Série n°1

Exercice 1 : Définir des bijections qui témoignent des affirmations suivantes.

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 : Soit A un ensemble. Nous notons $A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ l'ensemble de suites finies à valeurs dans A. Montrer que les ensembles suivants sont équipotents à $\mathbb{N}$:

1. $\{0,1\}^{<\omega}$,
2. $\mathbb{N}^{<\omega}$,
3. $A^{<\omega}$, avec A un ensemble dénombrable non vide.

Indication: On pourra utiliser le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

Exercice 3 :

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. [1]
2. Utiliser ce fait pour donner une autre démonstration du fait que pour tout ensemble dénombrable non vide A, $A^{<\omega}$ est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exercice 4 : Soient deux ensembles A et B disjoints, avec A infini (i.e. qu'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans A) et B dénombrable. Montrer que A est équipotent à $A \cup B$, c'est à dire qu'il existe une bijection de A dans $A \cup B$.

Exercice 5 :

1. Soit E un ensemble quelconque et $G : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application telle que pour tous $X, Y \subseteq E$, si $X \subseteq Y$, alors $G(X) \subseteq G(Y)$. Montrer qu'il existe $M \subseteq E$ tel que $G(M) = M$.
   Indication: Prendre $M = \bigcup_{X \subseteq G(X)} X$.
2. Prouver le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein sur la base du résultat précédent, à savoir : Soient A et B deux ensembles. S'il existe $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux injections, alors il existe une bijection entre A et B.
   Indication: Considérer l'application $G : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ *définie par*
   $$G(X) = A \backslash g\big(B \backslash f(X)\big) \quad \text{pour tout } X \subseteq A.$$

1. On pourra utiliser ici l'axiome du choix dénombrable : Étant donnée une famille dénombrable d'ensembles non vides, il existe une fonction qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments.