# Série 9

1. Déterminer la stabilité des systèmes suivants, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 + \alpha x_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = e^{-t}x_1^3 - x_2 \\ x_2' = \frac{t^2}{t^2+1}x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$$

2. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation autonome

$$x' = f(x). \tag{1}$$

On suppose qu'il existe une fonction $V \in C^1(B_R, \mathbb{R})$ où $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, |x| \leqslant R\}$, telle que

$$V(0) = 0$$

et

$$\forall x \in B_R, \quad V(x) \geqslant 0, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) \leqslant 0.$$

Prouver que $x = 0$ est uniformément stable pour (1).
Si l'on suppose de plus que

$$\forall x \in B_R \setminus \{0\}, \quad V(x) > 0, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) < 0,$$

prouver que $x = 0$ est asymptotiquement stable pour (1).

*Remarque :* Une fonction $V$ satisfaisant les propriétés ci-dessus est appelée fonction de Lyapounov.

3. L'équation décrivant les oscillations d'un pendule simple de longueur $\ell$ est

$$\ell\phi'' = -g \sin\phi,$$

où $g$ l'accélération de gravitation sur terre. Trouver une fonction de Lyapounov pour ce système et en déduire qu'il est uniformément stable. Dessiner les orbites dans le plan $(\phi, \phi')$.

4. Esquisser les portraits de phase des systèmes suivants :

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x - 1 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x' = x^2 - x \\ y' = (2x - 1)y \end{cases}$$