Série n°12

Exercice 1 : Donnez une preuve en calcul des séquents des séquents suivants.

1. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$
2. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
3. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$
4. $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
5. $\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$

Parmi ces preuves, déterminez lesquelles sont faites en logique classique, en logique intuitionniste et en logique minimale.

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{L} = \{R, f\}$ un langage égalitaire du premier ordre avec R un symbole de relation binaire, et f un symbole de fonction.

1. Dans chacun des cas suivants, donner une formule close φ_i telle que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} = \left\langle M, R^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}} \right\rangle$:
   a) $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ssi $R^{\mathcal{M}}$ est transitive.
   b) $\mathcal{M} \models \varphi_2$ ssi $R^{\mathcal{M}}$ est irréflexive.
   c) $\mathcal{M} \models \varphi_3$ ssi M admet un élément $R^{\mathcal{M}}$-minimal[1].
   d) $\mathcal{M} \models \varphi_4$ ssi $R^{\mathcal{M}}$ est asymétrique.[2]
   e) $\mathcal{M} \models \varphi_5$ ssi $f^{\mathcal{M}}$ est la fonction identité sur M.
   f) $\mathcal{M} \models \varphi_6$ ssi le graphe de $f^{\mathcal{M}}$ est contenu dans $R^{\mathcal{M}}$.
   g) $\mathcal{M} \models \varphi_7$ ssi $R^{\mathcal{M}}$ est réflexive.
2. Lesquelles des assertions suivantes sont vérifiées ? Justifier.
   a) $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash_c \varphi_4$.
   b) $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash_c \varphi_3$.
   c) $\{\varphi_5, \varphi_6\} \vdash_c \varphi_7$.
   d) $\{\varphi_5, \varphi_6, \varphi_2\} \vdash_c \varphi_3$.

1. C'est à dire un élément qui n'admet pas de minorant pour R.
2. Une relation par R est dite *asymétrique* sur un ensemble E s'il n'existe pas deux points de E en relation réciproque par R.

Exercice 3 :

Montrer que les séquents suivants ne sont pas prouvables en logique classique :

1. $\vdash \forall x(P(x) \to \forall y P(y))$
2. $\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists y P(y) \to \forall z Q(z))$
3. $\vdash \exists y \forall x\, ((P(x,y) \to \neg P(x,x)) \land (\neg P(x,x) \to P(x,y)))$
4. $\vdash \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y P(y,y)$
5. $\vdash \forall x(\neg x \simeq c \to \exists y\ x \simeq s(y))$

Indication: Utiliser le théorème de complétude.