Examen Blanc

Une feuille A4 recto-verso de notes est autorisée.
Les points ne sont donnés que comme indication
de longueur et/ou de difficulté de chaque exercice.
Sauf indication contraire, toute réponse doit être justifiée.

Nom de famille :

Prénom :

Numéro SCIPER :

Points obtenus :

/140

Note finale :

<u>**Problème 1**</u> **:** (14 points)

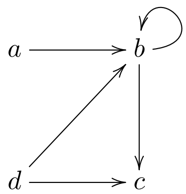
On considère le langage **égalitaire** du premier ordre $\mathcal{L}$ comprenant comme symboles non logiques le symbole d'égalité $=$ et un symbole de relation binaire R. Nous représentons les $\mathcal{L}$-structures comme des graphes orientés: le domaine est l'ensemble des sommets et l'interprétation de R est représentée par les flèches entre sommets, i.e. $R^{\mathcal{M}}(a,b)$ ssi il y a une flèche $a \to b$.

6 pt **Question 1.1 :** Montrer dans chacun des trois cas suivants que les deux formules proposées ne sont pas sémantiquement équivalentes:

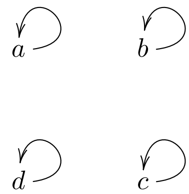
1. $\exists x \forall y \neg R(y,x)$ et $\forall x \neg \forall y R(y,x)$;
2. $\big(\forall x \exists y R(x,y) \leftrightarrow \forall x \exists y R(y,x)\big)$ et $\forall x \big(\exists y R(x,y) \leftrightarrow \exists y R(y,x)\big)$;
3. $\exists x \forall y R(x,y)$ et $\forall x \exists y R(x,y)$;

8 pt **Question 1.2 :** Écrire des formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ de $\mathcal{L}$ de sorte que pour tous $i,j \in \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{M}_j \models \varphi_i$ si et seulement si $i = j$.

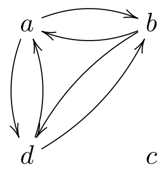
$\mathcal{M}_1$:



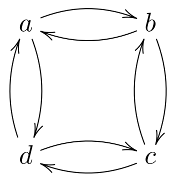
$\mathcal{M}_2$:



$\mathcal{M}_3$:



$\mathcal{M}_4$:



/14 points

Problème 2 : (11 points)

On considère un langage égalitaire $\mathcal{L}$ comportant deux symboles de fonction unaire f et g.

3 pt **Question 2.1 :** Écrire des formules closes φ_1, φ_2 et φ_3 telles que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\langle \mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}, g^{\mathcal{M}} \rangle$

1. $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ssi $f^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} = g^{\mathcal{M}}$ et $g^{\mathcal{M}}$ est une application constante;
2. $\mathcal{M} \models \varphi_2$ ssi $\mathrm{Im}(f^{\mathcal{M}}) \subseteq \mathrm{Im}(g^{\mathcal{M}})$;
3. $\mathcal{M} \models \varphi_3$ ssi $f^{\mathcal{M}}$ est injective et $g^{\mathcal{M}}$ est surjective.

Considérons également la formule

$$\varphi_4 \ : \ \exists x (\exists y \ g(y) = x \wedge f(x) = x)$$

4 pt **Question 2.2 :** Est-ce que $\varphi_2 \vdash_c \varphi_4$?

4 pt **Question 2.3 :** Est-ce que $\varphi_1 \vdash_c \varphi_2$?

/11 points

<u>Problème 3</u> : (12 points)

2 pt **Question 3.1 :** Définir un bon ordre $\sqsubset$ sur $\mathbb{N}$ de sorte que $(\mathbb{N}, \sqsubset)$ soit isomorphe à l'ordinal $\omega \cdot 2$.

2 pt **Question 3.2 :** Quels sont les ordinaux α vérifiant l'équation $\alpha = \alpha + 1$?

2 pt **Question 3.3 :** Quels sont les ordinaux α vérifiant l'équation $\alpha = 1 + \alpha$? Justifier.

