottement visqueux de coefficient f_2 est soumise au couple résistant $M_r(t)$.

a) Ecrire les équations dynamiques pour ce système.

b) Ce système est-il linéaire et stationnaire?

c) On considère le couple résistant comme une perturbation. Déterminer la fonction de transfert entre le couple résistant M_r et la vitesse angulaire $\omega_2 = \dot{\theta}_2$.

d) Considérer le système en régime permanent (vitesses constantes). Ecrire la relation liant le couple résultant $\overline{M}_r$ au couple appliqué $\overline{M}_a$ et à la vitesse $\overline{\omega}_2$.

Solution

a) $J_1\ddot{\theta}_1 = M_a - f_1\dot{\theta}_1 - M_{T1}$ ou $J_1\dot{\omega}_1 = M_a - f_1\omega_1 - M_{T1}$ (1)

$J_2\ddot{\theta}_2 = M_{T2} - f_2\dot{\theta}_2 - M_r$ $\quad J_2\dot{\omega}_2 = M_{T2} - f_2\omega_2 - M_r$ (2)

$M_{T1,2}$: couples transmis

$M_{T1}\ \omega_1 = M_{T2}\ \omega_2$: conservation de puissance

$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ (3)

$M_{T1} r_2 = M_{T2} r_1$ (4)

b) Système linéaire et stationnaire.

c) $\mathcal{L}\{(1), (2)\}: \omega_1(s)[J_1 s + f_1] = M_a(s) - M_{T1}(s)$ (5)

$$\omega_2(s)[J_2 s + f_2] = M_{T1}(s)\frac{r_2}{r_1} - M_r(s) \tag{6}$$

(5) $\rightarrow$
$$M_{T1}(s) = M_a(s) - \omega_2(s)\frac{r_2}{r_1}[J_1 s_1 + f_1] \tag{7}$$

(6) + (7):
$$\omega_2(s)\left[J_2 s + f_2 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 (J_1 s_1 + f_1)\right] = \frac{r_2}{r_1}M_a(s) - M_r(s)$$

$$J_e := J_2 + J_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \qquad f_e := f_2 + f_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \omega_2(s)[J_e s + f_e] = \frac{r_2}{r_1}M_a(s) - M_r(s)$$

$$\frac{\omega_2(s)}{M_r(s)} = \frac{-1}{J_e s + f_e}$$

d) Régime permanent

$$(1) \quad \rightarrow \quad 0 = \overline{M}_a - f_1\overline{\omega}_1 - \overline{M}_{T1} \tag{8}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad 0 = \overline{M}_{T2} - f_2\overline{\omega}_2 - \overline{M}_r \tag{9}$$

$$\overline{M}_{T2} = \overline{M}_{T1}\frac{r_2}{r_1} \qquad \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2\frac{r_2}{r_1}$$

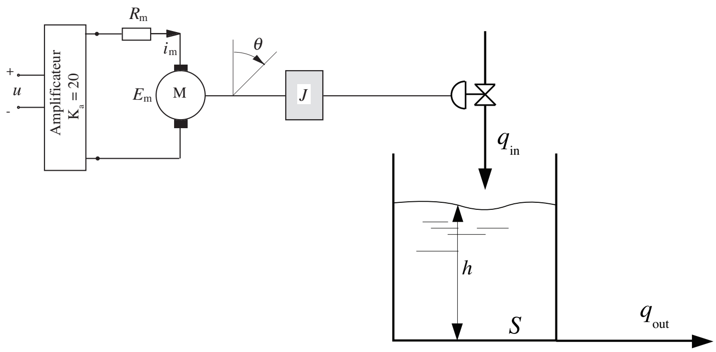
$$(9): \quad 0 = \left(\overline{M}_a - f_1\overline{\omega}_2\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{r_2}{r_1} - f_2\overline{\omega}_2 - \overline{M}_r$$

$$0 = \overline{M}_a\frac{r_2}{r_1} - f_e\overline{\omega}_2 - \overline{M}_r$$

$$\Rightarrow \quad \overline{M}_r = \overline{M}_a\frac{r_2}{r_1} - f_e\overline{\omega}_2$$

Exercice 25

Soit une cuve avec vanne motorisée qui possède une section S de 50 m^2 et est remplie d'eau. Le débit volumique d'alimentation est proportionnel à la position θ, avec la constante de proportionnalité $\alpha = 0{,}16$ m^3/(min rad). Le débit de sortie est proportionnel à la racine carrée du niveau h, avec la constante de proportionnalité $k = 5$ m^{2,5}/min. La tension d'alimentation u est amplifiée ($K_a = 20$) et commande la vanne par l'intermédiaire d'un moteur électrique caractérisé par la résistance $R_m = 50\ \Omega$ et la constante de moteur $K_m = 5$ V min. Le moment d'inertie du moteur et de la vanne est $J = 10^{-4}$ kg m^2/rad. Le frottement est négligeable.



a) Ecrire les équations dynamiques pour ce système.

b) Déterminer la fonction de transfert $H(s)/U(s)$ pour le point de fonctionnement correspondant à un niveau d'eau de 4 m.

Solution

a) $J\ddot{\theta} = K_m i_m$ (1)

$$\left.\begin{aligned} u_m &= K_a u \\ R_m i_m + K_m\dot{\theta} - u_m &= 0 \end{aligned}\right\} \quad R_m i_m + K_m\dot{\theta} - K_a u = 0 \qquad (2)$$

$$S\dot{h} = \alpha\theta - k\sqrt{h} \qquad (3)$$

b) Linéarisation:

$$\sqrt{h} \simeq \sqrt{\bar{h}} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}}}\delta h$$

$$\mathcal{L}: (1) \;\rightarrow\; Js^2\theta(s) = K_m I_m(s) \qquad (4)$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad R_{\mathrm{m}} I_{\mathrm{m}}(s) + K_{\mathrm{m}} s \theta(s) - K_{\mathrm{a}} U(s) \; = \; 0 \tag{5}$$

$$(3) \quad \rightarrow \quad H(s)\left[Ss + \frac{k}{2\sqrt{\hbar}}\right] \; = \; \alpha\theta(s) \; \rightarrow \; \frac{H(s)}{\theta(s)} \; = \; \frac{\alpha}{Ss + \dfrac{k}{2\sqrt{\hbar}}}$$

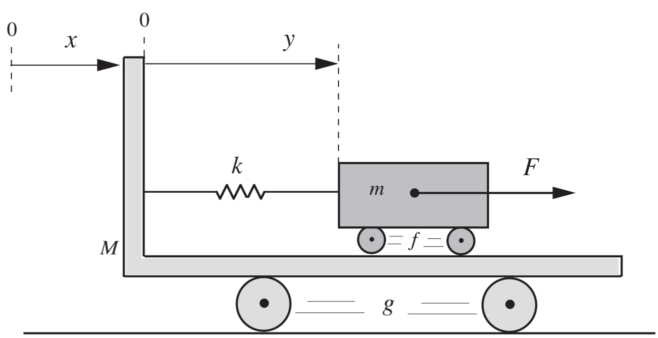
$$(4) + (5) \; \rightarrow \; R_{\mathrm{m}} J s^2 \theta(s) \; = \; K_{\mathrm{m}}[K_{\mathrm{a}} U(s) - K_{\mathrm{m}} s \theta(s)]$$

$$\theta(s)[R_{\mathrm{m}} J s^2 + K_{\mathrm{m}}^2 s] \; = \; K_{\mathrm{m}} K_{\mathrm{a}} U(s) \; \rightarrow \; \frac{\theta(s)}{U(s)} \; = \; \frac{K_{\mathrm{m}} K_{\mathrm{a}}}{s(R_{\mathrm{m}} J s + K_{\mathrm{m}}^2)}$$

$$\frac{H(s)}{U(s)} \; = \; \frac{H(s)}{\theta(s)} \frac{\theta(s)}{U(s)} \; = \; \frac{\alpha K_{\mathrm{m}} K_{\mathrm{a}}}{s(R_{\mathrm{m}} J s + K_{\mathrm{m}}^2)\left(Ss + \dfrac{k}{2\sqrt{\hbar}}\right)} \; = \; \frac{0{,}51}{s(2 \cdot 10^{-4} s + 1)(40 s + 1)}$$

Exercice 26

Soit un système de deux chariots de masses m et M reliés entre eux par une liaison flexible de rigidité k. Le roulement des deux chariots est entravé par du frottement visqueux de coefficients respectifs f et g. Le petit chariot est soumis à la force F. La vitesse du grand chariot est noté $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.



a) Modéliser ce système dynamique.
b) Calculer la fonction de transfert $X(s)/F(s)$. Contient-elle un terme intégrateur ? Si oui, donner une explication physique de celui-ci.
c) Calculer la fonction de transfert $V(s)/F(s)$. Calculer son gain statique et donner une explication physique de celui-ci.

