Série n°10

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{L} = \{c_0, c_1, \oplus, \otimes, R\}$ un langage égalitaire du premier ordre, avec c_0 et c_1 deux symboles de constante, $\oplus$ et $\otimes$ des symboles de fonction binaire, et R un symbole de relation binaire. Soit $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ la $\mathcal{L}$-structure où $\mathbb{N}$ sont les entiers naturels et $+$, $\cdot$ et $<$ sont l'addition, la multiplication et l'ordre strict usuels sur $\mathbb{N}$. On note T_{arith} la $\mathcal{L}$-théorie de $\mathcal{N}$.

1. Montrer qu'il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de T_{arith} tel qu'il existe $a \in |\mathcal{M}|$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M} \models R(\underline{n}, a)$ où $\underline{0} = c_0$ et $\underline{n} = \underbrace{c_1 \oplus c_1 \oplus \cdots \oplus c_1}_{n \text{ fois}}$ sinon.
2. Pour un modèle $\mathcal{M}$ satisfaisant le point précédent, montrer que $\mathcal{N}$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{M}$. Montrer aussi que l'ensemble $|\mathcal{M}| \setminus \{\underline{n}^{\mathcal{M}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ muni de la restriction de l'ordre $R^{\mathcal{M}}$ n'admet pas de plus petit élément.
3. Soit $\langle E, < \rangle$ un ensemble totalement ordonné dénombrable quelconque. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models T_{\text{arith}}$ et $\langle E, < \rangle$ se plonge dans $\langle |\mathcal{M}|, R^{\mathcal{M}} \rangle$, c'est-à-dire qu'il existe une injection $f : E \longrightarrow M$ telle que $x < y$ ssi $f(x) R^{\mathcal{M}} f(y)$.
4. Soit $\langle E, < \rangle$ un ensemble totalement ordonné de cardinalité quelconque κ. Existe-t-il un modèle $\mathcal{M}$ de T_{arith} tel qu'il existe un plongement de $\langle E, < \rangle$ dans $\langle |\mathcal{M}|, R <^{\mathcal{M}} \rangle$? Quelle est la cardinalité minimale pour un tel modèle ?

Exercice 2 :

1. Montrer le théorème suivant, appelé *critère de Vaught*.

   Théorème. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage $\mathcal{L}$ dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents, alors T est complète.*

   Indication: Utiliser le théorème de Löwenheim-Skolem.

2. En déduire le corollaire suivant :

   Corollaire. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes, alors T est complète.*

3. Comme application, montrer que la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément est complète en utilisant le résultat du Devoir n°2, à savoir :

   Proposition. *Tous les ordres denses dénombrables sans premier ni dernier élément sont isomorphes.*

Exercice 3 : Soit $\mathcal{L}_0$ le langage du premier ordre de l'arithmétique $\{\underline{0}, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}\}$. Pour le modèle standard $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$ nous posons $T_{\text{arithm}} = \text{Th}(\mathcal{N})$ la théorie de $\mathcal{N}$.

En utilisant le théorème de compacité ainsi que le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, nous allons montrer qu'il existe exactement $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables de T_{arithm} deux-à-deux non isomorphes.

Nous notons κ la cardinalité de l'ensemble des classes d'isomorphisme de modèles dénombrables de T_{arithm}. Nous allons montrer que $\kappa = 2^{\aleph_0}$.

1. Montrer que $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Notons $x|y$ la formule de $\mathcal{L}_0$ donnée par $\exists z(x \underline{\times} z = y)$. Pour tout modèle dénombrable $\mathfrak{M}$ de T_{arithm} et tout élément $a \in |\mathfrak{M}|$ notons $\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent a dans $\mathfrak{M}$, formellement

$$\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathfrak{M} \models \underline{p}|a\}$$

où $\underline{p}$ désigne $\overbrace{\underline{S} \cdots \underline{S}(\underline{0})}^{p \text{ fois}}$. Nous posons ensuite

$$D = \left\{ P \subseteq \mathbb{P} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il existe un modèle dénombrable } \mathfrak{M} \text{ de } T_{\text{arithm}} \\ \text{et il existe } a \in |\mathfrak{M}| \text{ tel que } P = \text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) \end{array} \right\}.$$

2. Montrer que $D = \mathcal{P}(\mathbb{P})$.
3. Montrer que $|D| \leqslant \kappa \cdot \aleph_0$.
4. Conclure.