Série n°7

L'Exercice 1 de cette Série est le même que l'Exercice 2 de la Série précédente.

Exercice 1 : Soit $\mathcal{L}_0$ le langage (égalitaire) du premier ordre de l'arithmétique $\{\underline{0}, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}\}$. Pour le modèle standard $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$ nous posons $T = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ la $\mathcal{L}$-théorie de $\mathbb{N}$, i.e.

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ est une } \mathcal{L}\text{-formule close telle que } \mathcal{N} \models \varphi\}.$$

Nous définissons par induction le terme $\underline{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ comme $\underline{0} = \underline{0}$ et $\underline{n+1} = \underline{S}(\underline{n})$.

1. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T dans lequel il existe un élément $m \in |\mathcal{M}|$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, $\underline{n}^{\mathcal{M}}$ est un diviseur de m.
2. Montrer que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de la théorie T il existe un unique plongement $p : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$.

Exercice 2 : Nous rappelons qu'un *ordre total* est un couple $\langle E, < \rangle$ où E est un ensemble et $<$ est une relation binaire sur E telle que pour tous x, y, z appartenant à E :

1. $(x < y \wedge y < z) \to (x < z)$;
2. $\neg(x < x)$;
3. $x \neq y \to (x < y \vee y < x)$.

Un bon ordre est un ordre total $\langle E, < \rangle$ tel que pour tout sous-ensemble non vide S de E il existe un élément $m \in S$ qui est $<$-minimal, i.e. pour tout $s \in S$ on a $s \nless m$.

1. Montrer que si $\langle E, < \rangle$ est un bon ordre alors il n'existe pas de *chaîne infinie descendante*, i.e. une suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans E avec $e_0 > e_1 > e_2 > \dots$
2. Soit $\langle E, < \rangle$ un ordre total. Montrer en utilisant explicitement l'axiome du choix, ou l'une des ses formes équivalentes, que s'il n'existe pas de chaîne infinie descendante, alors $\langle E, < \rangle$ est un bon ordre.
3. Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire du premier ordre contenant uniquement le symbole de relation binaire $<$. La classe des bons ordres, i.e. des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ telles que $\langle M, < \rangle$ est un bon ordre, est-elle axiomatisable ? Est-elle finiment axiomatisable ?

Exercice 3 :

1. Soient E un ensemble et F un filtre sur E. On dit que F est *maximal* si pour tout filtre F' sur E, $F \subseteq F'$ implique $F = F'$. Montrer qu'un filtre F sur un ensemble E est maximal si et seulement si c'est un ultrafiltre.
2. Nous rappelons qu'un ensemble partiellement ordonné $(A, \leqslant)$ est dit *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné de A admet un majorant.

   Lemme de Zorn. *Tout ensemble inductif admet (au moins) un élément maximal.*

   Montrer que le Lemme de Zorn implique le lemme de l'ultrafiltre.

   Lemme de l'ultrafiltre. *Soient E un ensemble et F un filtre sur E. Il existe un ultrafiltre U sur E qui étend F.*

Exercice 4 (facultatif):

Dans cet exercice, nous nous proposons de donner une preuve du *Théorème de compacité* en montrant qu'un certain espace topologique est compact. Pour ce faire, nous rappelons les définitions et résultats suivants de topologie :

Définition.

- *Un espace topologique est* séparé *(ou* de Hausdorff*) ssi pour toute paire de points x et y distincts, il existe un voisinage de x et un voisinage de y qui sont disjoints.*
- *Un espace topologique est* compact *ssi de tous recouvrement ouvert de cet espace, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
- *Un espace topologique est* zéro dimensionnel *si et seulement si il admet une base d'ouverts fermés.*
- *Le filtre des voisinages d'un point $x \in X$ est l'ensemble*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X : \exists U \text{ ouvert}, \ x \in U \subseteq V\}.$$

Une caractérisation des espaces compacts est donnée dans la proposition suivante.

Proposition. *Soit X un espace topologique. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- *X est compact ;*
- *toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X dont l'intersection de toute sous-famille finie est non vide possède une intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ non-vide ;*
- *tout ultrafiltre U sur X est convergent (c'est-à-dire qu'il existe un point de X dont le filtre des voisinages est contenu dans U).*

Le théorème de compacité que nous allons prouver assure la compacité de l'ensemble des théories complètes et closes par conséquence sémantique muni d'une certaine topologie.

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Pour cet exercice, nous appelons *théorie* sur $\mathcal{L}$ un ensemble de formules closes de $\mathcal{L}$. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des théories T sur $\mathcal{L}$ telles que :

i) T est complète ;

ii) T est close par conséquence sémantique.

Nous commençons par munir cet ensemble d'une topologie. Pour toute formule close φ sur $\mathcal{L}$, nous notons

$$\langle\varphi\rangle = \{T \in \mathfrak{X} \mid \varphi \in T\}.$$

1. Montrer que la famille $\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ formule close de } \mathcal{L}\}$ constitue une base d'ouverts d'une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathfrak{X}$.

   Indication: Remarquer que $\langle\varphi\rangle \cap \langle\psi\rangle = \langle\varphi \wedge \psi\rangle$.

Nous allons maintenant montrer le théorème suivant en trois étapes.

Théorème (Compacité de l'espace des théories complètes)**.** *L'espace $\mathfrak{X}$ des théories complètes et closes par conséquence sémantique sur un langage $\mathcal{L}$ est compact, séparé, et zéro dimensionnel.*

2. Montrer que l'espace topologique $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ est séparé.
3. Montrer que $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ est zéro dimensionnel.
4. Montrer finalement que $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ est compact.

   Indication: Pour tout $T \in \mathfrak{X}$, choisir un modèle $\mathcal{M}_T$ de T. Puis pour un ultrafiltre U sur $\mathfrak{X}$, considérer la $\mathcal{L}$-structure donnée par l'ultraproduit $\mathcal{M} = \prod_{T\in\mathfrak{X}} \mathcal{M}_T/_U$. Montrer que $Th(\mathcal{M})$ est un (le seul) point de convergence de l'ultrafiltre U dans $\mathfrak{X}$, et conclure.

Nous allons maintenant montrer le théorème de compacité en deux étapes.

Corollaire (Théorème de compacité classique)**.** *Un ensemble de formules closes T admet un modèle si et seulement si tout sous-ensemble fini de T admet un modèle.*

5. Montrer que les fermés de $\mathfrak{X}$ sont de la forme $\bigcap_{i\in I}\langle\varphi_i\rangle$.
6. Montrer le théorème de compacité classique en appliquant la compacité (sous sa forme parlant des familles de fermés) de l'espace $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ à une famille de fermés judicieusement choisie.