Solution

a) Petit chariot: $\quad m(\ddot{x} + \ddot{y}) \; = \; F - ky - f\dot{y} \qquad (1)$

Grand chariot: $\quad M\ddot{x} \; = \; ky + f\dot{y} - g\dot{x} \qquad (2)$

b) $\mathcal{L}$: $$m[s^2X(s) + s^2Y(s)] = F(s) - kY(s) - fsY(s) \quad (1a)$$

$$Ms^2X(s) = kY(s) + fsY(s) - gsX(s) \quad (2a)$$

$$(2a) \rightarrow [Ms^2 + gs]X(s) = [fs + k]Y(s)$$

$$\text{ou } Y(s) = \frac{Ms^2 + gs}{fs + k}X(s) \quad (2b)$$

$$(1a) \rightarrow ms^2X(s) + [ms^2 + fs + k]Y(s) = F(s) \quad (1b)$$

$$(1b) + (2b) \rightarrow \left[ms^2 + \frac{(ms^2 + fs + k)(Ms^2 + gs)}{fs + k}\right]X(s) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{fs + k}{ms^2(fs + k) + (ms^2 + fs + k)(Ms^2 + gs)}$$

$$= \frac{fs + k}{s\{mMs^3 + [(m + M)f + mg]s^2 + [(m + M)k + fg]s + gh\}}$$

Cette fonction de transfert contient un terme intégrateur $1/s$. Cela signifie que, par exemple, si la force F est constante, la position x augmentera indéfiniment.

c) $$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{sX(s)}{F(s)} = \frac{fs + k}{mMs^3 + [(m + M)f + mg]s^2 + [(m + M)k + fg]s + gk}$$

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{g}$$

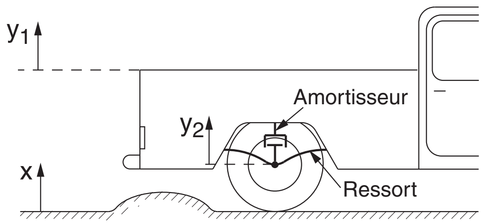
Cela signifie qu'à l'état stationnaire, si la force $\bar{F}$ augmente d'une unité, la vitesse $\bar{v}$ augmentera de $1/g$:

$$\bar{F} = k\bar{y} = g\bar{v} \rightarrow \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta\bar{F}} = \frac{1}{g}$$

6.7 EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

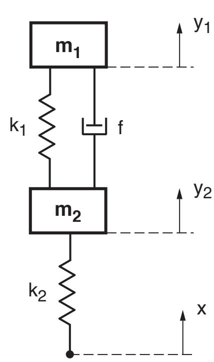
Le système de suspension pour une roue d'un véhicule comprend un ressort de constante de rigidité k_1 et un amortisseur linéaire de coefficient f. La masse du véhicule portée par la roue est m_1, celle de la roue m_2. D'autre part, la roue est elle-même flexible, caractérisée par une constante de rigidité k_2.



a) Calculer la fonction de transfert $Y_1(s)/X(s)$ qui représente la réponse du véhicule à des bosses sur la route.

b) Evaluer le gain statique et interpréter sa signification physique.

Solution



a) $$m_1\ddot{y}_1 = -k_1(y_1-y_2)-f(\dot{y}_1-\dot{y}_2)$$

$$m_2\ddot{y}_2 = k_1(y_1-y_2)+f(\dot{y}_1-\dot{y}_2)-k_2(y_2-x)$$

$\downarrow\mathcal{L}$

$$Y_1(s)[m_1s^2+fs+k_1] = Y_2(s)[fs+k_1]$$

$$Y_2(s)[m_2s^2+fs+k_1+k_2] = Y_1(s)[fs+k_1]+k_2X(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{fs+k_1}{m_2s^2+fs+(k_1+k_2)}Y_1(s)+\frac{k_2}{m_2s^2+fs+(k_1+k_2)}X(s)$$

$$[m_1s^2+fs+k_1]Y_1(s) = \frac{(fs+k_1)^2}{m_2s^2+fs+(k_1+k_2)}Y_1(s)+$$

$$+\frac{(fs+k_1)k_2}{m_2s^2+fs+(k_1+k_2)}X(s)$$

$$\{m_1m_2s^4 + (m_1f + m_2f)s^3 + [m_1(k_1 + k_2) + f^2 + m_2k_1]s^2 + [f(k_1 + k_2) + $$
$$+ fk_1]s + k_1(k_1 + k_2) - (f^2s^2 + 2fk_1s + k_1^2)\}Y_1(s) = (fs + k_1)k_2X(s)$$

$$Y_1(s)\{m_1m_2s^4 + f(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2m_1]s^2 + fk_2s + k_1k_2\}$$
$$= (fs + k_1)X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} =$$
$$= \frac{(fs + k_1)k_2}{m_1m_2s^4 + f(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2m_1]s^2 + fk_2s + k_1k_2}$$

b) Gain statique: $K = \lim\limits_{s \to 0} G(s) = 1$

Donc, à basses fréquences, toute variation du profil de la route sera transmise intégralement au véhicule.

Exercice 2

a) Evaluer la réponse impulsionnelle du système

$$G(s) = \frac{s - 1}{(2s + 1)(s + 3)}$$

b) Représenter graphiquement cette réponse.
c) Evaluer les pôles et les zéros de ce système. Est-il stable?

Solution

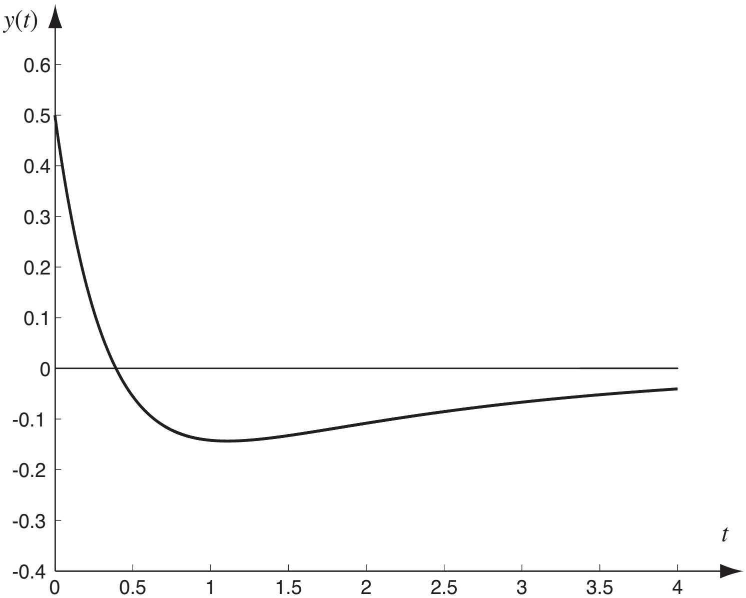
a) $$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s - 1}{(2s + 1)(s + 3)} = \frac{A}{2s + 1} + \frac{B}{s + 3}$$

$$A = \lim_{s \to -\frac{1}{2}} \frac{s - 1}{s + 3} = -\frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{s \to -3} \frac{s - 1}{2s + 1} = \frac{4}{5}$$

$\mathcal{L}^{-1} \quad \rightarrow \qquad y(t) = -\frac{3}{10}e^{-t/2} + \frac{4}{5}e^{-3t} \quad t \geq 0$

b) *Graphique*



c) $z_1 = 1, p_1 = -0{,}5, p_2 = -3$. Comme les deux pôles sont dans la moitié gauche du plan complexe, le système est BIBO stable.

Exercice 3

Soit le système dynamique autonome, c'est-à-dire sans entrée:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a) Calculer $x(t)$.

b) Quel est l'ordre du système? Combien de modes se trouvent dans la réponse $x(t)$? Discuter ce résultat.