2 pt **Question 3.4 :** Donner trois ordinaux α, β et γ vérifiant $(\alpha+\beta)\cdot\gamma \neq \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$.

4 pt **Question 3.5 :** Classer les ordinaux suivants par ordre croissant.

$$\omega^{\omega_1}, \quad (\omega+3)\cdot 3, \quad \omega+1, \quad (\omega\cdot 3)\cdot(\omega\cdot 5), \quad 1+\omega, \quad 2\cdot(\omega+3), \quad \omega_1^{\omega}, \quad 10\cdot(\omega\cdot(7\cdot(3\cdot\omega))).$$

/12 points

Problème 4 : (12 points)

4 pt **Question 4.1 :** Classer par cardinalité croissante les ensembles suivants.[1]

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ est une application affine$\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $\{0,1,2,\ldots,10^5\}$.

4 pt **Question 4.2 :** On note respectivement $\oplus$ et $\odot$ l'addition et la multiplication cardinale pour les distinguer des opérations ordinales $+$ et $\cdot$. Classer par ordre croissant les expressions cardinales suivantes.

$\aleph_3 \odot \aleph_2$, $\mathrm{Card}(\omega \cdot \omega + 1)$, $\aleph_{\omega^\omega}$, $\mathrm{Card}(\sup\{\omega_2 + \alpha \mid \alpha < \omega^3\})$, $\aleph_2 \oplus \aleph_4$, $\aleph_\omega \odot \aleph_{\omega^2}$.

4 pt **Question 4.3 :** Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$ des ensembles finis d'entiers relatifs est équipotent à l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$.

/12 points

[1] On rappelle qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *affine* s'il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

<u>Problème 5</u> : (36 points)

Soit $\mathcal{L} = \{=\}$ le langage du premier ordre ne comportant que le symbole d'égalité. Dans cet exercice, on ne considère que des $\mathcal{L}$-structures et des $\mathcal{L}$-théories.

1 pt **Question 5.1 :** Quelles sont les $\mathcal{L}$-structures qui sont isomorphes à la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ dont le domaine contient pour seuls éléments les trois éléments distincts a, b et c?

2 pt **Question 5.2 :** Écrire une formule F qui axiomatise la classe des $\mathcal{L}$-structures dont le domaine est de cardinalité n où $n = 1$,2 ou 7.

3 pt **Question 5.3 :** Écrire une formule G dont les modèles **finis** sont exactement les $\mathcal{L}$-structures dont le domaine est de cardinalité n avec $n \neq 1$,2,7.

3 pt **Question 5.4 :** Donner une théorie T_{Pairs} dont les modèles **finis** sont exactement les $\mathcal{L}$-structures de cardinalité paire.

3 pt **Question 5.5 :** La théorie T_{Pairs} est-elle complète?

2 pt **Question 5.6 :** Donner une théorie T_{Inf} dont les modèles sont exactement les $\mathcal{L}$-structures dont le domaine est infini.

5 pt **Question 5.7 :** Existe-t-il une formule Φ_{Inf} dont les modèles sont exactement

les $\mathcal{L}$-structures dont le domaine est infini?

Hint: On pourra raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de complétude.

On considère maintenant une théorie quelconque T sur le langage $\mathcal{L}$ dont les modèles **finis** sont exactement les structures de cardinalité paire.

3 pt **Question 5.8 :** Montrer que la théorie $T \cup T_{\mathrm{Inf}}$ est consistante.

Hint: Utiliser le théorème de compacité.

3 pt **Question 5.9 :** Quelles sont les cardinalités des domaines des modèles de la théorie $T \cup T_{\mathrm{Inf}}$?

Hint: Utiliser le théorème de Löwenheim-Skolem.

4 pt **Question 5.10 :** Montrer que toute $\mathcal{L}$-structure infinie est modèle de $T \cup T_{\mathrm{Inf}}$. En déduire que toute $\mathcal{L}$-structure infinie est modèle de T.

Hint: On pourra utiliser à profit les notions de $\mathcal{L}$-structures isomorphes et de $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes.

