Procédés de Production 5 mai 2025
Dr.E.Boillat

Série 5.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de modéliser un système de refroidissement par eau d'un moule permanent. On considère l'approche du moule unidmensionnel (direction x) caractérisé par une distribution de température $T = T(t, x)$. L'interface cavité-moule est le plan $x = 0$ et on admet que le refroidissement est infiniment efficace dans le sens où il maintient à la valeur $T_{\text{eau}} = 20°\text{C}$ la température de l'interface. On suppose aussi que les propriétés thermiques du matériau de fonderie (conductivité thermique et diffusivité thermique) ne dépendent pas de la température. On considèrera deux matériaux différents (cf. Tab. 1).

- Estimez la vitesse de progression v_{sl} de la zone solidifiée en fonction des propriétés thermiques du matériau de fonderie et de la température de coulée T_c (qu'on supposera égale à la température de fusion T_f). En particulier, calculez l'épaisseur de la pièce soldifiée après $t = 10\,\text{s}$. Que constatez-vous ?

	valeur		
grandeur	Ag	Pb	**unité**
Température de fusion (liquidus) T_f	961.9	327.5	°C
Chaleur latente L	105.0	24.1	J/g
Conductivité thermique k	419	33	W/m/°C
Capacité thermique C_p	0.234	0.129	J/g/°C
Densité ρ	9.1	10.3	g/cm^3

TABLE 1 – Propriétés thermiques essentielles du matériau de fonderie

Indication On cherchera à obtenir une équation de la forme

$$\sqrt{\pi}\text{erf}(\beta) - \frac{\text{e}^{-\beta^2}}{\text{a}\beta} = 0 \tag{1}$$

pour le paramètre de vitesse β et avec a une donnée.
On propose d'utiliser que l'algortihme itératif (Newton) :

$$\beta_{n+1} = \beta_n \left(1 - \frac{a\sqrt{\pi}\beta_n \text{erf}(\beta_\text{n})\text{e}^{\beta_\text{n}^2} - 1}{2(a+1)\beta_n^2 + 1} \right)$$

initialisé en $\beta_0 = \frac{1}{2a}$ converge vers la solution de (1).
Dans le cas où la fonction erreur $\sqrt{\pi}$erf n'est pas programmée sur votre calculette, remplacez-là par son développement limité d'ordre 6 :

$$\sqrt{\pi}\text{erf}(\beta) = 2\beta - \frac{2}{3}\beta^3 + \frac{1}{5}\beta^5 + \text{O}(\beta^7).$$