Solution

a) $\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \qquad x_1(0) = 10$

$\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \qquad x_2(0) = 10$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$sX_1(s) - 10 = X_1(s) - 2X_2(s)$$

$$sX_2(s) - 10 = 2X_1(s) - 3X_2(s)$$

$$X_2(s)[s+3] = 2X_1(s) + 10 \qquad \rightarrow \qquad X_2(s) = \frac{2}{s+3}X_1(s) + \frac{10}{s+3}$$

$$X_1(s)[s-1] = -2X_2(s) + 10 = -\frac{4}{s+3}X_1(s) - \frac{20}{s+3} + 10$$

$$X_1(s)[(s-1)(s+3)+4] = -20 + 10(s+3)$$

$$X_1(s)[s^2 + 2s - 3 + 4] = 10s + 10$$

$$X_1(s)[s^2 + 2s + 1] = 10(s+1)$$

$$X_1(s) = \frac{10}{s+1}$$

$$X_2(s) = \frac{2}{s+3}\,\frac{10}{s+1} + \frac{10}{s+3} = \frac{20 + 10(s+1)}{(s+3)(s+1)} = \frac{10(s+3)}{(s+3)(s+1)} = \frac{10}{s+1}$$

$$x_1(t) = x_2(t) = 10e^{-t} \quad t \geq 0$$

b) Le système est d'ordre 2 car il est décrit par 2 équations différentielles du premier ordre. Comme les réponses $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ne contiennent que le mode e^{-t}, on pourrait penser que le système est du premier ordre. Cependant, il s'agit là d'un artefact dû au choix des conditions initiales. Pour le montrer, considérons le même système dynamique avec les conditions initiales génériques:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

Un développement similaire à celui du point a) donne les signaux $X_1(s)$ et $X_2(s)$ suivants:

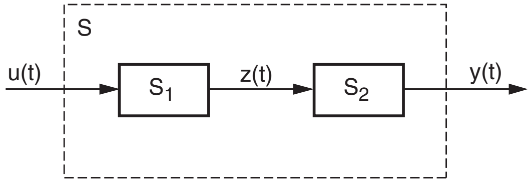
$$X_1(s) = \frac{x_{10}s + (3x_{10} - 2x_{20})}{(s+1)^2}$$

$$X_2(s) = \frac{x_{20}s + (2x_{10} - x_{20})}{(s+1)^2}$$

Pour $x_{10} = x_{20} = 10$, on retrouve le résultat du point a). Dans le cas général, avec un pôle double à $s = -1$, on observe les modes e^{-t} et te^{-t}. Notons également que les valeurs propres de la matrice du système sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Exercice 4

Un système physique est composé des deux sous-systèmes S_1 et S_2 :



Le sous-système S_1 est décrit par la fonction de transfert: $G_1(s) = (s+1)/s$.

La sortie z de ce système est l'entrée du sous-système S_2 dont la dynamique est régie par l'équation différentielle:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{z}(t) + 3z(t) \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad z(0) = 0$$

a) Calculer la fonction de transfert du système complet S.

b) Evaluer les pôles et les zéros ainsi que le gain statique du système S.

Solution

a) Système S_1 : $G_1(s) = \dfrac{s+1}{s} = \dfrac{Z(s)}{U(s)}$

Système S_2 : calcul de $G_2(s) = \dfrac{Y(s)}{Z(s)}$

Le concept de fonction de transfert suppose des conditions initiales nulles (système relâché):

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sZ(s) + 3Z(s)$$

$$Y(s)[s^2 + 3s + 2] = Z(s)[s + 3]$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$$

Système S: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{Y(s)}{Z(s)} \cdot \dfrac{Z(s)}{U(s)}$

$$G(s) = G_2(s)G_1(s) \rightarrow G(s) = \frac{(s+3)(s+1)}{(s+1)(s+2)s} = \frac{s+3}{s(s+2)}$$

b) Pôles: $p_1 = 0 \quad p_2 = -2$
zéro: $z_1 = -3$

Il s'agit d'un système intégrateur ($p_1 = 0$) avec un gain statique infini:

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s+3}{s(s+2)} = \infty$$

Exercice 5

Pour les cas suivants, et sans calculer explicitement $y(t)$, déterminer les termes dynamiques (modes) présents dans la réponse. Quelles réponses ont un caractère oscillatoire? Quelles réponses convergent pour $t \to \infty$?

a) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s^2+4s)}$

b) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s^2+4s+3)}$

c) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s^2+4s+4)}$

d) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s^2+4s+8)}$

Solution

a) $Y(s) = \dfrac{2}{s^2(s+4)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s+4}$

$y(t) = A\varepsilon(t) + Bt\varepsilon(t) + Ce^{-4t}\varepsilon(t)$ non oscillatoire

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \infty$$

b) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+3)(s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3} + \dfrac{C}{s+1}$

$y(t) = A\varepsilon(t) + Be^{-3t}\varepsilon(t) + Ce^{-t}\varepsilon(t)$ non oscillatoire

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = A$$

c) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+2)^2} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{(s+2)} + \dfrac{C}{(s+2)^2}$

$y(t) = A\varepsilon(t) + Be^{-2t}\varepsilon(t) + Cte^{-2t}\varepsilon(t)$ non oscillatoire

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = A$$

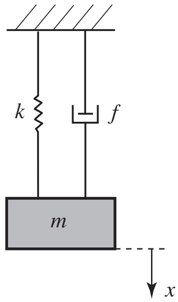
d) $Y(s) = \dfrac{2}{s[(s+2)^2+2^2]} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B(s+2)}{(s+2)^2+2^2} + \dfrac{C \cdot 2}{(s+2)^2+2^2}$

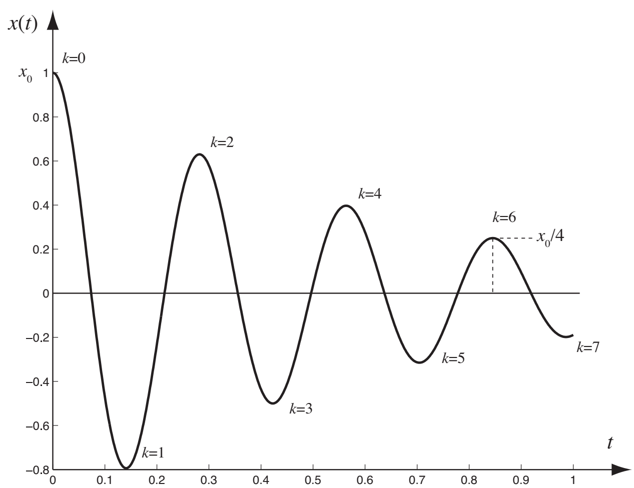
$$y(t) = A\varepsilon(t) + Be^{-2t}\cos(2t) + Ce^{-2t}\sin(2t) \qquad \text{oscillatoire}$$

avec $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = A$.

Exercice 6

Soit le système dynamique suivant avec $m = 1$ kg et $k = 500$ N/m. La réponse libre du système pour un déplacement de x_0 et une vitesse initiale nulle est donnée à la figure ci-dessous :





- Si l'amplitude des vibrations décroît à 25% de x_0 après trois cycles consécutifs, déterminer le coefficient de frottement f.

Solution

– Modèle dynamique :

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x} \qquad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$m[s^2X(s) - sx_0 - 0] + kX(s) + f[sX(s) - x_0] = 0$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{mx_0s + fx_0}{ms^2 + fs + k} = \frac{x_0(ms + f)}{ms^2 + fs + k}$$

$$= \frac{x_0(s + f/m)}{s^2 + (f/m)s + k/m} = \frac{x_0[(s + a) + (a/\overline{\omega})\overline{\omega}]}{(s + a)^2 + \overline{\omega}^2}$$

avec $a = \dfrac{f}{2m}$, $\overline{\omega} = \dfrac{1}{2m}\sqrt{4km - f^2}$

– Réponse oscillatoire sous-amortie ($0 \leq \zeta < 1$)

$$x(t) = x_0\varepsilon(t)\left[e^{-\mathrm{at}}\cos(\overline{\omega}t) + \frac{a}{\overline{\omega}}e^{-\mathrm{at}}\sin(\overline{\omega}t)\right]$$

Au maxima et minima de la réponse, t_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, on a:

$\overline{\omega}t_\mathrm{k} = k\pi$, $\sin(\overline{\omega}t_\mathrm{k}) = 0$ et $\cos(\overline{\omega}_\mathrm{k}t) = 1$, ce qui donne:

$$x(t_\mathrm{k}) = x_0e^{-\mathrm{at_k}} = x_0e^{-\mathrm{a(k\pi/\overline{\omega})}}$$

Pour la situation donnée, $k = 6$ et $x(t_6) = x_0/4$, ce qui donne:

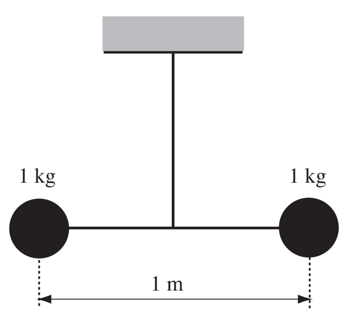
$$\frac{1}{4} = e^{-\frac{6\pi\mathrm{f}}{\sqrt{4\mathrm{km}-\mathrm{f}_2}}}$$

et ainsi $f = 2\sqrt{\dfrac{km}{(6\pi/\ln 4)^2 + 1}}$

Avec $m = 1$ kg, $k = 500$ N/m, on obtient $f = 3{,}28\ \dfrac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$.