2 pt **Question 5.11 :** Déduire de ce qui précède que T et T_{Pairs} ont exactement les mêmes modèles.

5 pt **Question 5.12 :** Existe-t-il une formule H dont les modèles **finis** sont exactement les structures de cardinalité paire?

Hint: On pourra utiliser les points précédents, le théorème de complétude et/ou le théorème de compacité.

/36 points

<u>Problème 6</u> : (16 points)

Nous rappelons qu'un *ordre total* est un couple $\langle E, <\rangle$ où E est un ensemble et $<$ est une relation binaire sur E telle que pour tous x,y,z appartenant à E:

1. $(x < y \wedge y < z) \to (x < z)$;
2. $\neg(x < x)$;
3. $x \neq y \to (x < y \vee y < x)$.

Un bon ordre est un ordre total $\langle E, <\rangle$ tel que pour tout sous-ensemble non vide S de E il existe un élément $m \in S$ qui est $<$-minimal, i.e. pour tout $s \in S$ on a $s \nless m$.

2 pt **Question 6.1 :** Montrer que si $\langle E, <\rangle$ est un bon ordre alors il n'existe pas de *chaîne infinie descendante*, i.e. une suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans E avec $e_0 > e_1 > e_2 > \ldots$

4 pt **Question 6.2 :** Soit $\langle E, <\rangle$ un ordre total. Montrer en utilisant explicitement l'axiome du choix, ou l'une des ses formes équivalentes, que s'il n'existe pas de chaîne infinie descendante, alors $\langle E, <\rangle$ est un bon ordre.

10 pt **Question 6.3 :** Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire du premier ordre contenant le symbole de relation binaire $<$. La classe des bons ordres, i.e. des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M} = \langle M, < , \ldots\rangle$ telle que $\langle M, <\rangle$ est un bon ordre, est-elle axiomatisable? Est-elle finiment axiomatisable?

Hint: Utiliser le théorème de compacité.

/16 points

Problème 7 : (24 points)

Soit φ une formule close et soient $\psi(x)$ et $\theta(x)$ deux formules dont x est la seule variable libre. Déterminer si les séquents suivants sont prouvables en logique classique, intuitionniste, ou minimale.

6 pt **Question 7.1 :** $\vdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$.

6 pt **Question 7.2 :** $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

6 pt **Question 7.3 :** $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

6 pt **Question 7.4 :** $(\exists x \psi(x) \to \forall x \theta(x)) \ \vdash \ \forall x(\psi(x) \to \theta(x))$.

/24 points

<u>Problème 8</u> : (15 points)

Soit $\mathcal{L} = \{R\}$ un langage **égalitaire** du premier ordre avec avec un symbole de relation binaire R, et soit $\mathcal{G} = \left\langle G, R^{\mathcal{G}} \right\rangle$ une $\mathcal{L}$-structure. On dit que $\mathcal{G}$ est un *graphe (non dirigé)* si $R^{\mathcal{G}}$ est symétrique et irréflexive. On dit de plus que ce graphe est *connexe* si pour tous $a,b \in \mathcal{G}$ il existe une "chaîne" reliant a à b, c'est à dire s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des sommets $s_0,...,s_n$ tels que :

- $s_0 = a$, $s_n = b$, et
- pour tout $i < n$, on a $(s_i, s_{i+1}) \in R^{\mathcal{G}}$.

2 pt **Question 8.1 :** Donner une axiomatique des graphes non dirigés dans le langage $\mathcal{L}$.

2 pt **Question 8.2 :** Montrer que la structure $\mathcal{Z} := \langle \mathbb{Z}, R^{\mathcal{Z}} \rangle$, où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et $R^{\mathcal{Z}} := \{(a,b) : \ |a - b| = 1\}$, est un graphe connexe.

6 pt **Question 8.3 :** Utiliser un argument de compacité pour montrer qu'il existe un graphe dénombrable non connexe élémentairement équivalent à $\mathcal{Z}$.

5 pt **Question 8.4 :** La classe des graphes connexes est-elle axiomatisable? La classe des graphes non connexes est-elle axiomatisable?

/15 points