Exercice 7

Un oscillateur est constitué de 2 boules métalliques de 1 kg reliées entre elles par une barre rigide de 1 m et de masse négligeable. La barre est suspendue en son milieu par un fil très fin qui se laisse tordre sans casser. La constante de rigidité en rotation du fil est $k = 2 \cdot 10^{-4}$ Nm/(rad). D'autre part, on estime le coefficient de frottement visqueux dans l'air du système boules/barre à 10^{-3} Nms/(rad).



a) Calculer le coefficient d'amortissement de cet oscillateur.

b) Sachant que l'oscillateur est chargé avec 10 tours (3600°) et lâché à vitesse nulle, calculer sa réponse libre dans le domaine de Laplace.

Solution

a) Modèle dynamique:

$$J\ddot{\theta} = -k\theta - f\dot{\theta} \qquad \theta(0) = \theta_0;\ \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$J[s^2\theta(s) - s\theta_0 - 0] + k\theta(s) + f[s\theta(s) - \theta_0] = 0$$

$$\rightarrow \theta(s) = \frac{\theta_0(Js + f)}{Js^2 + fs + k} = \frac{\theta_0(Js/k + f/k)}{(J/k)s^2 + (f/k)s + 1} \tag{1}$$

$$J = 2\ \mathrm{m}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2} = \frac{1\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m}^2}{2} = 0{,}5\ \mathrm{kgm}^2$$

$$f = 10^{-3}\frac{\mathrm{Nms}}{(\mathrm{rad})};\quad k = 2 \cdot 10^{-4}\frac{\mathrm{Nm}}{(\mathrm{rad})}$$

Dénominateur de $\theta(s)$:

$$\left(\frac{J}{k}\right)s^2 + \left(\frac{f}{k}\right)s + 1 = \tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1$$

$$\rightarrow \tau = \sqrt{\frac{J}{k}} = \sqrt{\frac{0{,}5}{2 \cdot 10^{-4}}} = 50s$$

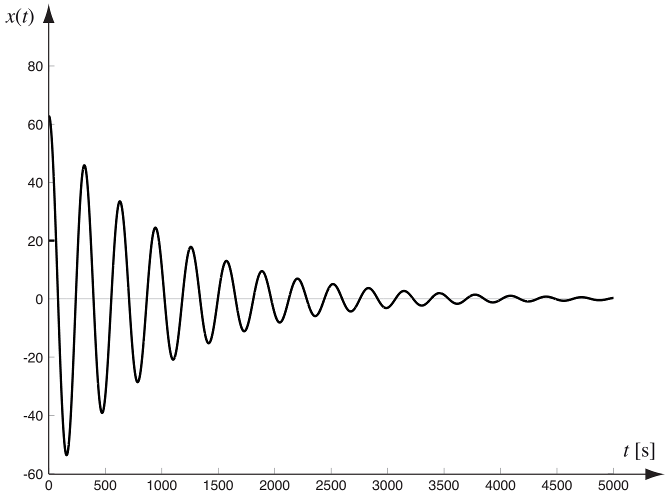
$$\zeta = \frac{f}{2\tau k} = \frac{f}{2\sqrt{Jk}} = \frac{10^{-3}}{2\sqrt{0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}} = 0{,}05$$

b) Réponse libre pour $\theta_0 = 20\pi$

$$(1) \rightarrow \theta(s) = \frac{20\pi(2500s + 5)}{2500s^2 + 5s + 1} = \frac{20\pi(s + 0{,}002)}{s^2 + 0{,}002s + 0{,}0004}$$

$$= 20\pi\frac{(s + 0{,}001) + 0{,}001}{(s + 0{,}001)^2 + (0{,}02)^2} = 20\pi\frac{(s + 0{,}001) + 0{,}05(0{,}02)}{(s + 0{,}001)^2 + (0{,}02)^2}$$

$$\rightarrow \theta(t) = 20\pi\varepsilon(t)[e^{-0{,}001t}\cos(0{,}02t) + 0{,}05e^{-0{,}001t}\sin(0{,}02t)]$$



Exercice 8

Un système dynamique est représenté par l'équation différentielle

$$\ddot{y} + y(\alpha\dot{y} + 4) = 2u \qquad y(0) = 2 \qquad \dot{y}(0) = 0$$

a) Evaluer la fonction de transfert $Y(s)/U(s)$ pour le point de fonctionnement correspondant à $\bar{u} = 4$.

b) Pour quelles valeurs de α l'approximation linéaire de ce système sera-t-elle stable et non oscillante ?

Solution d'équilibre

a) A l'état d'équilibre : $\dot{y} = \ddot{y} = 0$

$$4\bar{y} = 2\bar{u} = 8 \;\rightarrow\; \bar{y} = 2$$

Pour des questions de notation, définissons $v := \dot{y}$.

Linéarisation de yv autour de $\bar{y} = 2$ et $\bar{v} = 0$

$$y\dot{y} \simeq \cancelto{0}{\bar{y}\bar{v}} + \cancelto{0}{\bar{v}(y - \bar{y})} + \bar{y}(v - \bar{v}) = 2(v - \bar{v})$$

En variables écart

$$\delta\ddot{y} + 2\alpha\delta\dot{y} + 4\delta y = 2\delta u \qquad \delta y(0) = 0 \qquad \delta\dot{y}(0) = 0$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 2\alpha s + 4} = \frac{1/2}{(1/4)s^2 + (\alpha/2)s + 1} = \frac{1/2}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$$

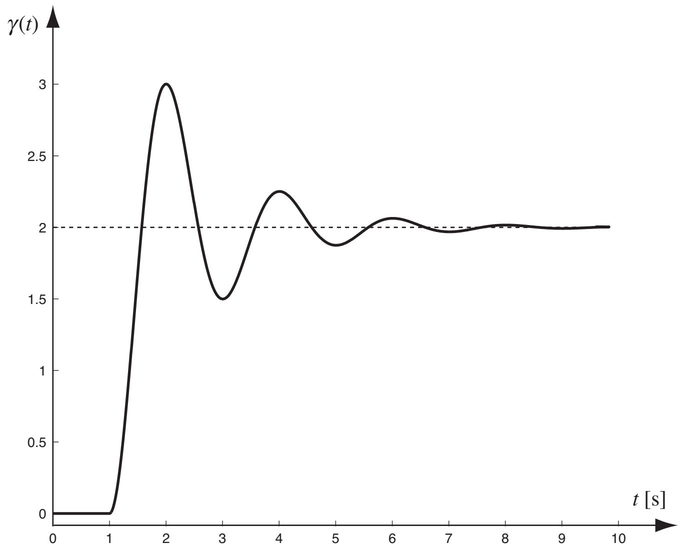
$$\rightarrow \tau^2 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{1}{2}$$

$$2\tau\zeta = \frac{\alpha}{2} \rightarrow \zeta = \frac{\alpha}{2}$$

b) Approximation linéaire non oscillante pour $\zeta \geq 1$, c'est-à-dire pour $\alpha \geq 2$.

Exercice 9

La réponse indicielle $\gamma(t)$ d'un système inconnu a été mesurée comme suit:



a) Déterminer le retard pur de ce système.
b) Sachant que ce système ne possède pas de zéro, déterminer son gain statique et ses pôles.
c) Déterminer sa fonction de transfert.

Solution

a) Le retard pur vaut 1 s.
b) Gain statique = $\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = 2$

On mesure un dépassement de 50%

$$\gamma(t_p) = K(1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}})$$

$$3 = 2(1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}})$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{\ln 2}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 2)^2}} = 0{,}2155$$

On mesure une durée séparant le début de la réponse et le premier maximum de 1 s, donc:

$$t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1$$

Ainsi $\tau = \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} = 0{,}3108$

Les pôles sont: $p_{1,2} = -\frac{1}{\tau}(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}) = -0{,}69 \pm \pi j$

c) La fonction de transfert est de la forme

$$G(s) = e^{-s}\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

et donc $G(s) = \dfrac{2e^{-s}}{0{,}097s^2 + 0{,}134s + 1}$

7.5 EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

a) Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la fonction de transfert

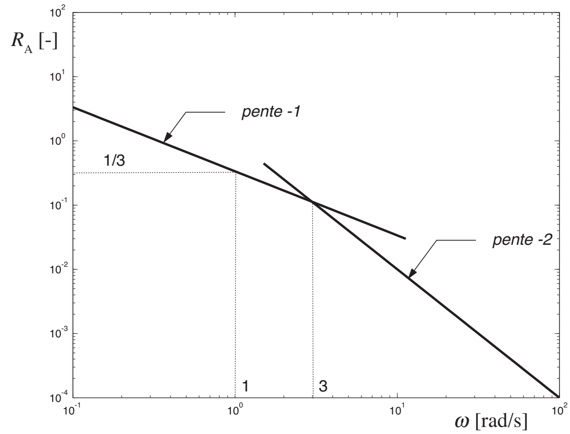
$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

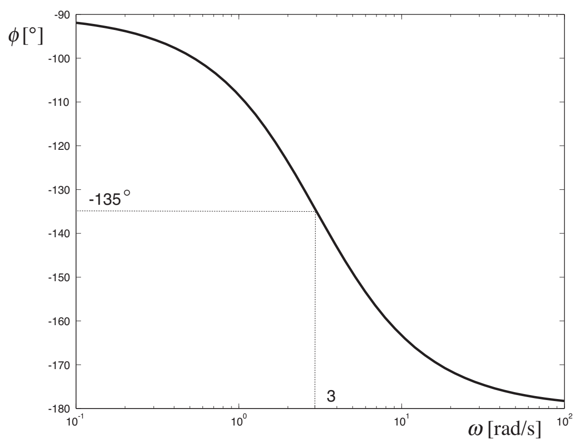
b) Ajouter un terme multiplicatif à cette fonction de transfert afin que le déphasage approche –90° à hautes fréquences.

Solution

a) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+3)} = \dfrac{1/3}{s(s/3+1)}$

Diagramme de Bode asymptotique de $G(s)$





b) Le déphasage de $G(s)$ vaut –180° à haute fréquence. Il convient donc d'ajouter un terme avance de phase au numérateur. Par exemple, $G'(s) = (s+1)G(s)$ aura un déphasage de –90° à hautes fréquences.

Exercice 2

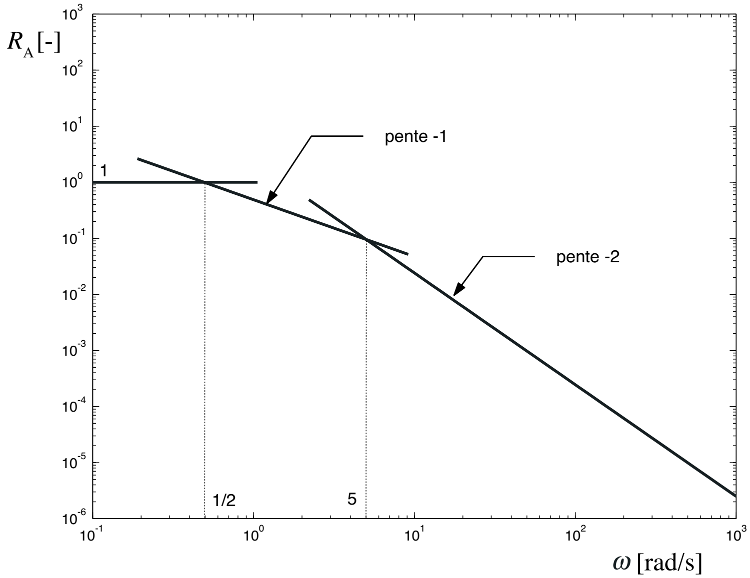
a) Tracer le rapport d'amplitude asymptotique pour la fonction de transfert:

$$G(s) = \frac{5e^{-\theta s}}{(2s+1)(s+5)}$$

b) Déterminer θ de façon à ce que le déphasage soit égal à –180° pour $\omega = 1$ rad/s.

Solution

a) $G(s) = \dfrac{5e^{-\theta s}}{(2s+1)(s+5)} = \dfrac{e^{-\theta s}}{(2s+1)(s/5+1)}$



b) $\varphi(\omega) = -\theta\omega - \arctan(2\omega) - \arctan\left(\dfrac{\omega}{5}\right)$

$$\varphi(\omega = 1) = -\theta - \arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = -\pi \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi - \arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 1{,}84s$$

Exercice 3

Soit un système dynamique caractérisé par un gain unité, un pôle à –1 et un zéro à $-1/\alpha$.

a) Ecrire sa fonction de transfert.

b) Esquisser le diagramme de Bode pour $\alpha = -1$.

Solution

a) $$G(s) = \frac{A\left(s + \frac{1}{\alpha}\right)}{s+1} \qquad 1 = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{A}{\alpha} \quad \to A = \alpha$$

$$\to G(s) = \frac{\alpha s + 1}{s+1}$$

b) Pour $\alpha = -1$ $G(s) = \dfrac{1-s}{1+s}$

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} = \frac{(1-\omega^2) - 2j\omega}{1+\omega^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}{1+\omega^2} = \frac{1+\omega^2}{1+\omega^2} = 1$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{-2\omega}{1-\omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2\omega}{1-\omega^2}\right)$$

Alternative :

$$G(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega} = \frac{G_1(j\omega)}{G_2(j\omega)}$$

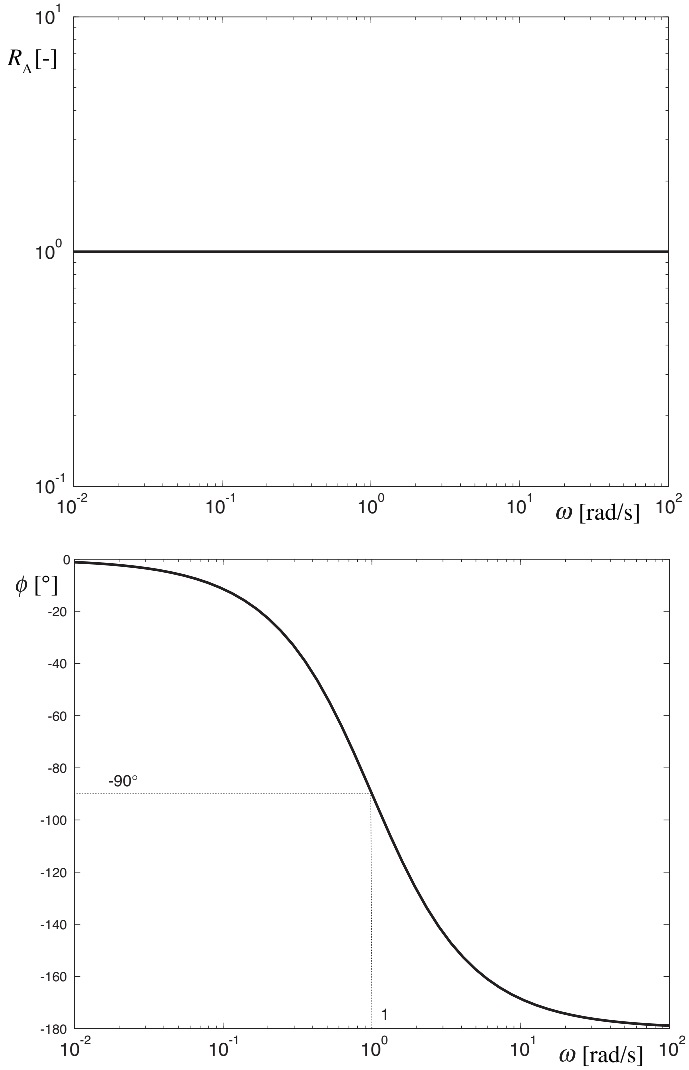
$$|G(j\omega)| = \frac{|G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}} = 1$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) - \angle G_2(j\omega)$$

$$= \arctan(-\omega) - \arctan(\omega) = -2\arctan(\omega)$$

Notons que l'approche alternative permet de conclure que arctan $(2\omega/(1-\omega^2))$ = 2 arctan(ω).

Diagramme de Bode



Exercice 4

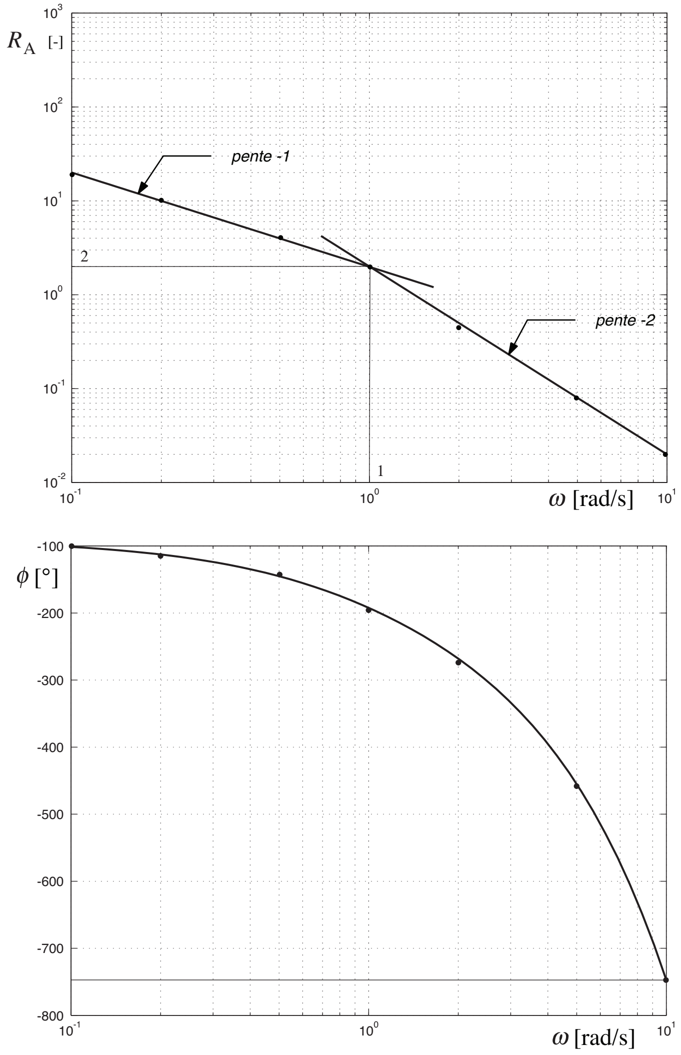
On a mesuré expérimentalement les réponses harmoniques suivantes sur un processus physique :

ω (rad/s)	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
R_A (–)	19,3	9,8	3,6	1,95	0,45	0,08	0,02
φ (°)	–101	–113	–145	–192	–268	–455	–745

- Identifier ce système, c'est-à-dire déterminer sa fonction de transfert.

Solution

Diagramme de Bode asymptotique à partir des données expérimentales



– Asymptote basses fréquences: $R_A \to K/\omega$.
  Pour $\omega = 1$, $R_A = 2 \to$ gain en vitesse $K = 2$
– Retard pur à hautes fréquences: $-180° - \theta\omega(360°/2\pi)$
  Pour $\omega = 10$, $\varphi = -745° \quad \to \theta = 1\,s$

$$\to G(s) = \frac{2e^{-s}}{s(s+1)}$$

Exercice 5

On a mesuré expérimentalement les réponses harmoniques suivantes (malheureusement incomplètes) sur un processus physique:

ω(rad/s)	0,01	0,03	0,05	0,1	0,3	0,5	1	3	5	10
R_A (–)	1,99	1,91	1,78	1,41	0,60	0,35	0,14	0,02	0,008	0,002
φ(°)	–	–	–	–	–	–	–215	–	–	–

- Identifier ce système, c'est-à-dire déterminer sa fonction de transfert.

Solution

Diagramme d'amplitude à partir des données expérimentales:

$K = 2, \qquad \tau_1 = 10 \text{ s}, \qquad \tau_2 = 1 \text{ s}$

$$\rightarrow G(s) = \frac{2e^{-\theta s}}{(10s+1)(s+1)}$$

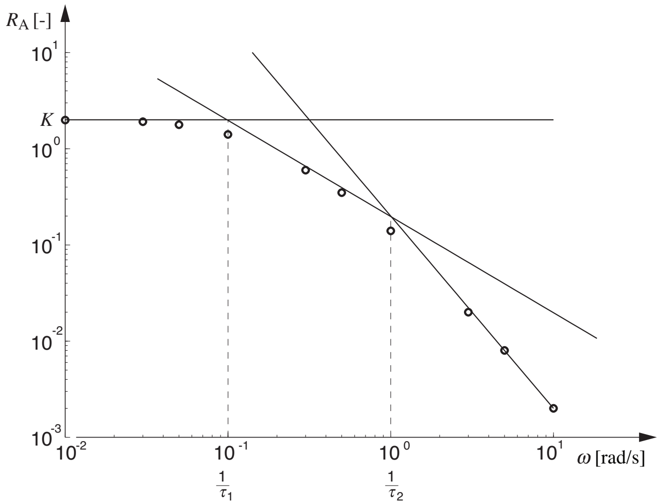
Détermination de θ

$\varphi = -\theta\omega - \arctan(10\omega) - \arctan(\omega)$

Pour $\omega = 1, \ \varphi = -215° = -3{,}75\frac{rad}{s} = -\theta - \arctan(10) - \arctan(1)$

$\Rightarrow \theta = 1{,}5$ s

$$\Rightarrow G(s) = \frac{2e^{-1{,}5s}}{(10s+1)(s+1)}$$



Exercice 6

Soit le système dynamique suivant:

$$G(s) = \frac{(s-0{,}2)e^{-s}}{s(s^2+2s+1)}$$

a) Quel est son gain statique?
b) Ce système présente-t-il un effet de résonance? Si oui, à quelle pulsation?
c) Indiquer le déphasage asymptotique à basses fréquences et à hautes fréquences.
d) Construire le diagramme de Bode asymptotique.

Solution

$$G(s) = \frac{(s-0{,}2)e^{-s}}{s(s^2+2s+1)} = \frac{0{,}2(5s-1)e^{-s}}{s(s+1)^2}$$

a) Gain statique = $\lim\limits_{s \to 0} G(s) = -\infty$

b) Pôles: $p_1 = 0 \quad p_{2,3} = -1$
Pôles réels, donc pas de résonance. Par contre, ce système possède un zéro, ce qui peut modifier l'allure de la réponse.

c) $\omega \to 0 \qquad \varphi \to -90°$

$\omega \to \infty \qquad \varphi \to -\infty$

d) Diagramme de Bode asymptotique
- Diagramme d'amplitude (voir diagramme)
- Diagramme de phase

$$G(s) = \frac{0{,}2}{s}(5s-1)\frac{1}{(s+1)^2}e^{-s}$$

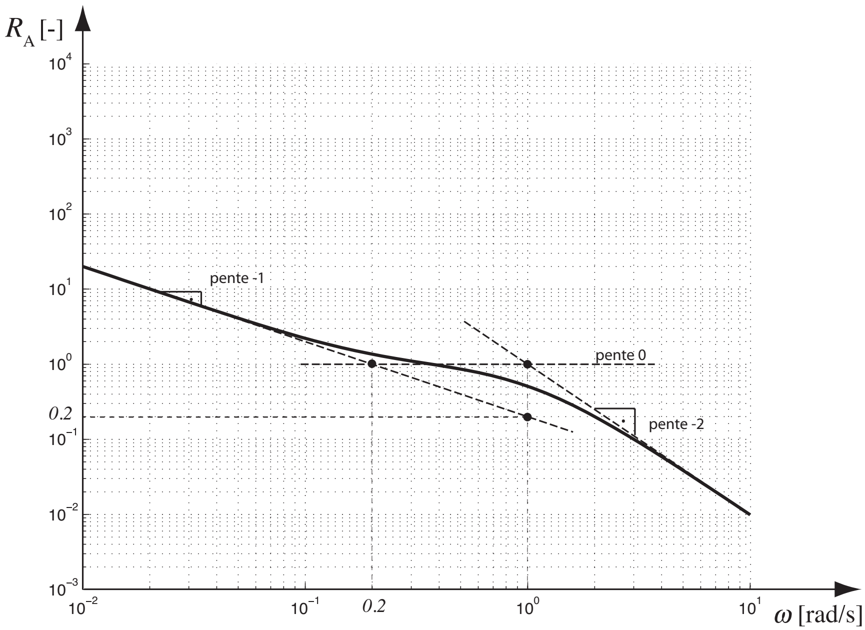
$$= G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

$$\angle G(j\omega) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

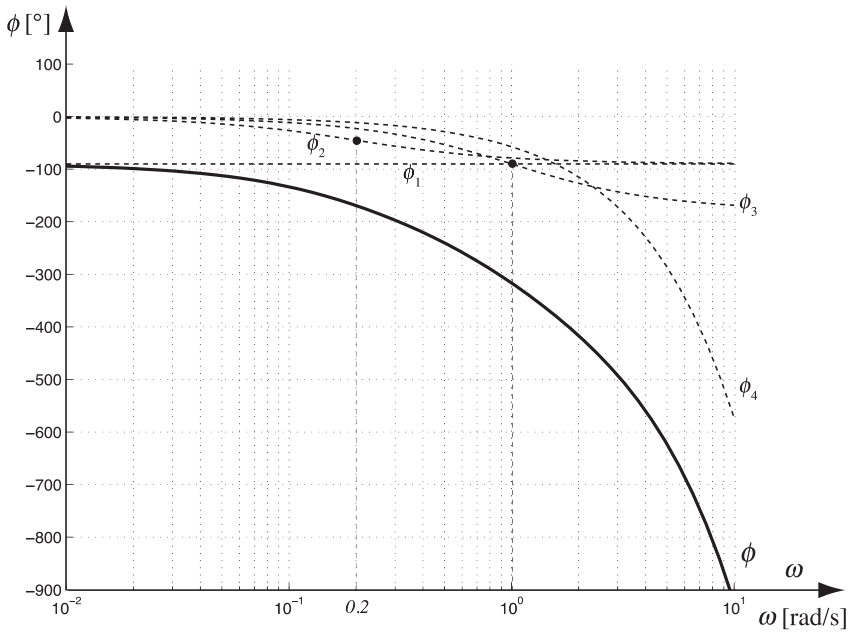
$\varphi_4[\text{rad}] = -\omega \qquad\qquad \omega = 0{,}1 \quad \varphi_4 = -5{,}7°$

$\varphi_4[°] = -\left(\frac{360°}{2\pi}\right)\omega \qquad\qquad \omega = 1 \quad \varphi_4 = -57{,}3°$

$\omega = 10 \quad \varphi_4 = -573°$



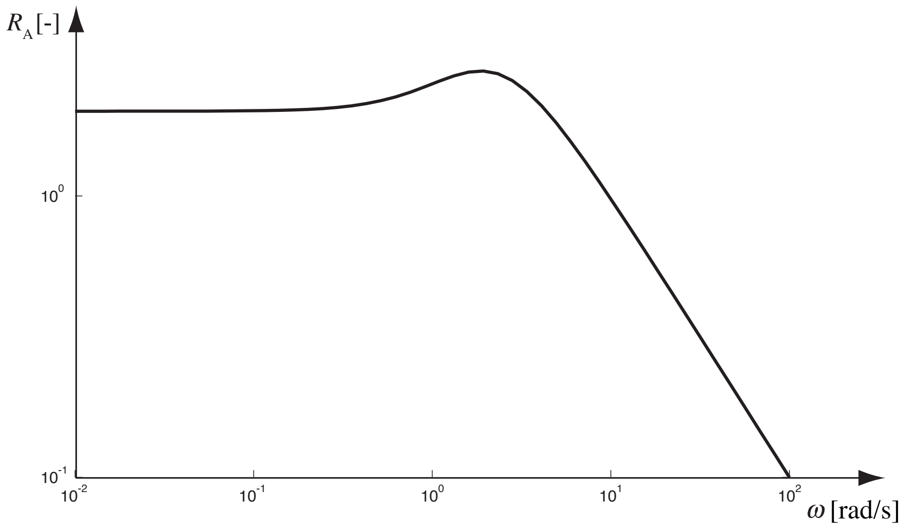
R_A [-]
pente -1
pente 0
pente -2
0.2
10^{4}
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
0.2
10^{0}
10^{1}
ω [rad/s]

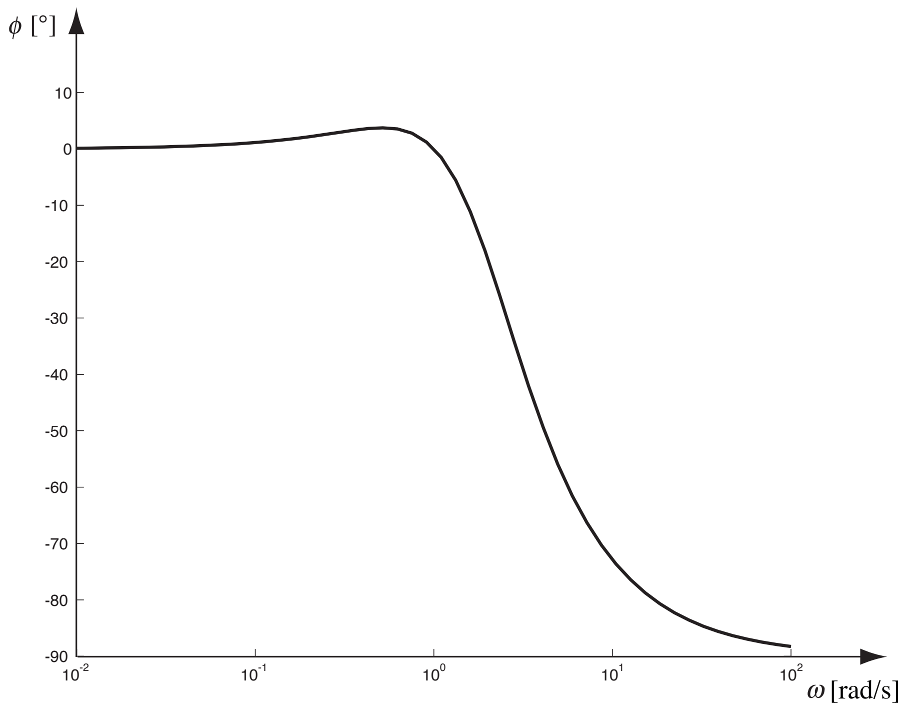


ϕ [°]
100
0
−100
−200
−300
−400
−500
−600
−700
−800
−900
ϕ_2
ϕ_1
ϕ_3
ϕ_4
ϕ
ω
10^{-2}
10^{-1}
0.2
10^{0}
10^{1}
ω [rad/s]

Exercice 7

Le diagramme de Bode d'un système oscillant du deuxième ordre caractérisé par les pôles $p_{1,2} = -2 \pm j$ et un zéro à -1 est donné ci-dessous.





a) Calculer la constante de temps équivalente τ et le coefficient d'amortissement ζ.
b) Comparer le diagramme de phase avec celui donné à la figure 7.11 et discuter les différences majeures.
c) Le système possède-t-il un effet de résonance ? (expliquer).

Solution

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2+4s+5} = \frac{K'(s+1)}{(1/5)s^2+(4/5)s+1}$$

a) $\frac{1}{5}s^2 + \frac{4}{5}s + 1 = \tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1$

$$\tau^2 = \frac{1}{5} \rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447$$

$$2\tau\zeta = \frac{4}{5} \rightarrow \zeta = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2\tau}\right) = \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894$$

b) Figure 7.11 correspond à

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$$

c'est-à-dire à un système du 2e ordre *sans* zéro (φ compris entre 0 et –180°).

Ici, $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$

c'est-à-dire un système du 2e ordre *avec* un zéro → contribution de phase du zéro : 0 → 90° ⇒ φ commence à 0 à basses fréquences, augmente légèrement à cause du zéro et diminue ensuite asymptotiquement vers –90°.

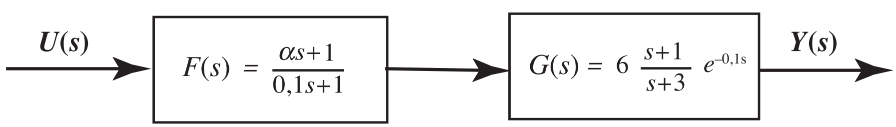
c) Résonance car $R_A(\omega_r) > 2$ (gain statique)

$$\omega_r \simeq 1{,}86 \qquad R_A(\omega_r) \simeq 2{,}8$$

Sans zéro, un système du 2e ordre avec $\zeta = 0{,}894$ n'a pas de résonance. Ici, la résonance est due à la présence du zéro à –1.

Exercice 8

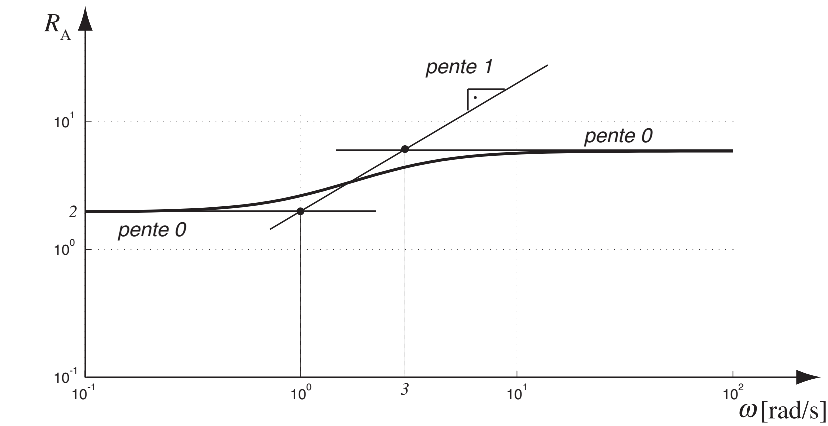
Soit le filtre avance de phase $F(s)$ en série avec la fonction de transfert $G(s)$:

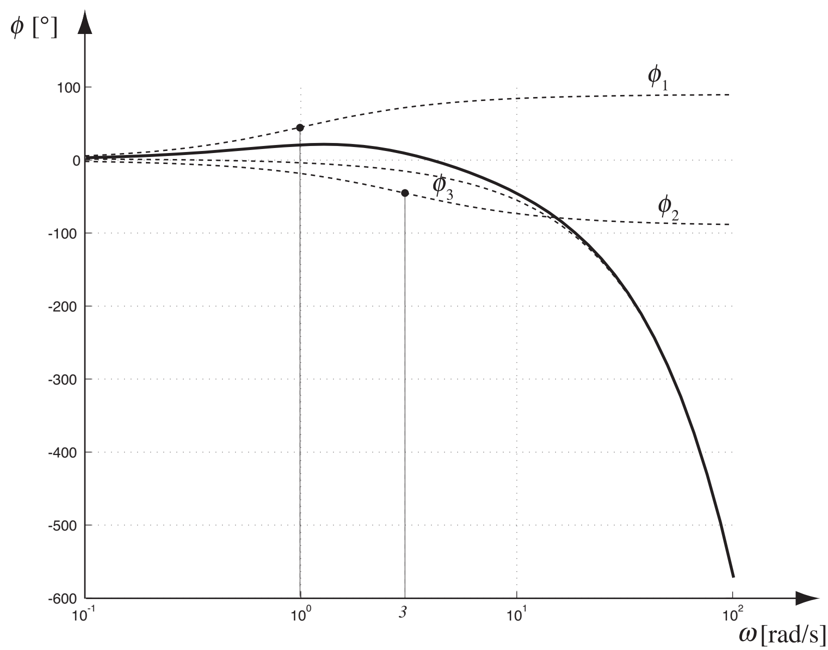


a) Représenter $G(s)$ dans un diagramme d'amplitude de Bode asymptotique.
b) Calculer la valeur de α pour que la sortie du système suive sans retard de phase l'entrée $u(t) = 2\sin(3t)$.
c) Pour la situation donnée au point b), calculer l'amplitude de la sortie en régime permanent.

Solution

a) $$G(s) = 6\left(\frac{s+1}{s+3}\right)e^{-0,1\,s} = 2\frac{(s+1)}{(s/3+1)}e^{-0,1\,s}$$





b) $H(s) = F(s)G(s) = 2\dfrac{(\alpha s+1)(s+1)}{(0{,}1s+1)(s/3+1)}e^{-0{,}1s}$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arctan(\alpha\omega) + \arctan(\omega) - \arctan(0{,}1\,\omega)$$
$$- \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) - 0{,}1\,\omega$$

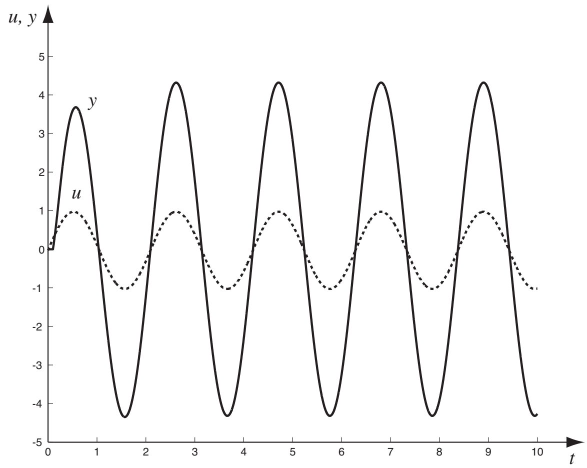
$\varphi = 0$ pour $\omega = 3$ rad/s donne:

$$\arctan(3\alpha) = -\arctan(3) + \arctan(0{,}3) + \arctan(1) + 0{,}3 = 0{,}1278$$

$$\alpha = \frac{\tan(0{,}1278)}{3} = 0{,}043$$

c) $R_A = |H(j\omega)| = 2\sqrt{\dfrac{1+(0{,}043\cdot 3)^2(1+3^2)}{(1+(0{,}3)^2)(1+1^2)}} = 4{,}32$

ce qui donne une sortie d'amplitude 8,64.



Exercice 9

Un phénomène de transport est modélisé par un retard pur de 2 s. A l'aide d'un développement en série de Taylor, on obtient l'approximation de Padé suivante:

$$G(s) = e^{-2s} = \frac{e^{-s}}{e^{s}} \simeq \frac{1-s}{1+s}$$

a) Représenter $G(s)$ et son approximation de Padé dans un diagramme de Bode asymptotique.

b) Calculer le rapport d'amplitude et le déphasage de $G(j\omega)$ et de son aproximation de Padé pour $\omega = 5$ rad/s.

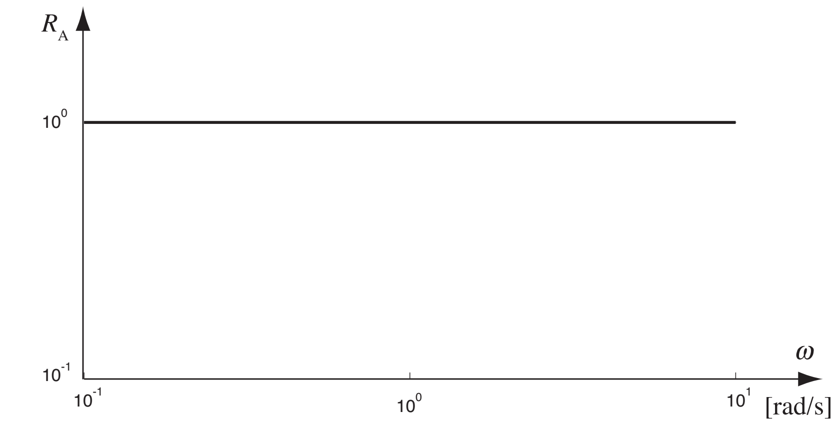
c) Evaluer l'ordre et le gain statique de $G(s)$ et de son approximation.

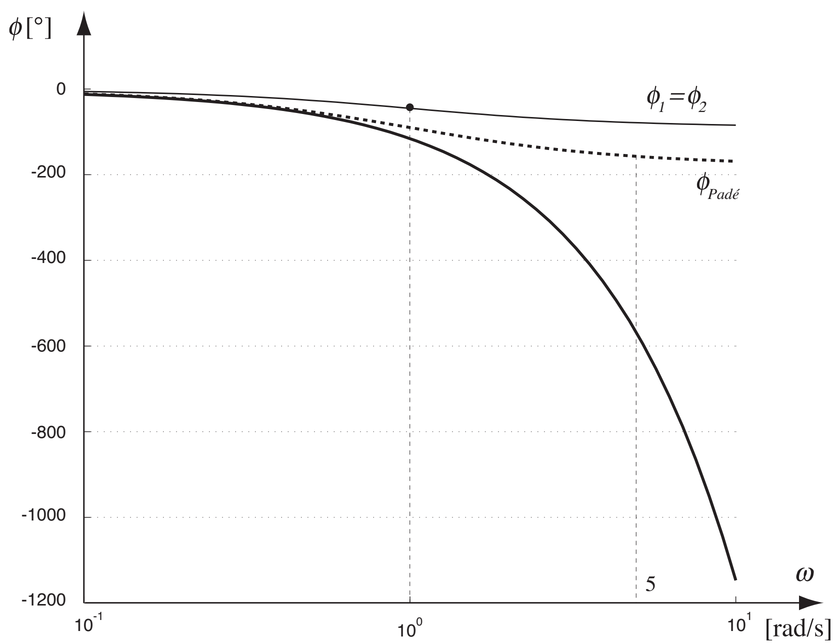
Solution

a) $G_{\text{Padé}}(j\omega) = \dfrac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$

$$\left|G_{\text{Padé}}(j\omega)\right| = \frac{|1 - j\omega|}{|1 + j\omega|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1$$

$$\arg[G_{\text{Padé}}(j\omega)] = \arg(1 - j\omega) - \arg(1 + j\omega) = -2\arctan(\omega)$$





b) Pour $\omega = 5$ rad/s

$$|G(5j)| = |G_{\text{Padé}}(5j)| = 1$$

$$\arg[G(5j)] = -2 \cdot 5 = -10 \text{ rad} = -573°$$

$$\arg[G_{\text{Padé}}(5j)] = -2\arctan(5) = -2{,}75 \text{ rad} = -157°$$

c) $G(s)$: ordre infini ; gain statique = 1

$G_{\text{Padé}}(s)$: ordre 1, gain statique = 1